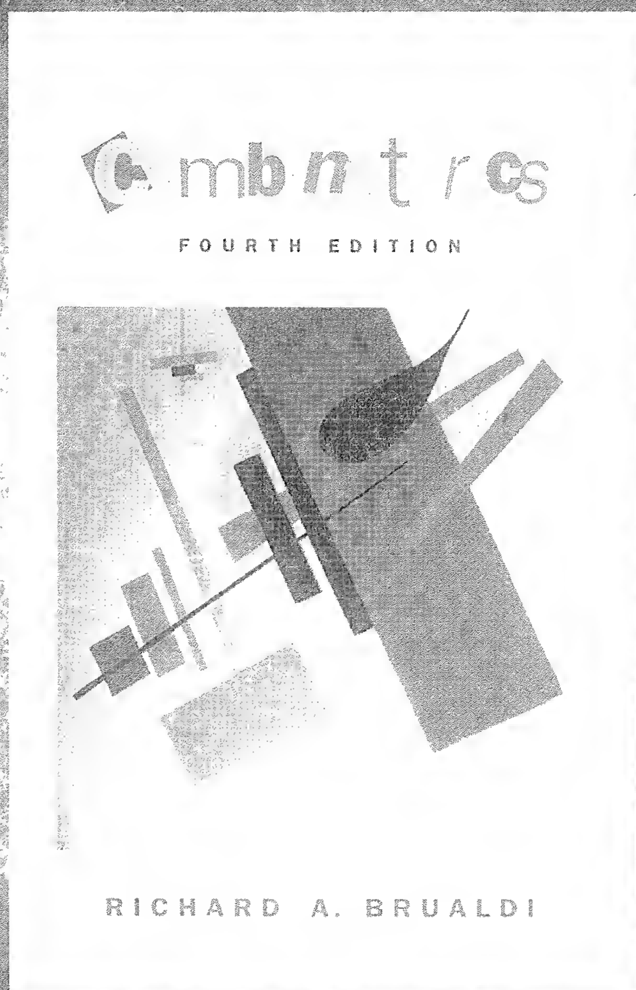
PEARSON Prentice Hall

计 算 机 科 学 丛 书

原书第4版

组合数学

(美) Richard A. Brualdi 著 冯舜玺 罗平 裴伟东 译 卢开澄 冯舜玺 校
威斯康星大学麦迪逊分校



Introductory Combinatorics

Fourth Edition



机械工业出版社
China Machine Press

目　录

第1章 什么是组合数学

组合数学问题在生活中随处可见。例如，计算下列赛制下总的比赛次数：n 个球队参赛，每队只和其他队比赛一次。创建幻方。在纸上画一个网络，用铅笔沿着网络的线路走，在笔不离开纸面且不重复线路的条件下，一笔画出网络图。在玩扑克牌游戏中，计算满堂红（full house）牌的手数，以确定出现一手满堂红牌的几率。所有这些都是组合数学问题。正如人们想到的，组合数学的历史渊源扎根于数学娱乐和游戏之中。过去研究过的许多问题，不论出于消遣还是出于对其美学的考虑，如今在纯科学和应用科学中都具有高度的重要性。今天，组合数学是数学的一门重要分支，而且它的影响还在继续扩大。组合数学自 20 世纪 60 年代以来急速发展的部分原因就在于计算机在我们的社会中所发挥的重要影响，而且这种影响还在继续发挥。由于运算速度的持续增加，计算机已经能够解决大型问题，这在以前是不可能做到的。然而计算机不能独立运行，它需要编程来控制。这些程序的基础往往是求解问题的组合数学算法。对于这些算法，运行时间效率和存储需求分析需要更多的组合数学思想。

组合数学近期发展的另一个原因是它对于那些过去很少与数学正式接触的学科的适用性。由此我们发现，组合数学的思想和技巧不仅正在用于数学应用的传统自然科学领域，而且也用于社会科学、生物科学、信息论等领域。此外，组合数学和组合学思想在许多数学分支中已经变得越来越重要。

组合数学涉及将一个集合的物体排列成满足一些指定规则的格式。如下两类一般性问题反复出现：

- *排列的存在性*　如果有人想要排列一个集合的成员使得某些条件得以满足，那么这样一种排列是否可行根本就不是显而易见的。这是最根本的问题。如果这种排列不总是可能的，那么我们要问，这种排列在什么样的（必要和充分）条件下能够实现？
- *排列的计数和分类*　如果一个指定的排列是可能的，那么就会存在多种方法去实现它。此时，人们就可以计数并将它们分类。

虽然对任何组合问题都可以考虑其存在性和计数问题，但在实践中常常发生的却是：如果存在性问题需要广泛地研究，那么计数问题则是非常困难的。然而，如果指定的排列问题的存在性容易解决，那么计算实现该排列的方法的数目则是可能的。在例外的情形下（即当它们的数目较小时），这些排列可以被列出来。理解列出所有的排列与确定它们的数目之间的区别很重要。一旦这些排列被列出，它们就可通过与整数集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 之间建立一一对应而被数出，其中 n 是某个整数。我们计数的方法就是：1，2，3，…。但是，我们主要关心的是事先不列出指定类型的排列而确定它们的数目的方法。当然，这些排列的总数也许很大以至于不可能把它们都列出来。概括地说，许多组合数学问题常呈现下列形式：

“能否排列……”

“存在一个……吗？”

“能用多少方法……”

“计算……的数目。”

与上述问题同时出现的另外两种组合数学问题是：

- *研究一个已知的排列* 当人们建立起满足某些指定条件的一个排列（可能不容易）以后，可能要考察这个排列的性质和结构。这样的结构可能会涉及分类问题，也许还涉及一些潜在的应用，它还可能牵扯到下面的问题。
- *构造一个最优的排列* 如果有可能存在多于一个的排列，人们也许想要确定满足某些优化准则的一个排列，即找出某种规定意义下的“最好的”或“最优的”排列。

因此，组合数学可以一般地描述为：*组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科*。虽然某些离散结构是无限的，但本书一般把离散视为有限的。

验证发现的组合数学主要工具之一为*数学归纳法*。归纳是一个强有力的过程，在组合数学中尤其是如此。用数学归纳法证明一个强结果常常比证明一个弱结果更容易。虽然在归纳阶段验证多一些是必要的，但归纳假设却是更强的一步。数学归纳法的部分技巧就是找到假设的正确的平衡来进行归纳。我们假设读者熟悉归纳法；尤其读完本书以后更会如此。

然而，许多组合数学问题的解决常常需要某些特别的论证，而且有时需要结合使用一般的理论。人们不能总是退到已知的结果或公理那里。他们必须建立数学模型，研究模型，对一些小的情形进行计算，抓住要害，并运用他们灵活的谋略来解决问题。这里并不是说不存在可以使用的一般原则和方法。对于计数问题，容斥原理、所谓的鸽巢原理、递归关系和生成函数的方法、Burnside 定理以及 Pólya 计数法等就是一般的原则和方法，我们将在后面各章讨论这些原则和方法。但是，洞察到这些原则和方法能够使用以及如何使用常常需要智慧。这样的经验在解决组合问题时是非常重要的。也就是说，*用组合数学解决问题一般说来和用数学解决问题一样，你解决的问题越多，那么能够解决下一个问题的可能性就越大*。

为了使前面的讨论更加具体，现在让我们转到组合问题的几个实例。这些例子从相对简单（但需要解题的灵感）的问题直到其解曾是组合数学中主要成就的那样一些问题。有些问题在后面的章节中还要更详细地讨论。

1.1 例：棋盘的完美覆盖

考虑一张普通的国际象棋棋盘，它被分成 8×8（8 行 8 列）的 64 个正方形。设有形状一样的多米诺牌，每张牌恰好覆盖棋盘上相邻的两个方格。那么，是否能够把 32 张多米诺牌摆放到棋盘上，使得任何两张多米诺牌均不重叠，每张多米诺牌覆盖两个方格，并且棋盘上所有的方格都被覆盖住？我们把这样一种排列称为棋盘被多米诺牌的*完美覆盖*。这是一个简单的排列问题，人们能够很快构造许多不同的完美覆盖。但是，计算不同的完美覆盖的总数就不是一件容易的事情了，不过，这还是有可能做到的。这个数由 Fischer[⊖] 在 1961 年发现，它是 $12\,988\,816 = 2^4 \times (901)^2$。这种普通的国际象棋棋盘可以用排成 m 行 n 列的 mn 个方格的一般棋盘代替。此时，这种棋盘的完美覆盖就未必存在了。比如，3 行 3 列的棋盘就确实不存在完美覆盖。那么，对于什么样的 m 和 n 存在完美覆盖呢？不难看出，当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数时，$m \times n$ 棋盘存在完美覆盖。或者说，当且仅当棋盘的方格数为偶数时，$m \times n$ 棋盘存在完美覆盖。Fischer 已经得出涉及三角函数的用来计算 $m \times n$ 棋盘不同完美覆盖数的更一般公式。这个问题等价于分子物理学中的一个著名问题，即所谓

⊖ M.E.Fischer：Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice，*Physical Review*，124（1961），1664-1672。

的二聚物问题。该问题起源于对表面双原子分子（二聚物）的吸收的考察。棋盘上的那些方格对应这些分子，而多米诺牌则对应二聚物。

再来考察 8×8 的国际象棋棋盘并用一把剪刀剪掉棋盘一副对角上的两个方格，总共剩下 62 个方格。那么，是否能够排列 31 张多米诺牌来得出对这副被剪过的棋盘的完美覆盖？虽然这副被剪过的棋盘与 8×8 棋盘非常接近，且后者有 1200 多万个完美覆盖，但是，这副被剪过的棋盘却没有完美覆盖。其证明是简单而巧妙的组合推理的一个实例。在一副普通的 8×8 棋盘上交替地将方格涂成黑色和白色，则其中 32 个方格是白色的，而另外 32 个方格是黑色的。如果我们剪掉棋盘一副对角上的两个方格，那么我们就剪除了同样颜色的两个方格，比如两个白色方格。这就变成了 32 个黑方格和 30 个白方格。但是，每张多米诺牌需要盖住一个黑方格和一个白方格，于是，31 张不重叠的多米诺牌则盖住 31 个白方格和 31 个黑方格。因此，这副被剪过的棋盘没有完美覆盖，上述推理可总结为

$$31\ \boxed{黑\,|\,白} \neq 32\ \boxed{黑} + 30\ \boxed{白}$$

更一般地，可以将 $m\times n$ 棋盘上的方格交替涂成黑色和白色，切除一些方格，得到一块被切过的棋盘。这块被切过的棋盘什么时候能有一个完美覆盖？为使完美覆盖存在，这块被切过的棋盘必须具有相等的黑方格数和白方格数。但是，这个条件却不是充分的，图 1-1 中的例子指出了这一点。

白	×	白	黑	白
×	白	黑	×	黑
白	黑	×	黑	白
黑	白	黑	白	黑

图 1-1

因此，我们要问：一块被切过的棋盘具有完美覆盖的必要和充分条件是什么？我们将在第 9 章讨论这个问题并将应用二分图中的匹配理论得到完全的解决方案。这个问题存在一个实际的公式表示，但它是以指派申请人去做他们有资格胜任的工作的形式给出的。

对于 $m\times n$ 棋盘被多米诺牌完美覆盖的问题，还存在另外一种一般化的方法。设 b 是一个正整数。我们用由 b 个 1×1 的方格并排连接成的 $1\times b$ 的方格条来代替多米诺牌。我们称这些方格条为 b-牌（b-omino）。因此，一张 b 牌可以盖住一行上或是一列上的 b 个连续的方格。图 1-2 画出了一张 5-牌。一张 2-牌就是上面提到的普通的多米诺牌。1-牌叫做单牌（monomino）。

$m\times n$ 棋盘被 b-牌的一个完美覆盖是 b-牌在棋盘上的这样一个排列，使得盘上没有两张牌重叠，每一条 b-牌盖住盘上的 b 个方格，并且盘上的所有方格都被盖住。那么，何时 $m\times n$ 棋盘将具有一个 b-牌的完美覆盖？既然盘上的每个方格恰被一条 b-牌覆盖，于是，要想使覆盖成为完美覆盖，b 就必须是 mn 的一个因子。

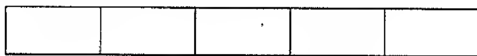


图 1-2 一张 5-牌

的确，完美覆盖存在的一个充分条件就是：b 是 m 的一个因子或 b 是 n 的一个因子。因为，如果 b 是 m 的一个因子，我们就可对 n 列的每一列用 m/b 个 b-牌铺盖并进而完成对 $m\times n$ 棋盘的完美覆盖，而如果 b 是 n 的一个因子，我们也可对 m 行的每一行用 n/b 个 b-牌铺盖，从而完成对该棋盘的完美覆盖。这样的充分条件是否也是完美覆盖存在的必要条件呢？现在设 b 是素数且存在 $m\times n$ 棋盘被 b-牌的完美覆盖。于是，b 是 mn 的因子，且由素数基本性质可知 b 或者是 m 的因子，或者是 n 的因子。我们断言，至少在 b 是素数的情况下，

一块 $m \times n$ 棋盘被 b-牌完美覆盖当且仅当 b 是 m 的因子，或者 b 是 n 的因子。

当 b 不是素数时，我们要用不同的方式讨论。设我们有对 $m \times n$ 棋盘的 b-牌完美覆盖。此时我们证明，m 和 n 分别被 b 除所得余数至少有一个是零。设用 b 除 m 和 n 分别得到商 p 和 q 以及余数 r 和 s。

$$m = pb + r, \quad 其中\ 0 \leqslant r \leqslant b-1$$
$$n = qb + s, \quad 其中\ 0 \leqslant s \leqslant b-1$$

如果 $r=0$，则 b 是 m 的因子。如果 $s=0$，则 b 是 n 因子。我们不妨设 $r \leqslant s$，因为如果有必要，我们可将棋盘的行列互换。下面我们要证 $r=0$。

现在我们把在讨论用多米诺牌（$b=2$）覆盖国际象棋盘时将棋盘方格交替涂成黑白色的情况推广成涂成 b 种颜色。把 b 种颜色标成 1，2，…，b。我们用图 1-3 所示的方式将 $b \times b$ 棋盘涂色，并用这种方法对 $m=10$，$n=11$，$b=4$ 的情况以图 1-4 所示的方式拓展到 $m \times n$ 棋盘的涂色。

1	2	3	…	$b-1$	b
b	1	2	…	$b-2$	$b-1$
$b-1$	b	1	…	$b-3$	$b-2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
2	3	4	…	b	1

图 1-3　$b \times b$ 棋盘用 b 种颜色涂色

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

图 1-4　将 10×11 棋盘涂成 4 种颜色

完美覆盖中的每张 b-牌盖住 b 个方块且每个方块各占一种颜色。因此，盘上每种颜色的方块数目必然是相同的。我们把棋盘分为三部分：上面 pb 行 n 列部分，左下方 r 行 qb 列部分，以及右下方 r 行 s 列部分（对于图 1-4 的 10×11 棋盘，上面是 8×11 的部分，左下方是 2×8 的部分，而右下方是 2×3 的部分）。上面部分的每一列中各种颜色均出现 p 次，故各种颜色在盘上总共出现 pn 次。盘的左下部分每行各种颜色均出现 q 次，故各种颜色在盘上总共出现 rq 次。既然每种颜色在整个棋盘上出现的次数都是相同的，那么，棋盘的右下方 r 行 s 列部分每种颜色出现的次数也必然是相同的。

右下方 $r \times s$ 部分中的颜色 1（从而每种颜色）究竟出现多少次呢？由于已经假设 $r \leqslant s$，我们的涂色特点使得颜色 1 在右下方 $r \times s$ 部分的每一行出现一次从而在这 $r \times s$ 部分出现 r 次。现在让我们计算这 $r \times s$ 部分中方块的数目。一方面，它有 rs 个方块；另一方面，b 种

颜色中的每一种颜色有 r 个方块从而共有 rb 个方块。于是，$rs=rb$。如果 $r\neq 0$，则两边消去 r 得到 $s=b$，这与 $s\leqslant b-1$ 矛盾。因此，正如所料，$r=0$。我们总结如下：

一张 m 行 n 列棋盘有一个 b-牌的完美覆盖，当且仅当 b 是 m 的一个因子或者 b 是 n 的一个因子。

上述结论的一个惊人的改述如下。如果完美覆盖中所有的 b-牌都是水平摆放或者所有的 b-牌都是垂直摆放，则称其为平凡的。于是，一张 m 行 n 列棋盘有一个 b-牌完美覆盖，当且仅当它是一个平凡的完美覆盖。应当指出，这并不意味着只有完美覆盖才是平凡覆盖。但它确实意味着，如果一个完美覆盖是可能的，那么一个平凡的完美覆盖也是可能的。

1.2 例：切割立方体

考虑一个边长 3 英尺的立方体木块。我们希望把它切割成 27 个边长 1 英尺的小立方体。完成这项工作所需切割的最少次数是多少？一种方法是依序切割 6 次，每个方向上切割 2 次，并在切割时保持该立方体形状不变，如图 1-5 所示。可是，如果在每次切割后重新排放所切得的各块，则是否能用更少的切割次数完成这项工作呢？在图 1-5 中也给出了这样一个例子，其中的第二刀比在第一刀后不重新排放所切得的切块要多。因此要切的木头块数以及木头块的排放方式数随着切割的进行而增加，这似乎是一个分析起来困难的问题。

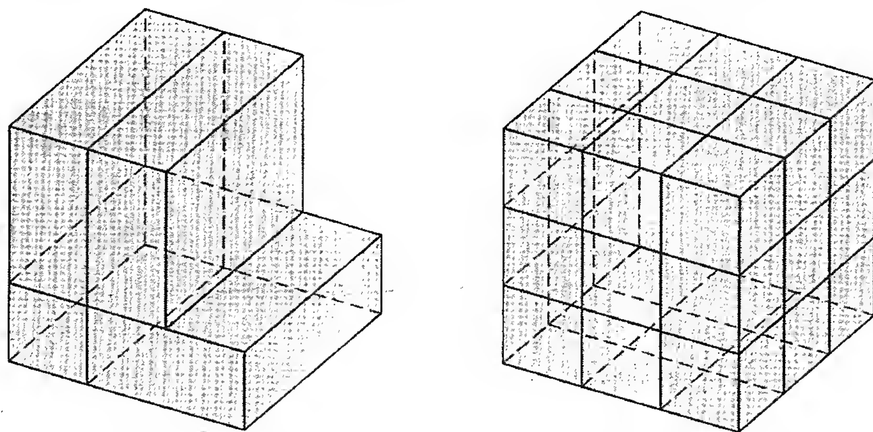


图 1-5

让我们换一种方式来看一看这个问题。这 27 个小立方体除去中间的一块以外其余各块都至少有一面是原来的大立方体表面的一部分。中间的这个立方体的每个侧面都是通过切割形成的。既然它有 6 个侧面，那就必须切割 6 次才能形成。因此，至少需要 6 次切割，而每次重新排放再切不会再少于 6 次。有精力的学生可以尝试一些不同的切割方式，看一看哪些方式只用 6 次能够切成 27 个小立方体。

另外一个结合 1.1 节的例子和上述切割立方体特点的例子如下。考察一块 4×4 棋盘，它有一个 8 张多米诺牌的完美覆盖。证明总能够把棋盘横向或者纵向切成非空的两块且不使这些多米诺牌被切断。切割的水平或竖直的直线叫做完美覆盖的断层线（fault-line）。设存在对于 4 行 4 列棋盘的一个完美覆盖，使得能将棋盘切割成非空两部分的位于盘上的三条横线和三条竖线都不是断层线。令 x_1，x_2，x_3 分别是被这三条横线所切到的多米诺牌数（见图 1-6）因为不存在断层线，故 x_1，x_2，x_3 中的每一个都是正数。一张横向放

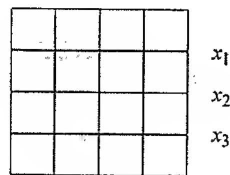


图 1-6

置的多米诺牌盖住一行上的两个方格，而一张纵向放置的多米诺牌则盖住两行上各一个方格。从这些事实我们成功地得出结论：x_1 是偶数，x_2 是偶数，x_3 也是偶数。因此

$$x_1+x_2+x_3\geqslant 2+2+2=6$$

并且在这个完美覆盖中至少存在 6 张纵向放置的多米诺牌。这就不难以一种简单的方式得出结论：盘上至少存在 6 张纵向多米诺牌。但 12>8，所以这是不可能的。因此，不可能存在用这样的多米诺牌对一个 4×4 棋盘的完美覆盖而不产生断层线。

1.3　例：幻方

*幻方*是最古老和最流行的数学游戏之一。一个 n 阶幻方是由整数 1，2，3，…，n^2 按下述方式组成的 $n\times n$ 方阵：该方阵每行上的整数的和、每列上的整数的和以及两条对角线中每条对角线上的整数的和都等于同一个数 s。这个整数 s 就叫做该幻方的*幻和*。下面是 3 阶和 4 阶幻方的两个例子：

$$\begin{bmatrix}8 & 1 & 6\\3 & 5 & 7\\4 & 9 & 2\end{bmatrix}\quad 和\quad \begin{bmatrix}16 & 3 & 2 & 13\\5 & 10 & 11 & 8\\9 & 6 & 7 & 12\\4 & 15 & 14 & 1\end{bmatrix}\tag{1-1}$$

这两个幻方的幻和分别是 15 和 34。在中世纪时期曾存在与幻方相关的玄想；人们将幻方佩戴身上用来辟邪。本杰明·富兰克林就是一个幻方迷，他的论文中包含很多有趣的例子。

一个 n 阶幻方中的所有整数的和为

$$1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

这里用到了算术级数的求和公式（见 7.1 节）。由于一个 n 阶幻方共有 n 行，每一行都有一个幻和 s，因此我们得到关系 $ns=n^2(n^2+1)/2$。于是，任意两个 n 阶幻方都有相同的幻和，即

$$s=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

其组合问题就是，确定那些能够组成 n 阶幻方的 n 的值，同时找出一般的构造方法。不难验证，不可能存在 2 阶幻方（其幻和应该是 5）。但是，对于所有其他的 n，n 阶幻方能够构造出来。存在着许多构造幻方的特殊方法。这里，我们介绍 de la Loubère 在 17 世纪发现的一种构造 n 阶幻方的方法，其中 n 是奇数。首先将 1 放在最上一行的中间。其后的整数沿着自左下至右上的这条对角线按照自然顺序放置，但同时须作如下修正：

ⅰ）在到达顶行时，下一个整数要放在底行，所放位置就是把底行当作顶行上边一行时该数应该放置的位置。

ⅱ）当到达最右边的一列时，下一个整数要放在最左边的一列上，所放位置就是把最左边的一列当作最右边那列的右边的列时该数应该放置的位置。

ⅲ）当要放的位置上已经填好了整数，或上一个整数已经放在了幻方的右上角时，则当前要摆放的整数将放在紧挨上述位置的下方。

式（1-1）中的 3 阶幻方以及下面的 5 阶幻方都是用 de la Loubère 的方法构造的：

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2)$$

构造偶数阶幻方的不同于式（1-2）和其他构造奇数阶幻方的方法，它们可在 Rouse Ball㊀的书中找到。

幻方在 3 维情形下的推广也已经被研究。n 阶*幻方体*（magic cube）是以下述方式由整数 1，2，…，n^3 构造成的一个 $n\times n\times n$ 的立方体阵列，其在下述每一条直线上的 n 个元素的和 s 都是相同的：

ⅰ）平行于立方体一条边的直线。

ⅱ）每个截面上的两条对角线。

ⅲ）四条空间对角线。

数 s 叫做幻方体的*幻和*且其值为 $(n^4+n)/2$。不难证明，不存在 2 阶幻方体，我们把它留作练习。可以证明，也不存在 3 阶幻方体。

设存在 3 阶幻方体。该幻方体的幻和就应该是 42。考虑其任一个 3×3 横截面

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

其上元素已如所示。由于该正方体是幻方，故

$$a+y+f=42$$
$$b+y+e=42$$
$$c+y+d=42$$
$$a+b+c=42$$
$$d+e+f=42$$

将前三个方程相加并减去后两个方程，我们得到 $3y=42$，从而 $y=14$。但是，y 是位于横截面的中心的，于是，就有 7 个横截面，它们的中心位置不同但又都必须是 y 值 14。可是 y 值 14 只能占据一个位置，因此我们断言：不存在 3 阶幻方体。证明不存在 4 阶幻方体要困难得多。一个 8 阶的幻方体在 Gardner 的一篇文章中给出㊁。

本书将不对幻方进行进一步研究。

1.4 例：四色问题

考虑一张平面地图或在一个球面上的地图，地图上的国家都是连通的区域㊂。为了能够很快地区分出国家来，需要对这些国家着色，以使得具有共同边界的国家被涂成不同的颜色

㊀ W.W.Rouse Ball：*Mathematical Recreations and Essays*；revised by H.S.M.Coxeter. Macmillan，New York（1962）193-221。

㊁ M.Gardner：Mathematical Games，*Scientific American*，January（1976），118-123。

㊂ 因此，密执安州就不能当作这种地图上的国家，除非人们认为密执安的上下两个半岛被 Mackinac 海峡大桥所连通。肯塔基州也不能，因为 Fulton 县的最西边完全被密苏里州和田纳西州所包围。

(角点处不算作共同边界)。能够保证如此着色的每一张地图所需最少的颜色数是多少？直到不久前，这还曾是数学中著名的尚未解决的问题之一。由于该问题叙述起来简单，理解起来又容易，因此它吸引着众多的非专业人员。除去著名的三等分已知角问题外，四色问题可能比任何其他问题都会激发更多的业余数学爱好者的兴趣。它大约在1850年由Francis Guthrie首先提出，那时他还仅是名研究生。四色问题也刺激了大量的数学研究。一些地图需要4种颜色。图1-7中的地图就是一个例子。既然这个地图的四个国家中每两国都有一条共同的边界，那么很清楚，对该地图着色必须用4种颜色。1890年Heawood[㊀]证明了用5种颜色对任何地图着色都是足够的。证明下面的问题也不是非常困难的，即：不可能有这样的平面地图，图上有5个国家，其中的每两个国家都有一条共同的边界。这样的地图假如存在，那就需要5种颜色。但是，没有5个国家其中每两国都有一条共同边界并不意味着四种颜色就足够了。也许某张平面地图因为其他一些更加微妙的原因而需要5种颜色。

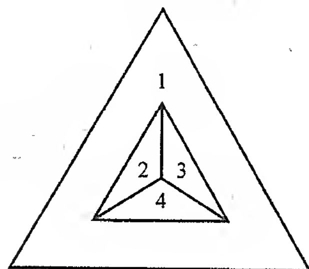


图　1-7

在1976年，Appel与Haken[㊁]宣称他们已经证明了任意平面地图都能够用4种颜色着色。他们的证明需要计算机计算1 200小时，100亿个分离的逻辑判定！他们的证明的完整描述在他们的书[㊂]中。最近，Appel-Haken证明被N.Robertson、D.P.Sanders、P.D.Seymour和R.Thomas[㊃]简化，不过简化了的证明仍然需要大量的计算机检验。

1.5　例：36军官问题

设有分别来自6个军团共有6种不同军衔的36名军官，他们能否排成6×6（6行6列）的编队使得每行每列都有各种军衔的军官1名，并且每行和每列上的不同军衔的6名军官还分别来自不同的军团？这个问题于18世纪由瑞士数学家欧拉（L.Euler）作为一个数学游戏提出，它对统计学产生重要的影响，特别是在实验设计方面（见第10章）。一个军官可由一个序偶(i, j)来表示，其中i表示该军官的军衔（$i=1, 2, \cdots, 6$），而j表示他所在的军团（$j=1, 2, \cdots, 6$）。于是，这个问题是问：

36个序偶(i, j)（$i=1, 2, \cdots, 6$; $j=1, 2, \cdots, 6$）能否排成6×6阵列，使得在每行和每列，这6个整数1，2，…，6都能以某种顺序出现在序偶第一个元素的位置上，并以某种顺序出现在序偶第二个元素的位置上？

这样的阵列可以分裂成两个6×6的阵列，一个对应序偶的第一个位置（军衔阵列），而另一个则对应序偶的第二个位置（军团阵列）。因此，该问题又可以叙述成：

是否存在这样的两个6×6矩阵，其元素取自1，2，…，6使得

i）整数1，2，…，6以某种顺序出现在矩阵的每一行和每一列；

ii）当这两个矩阵并置（juxtapose）时，所有的36个序偶(i, j)（$i=1, 2, \cdots, 6$;

㊀ P.J.Heawood: Map-colour theorems, *Quarterly J.Mathematics*, Oxford ser., 24 (1890), 332-338。

㊁ K.Appel and W.Haken: Every planar map is four colorable, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82 (1976), 711-712。

㊂ K.Appel and W.Haken: *Every planar map is four colorable*, American Math. Society, Providence (1989)。

㊃ N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas: The four-colour theorem, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997), 2-44。

$j=1, 2, \cdots, 6$）全部出现？

为把上述问题具体化，我们设有来自 3 个军团共有 3 种军衔的 9 名军官。此时，问题的一个解为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(3,2)&(1,3)&(2,1)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\end{bmatrix} \tag{1-3}$$

军衔矩阵　　军团矩阵　　并置矩阵

上述的军衔矩阵和军团矩阵是所谓的 3 阶*拉丁方*的例子；在矩阵每行上和每列上，整数 1，2 和 3 中的每一个都出现一次。下述两个矩阵是 2 阶和 4 阶拉丁方：

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix} \tag{1-4}$$

式（1-3）中的两个 3 阶拉丁方叫做是*正交*的，因为此时存在由 $i=1, 2, 3$ 及 $j=1, 2, 3$ 生成的全部 9 个可能的序偶 (i, j)。于是，我们又可将欧拉问题改述为：

是否存在两个正交的 6 阶拉丁方？

欧拉考察了更一般的 n 阶正交拉丁方的问题。容易看出，由于除了式（1-4）给出的 2 阶拉丁方外，就只有拉丁方

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

了，而且这两个拉丁方不是正交的，因此也就不存在 2 阶正交拉丁方。欧拉指出如何构造一对 n 阶正交拉丁方，而无论 n 是奇数还是 4 的倍数。注意，这并不包括 $n=6$。在经过多次尝试的基础上，他断言不存在 6 阶正交拉丁方对，但没有证明。他猜想，不存在像 6，10，14，18，…，$4k+2$，…这样阶数的拉丁方对。通过穷举法，Tarry[㊀]在 1901 年证明了欧拉猜想，对于 $n=6$ 是成立的。大约在 1960 年前后，三位数理统计学家 R.C.Bose、E.T.Parker和 S.S.Shrikhande[㊁]成功地证明了欧拉猜想对于所有的 $n>6$ 都是不成立的。就是说，他们指出了对于每一个 $n=4k+2$，$k=2, 3, 4, \cdots$，如何构造一对 n 阶正交拉丁方，这是一个重要的成就，它使得欧拉猜想可以休矣。后面，我们将探讨如何使用叫做有限域的由有限个数组成的数系来构造正交拉丁方，以及它们是怎样被应用到实验设计中去的。

1.6 例：最短路径问题

考虑一个由道路和路口组成的系统。一人想从一个路口 A 行进到另一个路口 B。一般说来，从路口 A 到 B 存在许多通路。现在的问题是要确定一条通路，使沿此通路从 A 到 B

㊀ G.Tarry：Le problème de 36 officeurs，*Compte Rendu de l' Association Francaise pour l' Advancement de Science Naturel*，1（1900），122-123；2（1901），170-203。

㊁ R.C.Bose，E.T.Parker and S.S.Shrikhande：Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of the Euler's conjecture，*Canadian Journal of Mathematics*，12（1960），189-203。

的距离尽可能小——一条最短路径。这是组合优化问题的一个例子。解决这个问题的一种可能的方法是以某种系统的方式列出从 A 到 B 所有可能的路径(当然，沿着任何一条道路行进都没有必要多于一次，因此，从 A 到 B 的路径只存在有限多条)，计算沿每条路径的距离，然后选择一条最短的路径。但是，这并不是一种非常有效的计算方式，对于大的系统，工作量可能太大，以致在合理的时间范围内得不到问题的解。因此，现在需要的是这样一种确定最短路径的算法，它所需要的工作量随着系统规模的增加而不会增加得太快。更精确地说，算法的工作量应该不超出问题规模的一个多项式函数(相反的情况，比如指数函数)。我们将在后面描述这样的算法。这种算法实际上将找出从 A 到系统的每一个其他路口的最短路径。

找出两个路口间的最短路径问题可以抽象地叙述如下。令 X 为称做*顶点*的对象的有限集(顶点对应交叉路口以及道路的终点)，而令 E 为顶点的无序对并称之为*边*（边对应道路）的集合。于是，某些顶点对被边联结起来，而其他的顶点之间没有边联结。有序二元组（X，E）叫做*图*。图中联结顶点 x 和 y 的*途径*（walk）即顶点的这样的序列，其中的第一个顶点是 x，最后一个顶点是 y，而其中的任意两个相邻顶点由一条边联结。每条边对应一个非负实数——该边的长。联结途径的相邻顶点的边的长的和称做该*途径的长*。给定两个顶点 x 和 y，最短路径问题就是找出从 x 到 y 的一条具有最小长的途径。图 1-8 所描述的图中有 6 个顶点和 10 条边。标在边上的数表示相应的边的长。联结 x 和 y 的一条途径是 x，a，b，d，y，其长为 4。另一条途径是 x，b，d，y，其长为 3。不难看出，后者给出了联结 x 和 y 的最短路径。

图是组合学中已经研究而且还将继续广泛研究的离散结构的一个例子。图的概念的普遍性使得它在下述不同的领域取得广泛的应用，如心理学、社会学、化学、遗传学以及通信科学。因此，可以让一个图的顶点对应人，如果两人互不信任那么就用一条边将它们联结起来；也可让顶点代表原子，边则表示原子间的化学键。你也许能够设想其他的方法使图模拟一些现象。图的某些重要的概念和性质将在第 9、11 和 12 章研究。

1.7 例：Nim 取子游戏

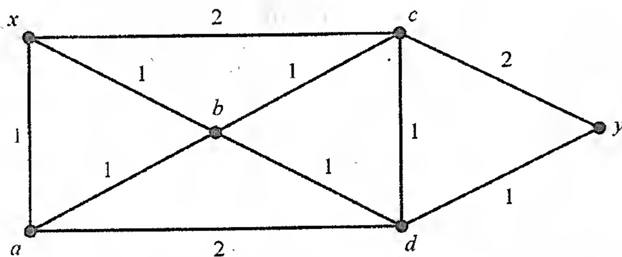


图 1-8

我们通过追溯娱乐数学中的组合数学起源来结束本章，考察古代的 Nim 取子游戏[⊖]。游戏的解依赖于*奇偶性*，它是解决组合数学概念的一个重要问题。当我们考察棋盘的完美覆盖时指出，为使一张棋盘能有一个用多米诺牌产生的完美覆盖，这张棋盘就必须要有偶数个方格，此时我们用到了一个简单的奇偶性结论。

Nim 取子游戏是由两个人面对若干堆硬币（或石子，或豆粒，或…）进行的游戏。设有 $k \geq 1$ 堆硬币，各堆分别含有 n_1，n_2，…，n_k 枚硬币。游戏的目的就是选取最后剩下的硬币。游戏法则如下：

ⅰ）游戏人交替进行游戏（我们称第一个取子者为游戏人Ⅰ，称第二个为游戏人Ⅱ）。

ⅱ）当轮到每个游戏人取子时，选择这些硬币堆中的一堆，并从所选的堆中取走至少

⊖ Nim 来自德语 Nimm!，意为拿取。

一枚硬币（游戏人也可以取走他所选择的堆中的全部硬币，于是留下一个空堆）。当所有的堆都变成空堆时，游戏结束。最后取子（即能够取走最后一堆中剩下的所有硬币）的游戏人，视为游戏的得胜者。

这个游戏中的变量是堆数 k 和各堆的硬币数 n_1，n_2，…，n_k。对应的组合问题是，确定游戏人Ⅰ获胜还是游戏人Ⅱ获胜[㊀]以及游戏人应该如何取子才能保证获胜（获胜策略）。

为了进一步理解 Nim 取子游戏，我们考察某些特殊情况[㊁]。如果游戏开始时只有一堆硬币，游戏人Ⅰ则通过取走所有的硬币而获胜。现在设有 2 堆且它们分别含有 n_1，n_2 枚硬币。游戏人Ⅰ能否获胜并不在于 n_1，n_2 的具体值是多少，而是取决于它们是不是相等。设 $n_1 \neq n_2$，游戏人Ⅰ从大堆中取走足够的硬币使得两堆含有相同数目的硬币留给游戏人Ⅱ去取。以后当轮到游戏人Ⅰ取子时就模仿游戏人Ⅱ来取子。于是，如果游戏人Ⅱ从一堆取走 c 枚硬币，那么游戏人Ⅰ就从另一堆也取走 c 枚硬币。这样的策略将保证游戏人Ⅰ获胜。如果 $n_1 = n_2$，游戏人Ⅱ则可通过模仿游戏人Ⅰ来取子而获胜。这样，我们就完全解决了 2-堆 Nim 取子游戏问题。一堆有 8 枚硬币而另一堆有 5 枚硬币的 2-堆 Nim 取子游戏的例子叙述如下：

$$8,\ 5 \xrightarrow{\text{I}} 5,\ 5 \xrightarrow{\text{II}} 5,\ 2 \xrightarrow{\text{I}} 2,\ 2 \xrightarrow{\text{II}} 0,\ 2 \xrightarrow{\text{I}} 0,\ 0$$

上述求解 2-堆 Nim 取子游戏的思想，即取子后使得留下 2 堆子数相等的方法，可以推广到任意 k 堆的情形。游戏人所需要的洞察力来自以 2 为基的正整数的概念。回忆一下，每个正整数 n 都可以通过反复减去不超过该数的 2 的最大幂而被表示出来。例如，为了将十进制数 57 表示成基为 2 的数，我们观察到

$$\begin{aligned}
2^5 \leqslant 57 < 2^6, &\quad 57 - 2^5 = 25 \\
2^4 \leqslant 25 < 2^5, &\quad 25 - 2^4 = 9 \\
2^3 \leqslant 9 < 2^4, &\quad 9 - 2^3 = 1 \\
2^0 \leqslant 1 < 2^1, &\quad 1 - 2^0 = 0
\end{aligned}$$

因此

$$57 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0$$

而 57 表示成基为 2 的数是

$$1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1$$

在基为 2 的数中的每位数字不是 0 就是 1。第 i 个位置上的数字对应 2^i，叫做第 i（$i \geqslant 0$）个比特[㊂]。我们可以认为每一堆硬币数由 2 的幂数的子堆组成，而 2 则是该数的基。于是，53 枚硬币组成的堆则由大小为 2^5，2^4，2^2 和 2^0 的各子堆组成。在 2-堆 Nim 取子游戏中，各种大小的子堆的总数只能是 0，1 或 2。具有特定大小的子堆恰好存在一个当且仅当游戏中的两堆具有不同的大小。换句话说，各种大小的子堆的总堆数是偶数当且仅当游戏中的 2-堆具有相同的大小，也就是说，游戏人Ⅱ可以取胜。

现在考虑各堆大小分别为 n_1，n_2，…，n_k 的一般的 Nim 取子游戏。将每一个数 n_i 表

㊀ 游戏是明智地进行的。

㊁ 这是一般需要遵守的重要原则：为了深入理解和强化直觉力，往往考虑小的或特殊的情形。然后，为了一般地解决问题再努力扩展你的想法。

㊂ 术语比特（bit）是 binary digit 的简称。

示成基为 2 的数：

$$n_1 = a_s \cdots a_1 a_0$$
$$n_2 = b_s \cdots b_1 b_0$$
$$\cdots$$
$$n_k = e_s \cdots e_1 e_0$$

(我们通过在前面补 0 的方法可以假设，所有各堆的大小都是具有相同位数的以 2 为基的数。）如果每一种大小的子堆的个数都是偶数，我们就称 Nim 取子游戏是平衡的。因此，Nim 取子游戏是平衡的，当且仅当

$$a_s + b_s + \cdots + e_s \text{ 是偶数}$$
$$\vdots$$
$$a_i + b_i + \cdots + e_i \text{ 是偶数}$$
$$\vdots$$
$$a_0 + b_0 + \cdots + e_0 \text{ 是偶数}$$

一个 Nim 取子游戏如果不是平衡的，就称为非平衡的。如果和数 $a_i + b_i + \cdots + e_i$ 是偶数，我们就说第 i 位是平衡的，否则就称为非平衡的。因此，一个平衡的取子游戏就是其中的所有的位都是平衡的游戏，而非平衡取子游戏则是至少存在一个非平衡位的游戏。

于是，我们有

游戏人Ⅰ能够在非平衡 Nim 取子游戏中取胜，而游戏人Ⅱ能够在平衡 Nim 取子游戏中取胜。

为了理解上述结论，我们推广在 2-堆 Nim 取子游戏中所用的策略。设 Nim 取子游戏是非平衡的。令最大的非平衡位为第 j 位。于是，游戏人Ⅰ用这样一种方法取子，使得留给游戏人Ⅱ的游戏是平衡的取子游戏。具体地说，游戏人Ⅰ选择第 j 位是 1 的一个堆，然后从所选的堆中取走一些硬币使得游戏成为平衡的游戏（见练习题 33)。此后，无论游戏人Ⅱ怎么做，他留给游戏人Ⅰ的都将是非平衡的游戏，而游戏人Ⅰ再次将游戏变成平衡状态。如此继续进行下去，则游戏人Ⅰ必然取胜。如果取子游戏从平衡状态开始，那么游戏人Ⅰ第一次取子后必将形成非平衡游戏，这时，只要游戏人Ⅱ取子，他就采取使游戏平衡的策略。

例如，考虑 4-堆 Nim 取子游戏，其中各堆大小分别为 7，9，12 和 15 枚硬币。这些堆的大小写成基为 2 的数分别是 0111，1001，1100 和 1111。用 2 的幂的子堆表示，我们有

	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
大小为 7 的堆	0	1	1	1
大小为 9 的堆	1	0	0	1
大小为 12 的堆	1	1	0	0
大小为 15 的堆	1	1	1	1

这局游戏是非平衡的，其中第 3 号位、第 2 号位和第 0 号位都是非平衡的。游戏人Ⅰ可以选择大小为 12 的堆并取走 11 枚硬币，只剩下 1 枚硬币。由于基为 2 的数 1 是 0001，取子游戏变为平衡状态。同样的道理，游戏人Ⅰ也可以选择大小为 9 的堆并取走 5 枚硬币而剩下 4 枚

硬币，或者，游戏人 I 还能选择大小为 15 的堆并取走 13 枚硬币而留下 2 枚硬币。

1.8　练习题

1. 证明一张 m 行 n 列棋盘被多米诺牌完美覆盖当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数。
2. 考察一张 m 行 n 列棋盘，其中 m 和 n 都是奇数。为了固定记号，设左上角的方格被涂成白色。证明，如果切除棋盘上的任意一个白色方格，那么剩下的棋盘可被多米诺牌完美覆盖。
3. 设想一个监狱由 64 个囚室组成，这些囚室排列得恰如一张 8 行 8 列的棋盘。所有相邻的囚室之间都有门相通。一个被囚在某个角上囚室中的犯人被告知，如果他能够恰好通过每个囚室一次而到达对角位置上的囚室，他就将被释放。该犯人能否得到自由？
4. ⅰ）令 $f(n)$ 为用多米诺牌覆盖 2 行 n 列棋盘而形成的不同的完美覆盖的个数。写出 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$ 和 $f(5)$ 的值。试找出（并验证）计数函数 f 所满足的一个简单的关系。用这个关系计算 $f(12)$。
   *ⅱ）令 $g(n)$ 为用多米诺牌覆盖 3 行 n 列棋盘而形成的不同的完美覆盖的个数。求出 $g(1)$，$g(2)$，…，$g(6)$ 的值。
5. 找出用多米诺牌覆盖 3 行 4 列棋盘而形成的不同的完美覆盖的个数。
6. 指出如何用恰好 6 次将一个边长为 3 英尺的立方体切割成 27 个边长为 1 英尺的小立方体，但是，在每两次切割之间要对切块进行非平凡的重新摆放。
7. 考虑下述棋盘问题的 3 维情形。定义一个 3 维多米诺牌为这样一个几何图形，该图形是由两个边长为 1 个单位的立方体沿表面联结起来而形成的一个长方体。证明能够由 3 维多米诺牌构成边长为 n 个单位的立方体当且仅当 n 是偶数。如果 n 是奇数，那么能否构造这样一个边长为 n 个单位的立方体，在其中心有一个边长为 1 个单位的立方形空洞？（提示：将边长为 n 个单位的立方体看成是由边长为 1 个单位的 n^3 立方体组成的。用黑白两色交替对这些立方体着色。）
8. 令 a 和 b 是两个正整数，a 是 b 的因子。证明，一张 $m\times n$ 棋盘能被 $a\times b$ 牌片完美覆盖当且仅当 a 是 m 及 n 的因子并且 b 是 m 或 n 的因子（提示：将 $a\times b$ 牌片分成 $1\times b$ 牌片）。
9. 利用练习题 8 论证，当 a 是 b 的因子时，一张 $m\times n$ 棋盘能被 $a\times b$ 牌片完美覆盖当且仅当它有一个平凡的完美覆盖，在这个平凡的完美覆盖中，所有的牌片都朝向一个方向。
10. 证明当 a 不是 b 的因子时，练习题 8 和练习题 9 的结论未必成立。
11. 验证不存在 2 阶幻方。
12. 用 de la Loubère 方法构造一个 7 阶幻方。
13. 用 de la Loubère 方法构造一个 9 阶幻方。
14. 构造一个 6 阶幻方。
15. 证明 3 阶幻方必然在中心位置有一个 5。试推导：恰好存在 8 个 3 阶幻方。
16. 能将下列不完全的方形阵列填成一个 4 阶幻方吗？

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

17．证明，用 n^2+1-a 替换 n 阶幻方中每一个整数 a 的结果是 n 阶幻方。

18．令 n 是一个能被 4 整除的正整数，比如 $n=4m$。考虑 $n\times n$ 方阵的构造。

　ⅰ）依序从左至右、从第一行到第 n 行将 1，2，…，n^2 填入该方阵。

　ⅱ）将所得方阵分成 m^2 个 4×4 小方阵。将每个这样的 4×4 方阵的两条对角线上的每一个数 a 用其“补” n^2+1-a 替换。

　验证，当 $n=4$ 或 $n=8$ 时这种构造产生一个 n 阶幻方。（对于每一个能被 4 整除的 n 都产生一个幻方。）

19．证明不存在 2 阶幻方体。

*20．证明不存在 4 阶幻方体。

21．证明，下列 10 个国家 {1，2，…，10} 的地图（图 1-9 所示）能够用 3 种但不少于 3 种颜色着色。如果所用颜色是红、白和蓝 3 色，确定不同的着色方法数。

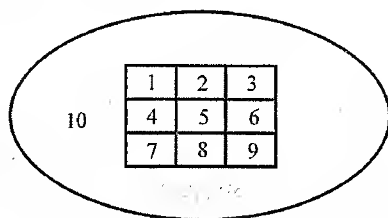


图　1-9

22．ⅰ）是否存在 2 阶幻 6 边形（magic hexagon of order 2）——就是说，能否在下面的六边形阵型中放置 1，2，…，7 七个数使得所有 9 条“线”的和（即由通过对边中点的直线所穿过的六边形盒子内的数的和）都是相同的？

　*ⅱ）构造一个 3 阶幻六边形，即在六边形阵型中（见图 1-10）放置 1，2，…，19 十九个数（一条边上 3 个整数），使得所有 15 条“线”上的和都是相同的（即 38）。

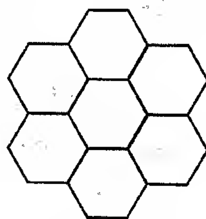


图　1-10

23．构造一对 4 阶正交拉丁方。

24．构造 5 阶和 6 阶拉丁方。

25．找出构造 n 阶拉丁方的一般的方法。

26．一张 6×6 棋盘被 18 张多米诺牌完美覆盖。证明，能够将棋盘横向或者纵向切割成非空的两部分而不伤及多米诺牌；即证明必然存在一条断层线。

27．构造一个用多米诺牌对 8×8 棋盘形成的没有断层线的完美覆盖。

28．在图 1-11 中描述的道路和路口系统（即图论中的图）中，确定从 A 到 B 所有的最短路径。道路上的这些数表示以某种度量单位测量出的道路的长度。

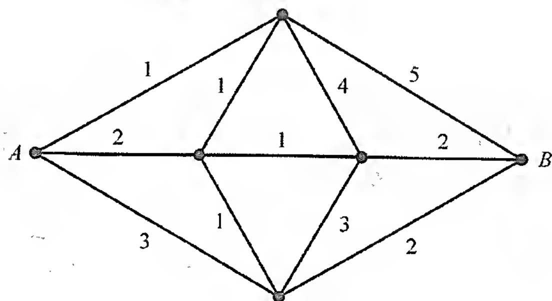


图　1-11

29．考虑 3-堆 Nim 取子游戏，各堆大小分别为 1，2 和 4。证明该局游戏是平衡的并确定游戏人Ⅰ第一次取子的方式。

30．各堆大小分别为 22，19，14 和 11 的 4-堆 Nim 取子游戏是平衡的还是非平衡的？游戏人Ⅰ的第一次取子方式是从大小为 19 的堆中取走 6 枚硬币，游戏人Ⅱ的第一次取子方式是什么？

31．考虑各堆大小分别为 10，20，30，40 和 50 的 5-堆 Nim 取子游戏，这局游戏是平衡的吗？确定游戏人Ⅰ第一次取子的方式。

32. 证明，在具有奇数枚硬币的堆的数目是奇数的 Nim 取子游戏中游戏人Ⅰ总能够取胜。
33. 证明，在最大非平衡位为第 j 位的非平衡 Nim 取子游戏中，游戏人Ⅰ总能够通过从其基为 2 的数字中在第 j 位是 1 的任意一堆中取走一些硬币，使得游戏达到平衡。
34. 假设我们改变 Nim 游戏目标，使得最后取走硬币者判为输（misère 变形）。证明下述策略为取胜策略：游戏仍像通常的 Nim 取子游戏那样，但朝着只剩下一堆而且该堆只有一枚硬币的目标进行。于是，要么取走一堆中的全部硬币，要么将一堆中的硬币只留下一枚而将其余硬币全部取走，以使得取走之后全部游戏中只含有一枚硬币的堆的数目为奇数。
35. 一局游戏在两个游戏人之间如下交替进行：游戏从一空堆开始。当轮到一个游戏人时，他可以往该堆中加进 1，2，3 或 4 枚硬币。往堆中加进第 100 枚硬币的游戏人为得胜者。确定在这局游戏中是游戏人Ⅰ还是游戏人Ⅱ能够确保取胜。取胜的策略是什么？
36. 假设在练习题 35 中往堆中加进第 100 枚梗币的游戏人为失败者，那么谁又能取胜？如何取胜？
37. 在一次聚会中有 8 个人，他们逐对分开，分成 4 个队，每队 2 人。有多少种分法？（这是一类“非结构”覆盖问题。）
38. 如果整数 1，2，…，n 依序出现在对角线位置（1，1)，(2，2)，…，(n，n）上，则这个 n 阶拉丁方就称为幂等的；如果在位置（i，j）上的整数等于位置（j，i）上的整数，其中 $i \neq j$，则这个拉丁方就称为是对称的。不存在 2 阶对称、幂等的拉丁方，构造一个 3 阶对称、幂等的拉丁方。证明不存在对称、幂等的 4 阶拉丁方。对于一般的 n 阶拉丁方又会如何（n 为偶数)？
39. 在平面上取 $2n$ 个点的集合，其中没有三个点是共线的，然后将每一个点任意地涂成红色或蓝色。证明总能够把红点和蓝点配成对并用线段连接起来，使得没有两条线段是相交的。
40. 考虑一块 n 行 n 列的棋盘和 L 型四格拼板（4 个方格连在一起形成 L 型）。证明，如果 $n \times n$ 棋盘存在一个 L 型四格拼板的完美覆盖，那么 n 可被 4 整除。若是 $m \times n$ 棋盘又如何？

第2章 鸽巢原理

我们在本章考虑一个重要而又初等的组合学原理，它能够用来解决各种有趣的问题，常常得出一些令人惊奇的结论。这个原理有许多的名字，但最普通的名字叫*鸽巢原理*，也叫做 Dirichlet 抽屉原理，以及*鞋盒原理*[⊖]。有关于鸽巢原理的阐释，粗略地说就是如果有许多鸽子飞进不足够多的鸽子巢内，那么至少要有一个鸽巢被两个或多个鸽子占据。更精确的叙述在下面给出。

2.1 鸽巢原理：简单形式

鸽巢原理的最简单的形式如下。

定理 2.1.1 *如果 $n+1$ 个物体被放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体*。

证明：如果这 n 个盒子中的每一个都至多含有一个物体，那么物体的总数最多是 n。既然我们有 $n+1$ 个物体，于是某个盒子就必然包含至少两个物体。 □

注意，无论是鸽巢原理，还是它的证明，对于找出含有两个或更多物体的盒子都没有任何帮助。它们只是简单地断言，如果人们检查每一个盒子，那么他们会发现有的盒子里面放有多个物体。鸽巢原理只是保证这样的盒子存在。因此，无论何时鸽巢原理被用来证明一个排列或某种现象的存在性，除了考察所有可能性之外，它都不能对任何构造排列或寻找现象的例证给出任何指示。

还要注意，鸽巢原理的结论不能被推广到只存在 n 个（或更少）物体的情形。这是因为我们可以把不同的物体放到 n 个盒子的每一个中去。当然，在这些盒子当中可以这样分发物体：一个盒子放入两个物体，但对任意分发这是没有保证的。鸽巢原理只是断言，在 n 个盒子中无论如何分发 $n+1$ 个物体，总不能避免把两个物体放进同一个盒子中去。

我们可以把将物体放入盒子改为用 n 种颜色中的一种颜色对每一个物体涂色。此时，鸽巢原理断言，如果 $n+1$ 个物体用 n 中颜色涂色，那么必然有两个物体被涂成相同的颜色。

下面是两个简单的应用。

应用 1 在 13 个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份里。 □

应用 2 设有 n 对已婚夫妇。为保证能够有一对夫妇被选出，至少要从这 $2n$ 个人中选出多少人？

为了在这种情形下应用鸽巢原理，考虑 n 个盒子，其中一个盒子对应一对夫妇。如果我们选择 $n+1$ 个人并把他们中的每一个人放到他们对偶所在的那个盒子中去，那么就有同一个盒子含有两个人；也就是说，我们已经选择了一对已婚夫妇。选择 n 个人使他们当中

⊖ 鞋盒这个词是误译，它来自德文 Schubfach，其原意为鸽巢或文件架（在书桌里面）。

一对夫妻也不能有的两种方法是选择所有的丈夫或选择所有的妻子。因此，$n+1$ 是保证能有一对夫妇被选中的最小的人数。 □

还存在一些与鸽巢原理相关的其他原理，有必要正式叙述如下。

- 如果将 n 个物体放入 n 个盒子并且没有一个盒子是空的，那么每个盒子恰好包含一个物体。
- 如果将 n 个物体放入 n 个盒子并且没有盒子被放入多于一个的物体，那么每个盒子里有一个物体。

在应用2里，如果我们这样选择 n 个人，从每一对夫妻中至少选一人，那么我们就从每对夫妻中恰好选出了一个人。同样，如果我们选择 n 个人的方法是从每一对夫妻中至多选一人，那么我们就从每对夫妻中至少（从而也恰好）选出了一个人。

现在，把所阐明的这三个原理更抽象地表述为：

令 X 和 Y 是两个有限集，并令 f：$X\rightarrow Y$ 是一个从 X 到 Y 的函数。

- 如果 X 的元素多于 Y 的元素，那么 f 就不是一对一的。
- 如果 X 和 Y 含有相同个数的元素，并且 f 是映上（onto）的，那么 f 就是一对一的。
- 如果 X 和 Y 含有相同个数的元素，并且 f 是一对一的，那么 f 就是映上的。 □

应用3 给定 m 个整数 a_1，a_2，…，a_m，存在整数 k 和 l，$0\leqslant k<l\leqslant m$，使得 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 能够被 m 整除。通俗地说，就是在序列 a_1，a_2，…，a_m 中存在连续个 a，这些 a 的和能被 m 整除。

为了深入这个问题，考虑 m 个和

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m$$

如果这些和当中的任意一个可被 m 整除，那么结论就成立。因此，我们可以设这些和中的每一个除以 m 都有一个非零余数，余数等于 1，2，…，$m-1$。由于存在 m 个和而只有 $m-1$ 个余数，则必然有两个和数除以 m 有相同的余数。因此，存在整数 k 和 l，$k<l$，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 和 $a_1+a_2+\cdots+a_l$ 除以 m 有相同的余数 r：

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=bm+r,\qquad a_1+a_2+\cdots+a_l=cm+r$$

二式相减，我们发现 $a_{k+1}+\cdots+a_l=(c-b)m$，从而 $a_{k+1}+\cdots+a_l$ 能够被 m 整除。

为了解释上面的论断[⊖]，令 $m=7$ 并令整数为 2，4，6，3，5，5，6。计算上面的和得到 2，6，12，15，20，25，31，其中当被 7 除时余数分别为 2，6，5，1，6，4，3。有两个等于 6 的余数，这意味着结论：$6+3+5=14$ 可被 7 整除。 □

应用4 一位国际象棋大师有 11 周的时间备战一场锦标赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过于疲劳他还决定在每周不能下棋超过 12 盘。证明存在连续若干天，期间这位大师恰好下了 21 盘棋。

令 a_1 是在第一天所下的盘数，a_2 是在第一天和第二天所下的总盘数，而 a_3 是在第一天、第二天和第三天所下的总盘数，等等。由于每天至少要下一盘棋，故数值序列 a_1，

⊖ 这个论断实际上包含一个好的算法，它的有效性依赖于鸽巢原理，为了找到那些连续的 a，该算法比考察连续个 a 所有的和要更有效。

a_2，…，a_{77}是一个严格递增的序列[㊀]。此外，$a_1 \geqslant 1$，而且由于每周下棋最多是 12 盘，$a_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$[㊁]。因此，我们有

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leqslant 132$$

序列 a_1+21，a_2+21，…，$a_{77}+21$ 也是一个严格递增序列：

$$22 \leqslant a_1+21 < a_2+21 < \cdots < a_{77}+21 \leqslant 132+21=153$$

于是，这 154 个数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{77},\ a_1+21,\ a_2+21,\ \cdots,\ a_{77}+21$$

中的每一个都是 1 到 153 之间的一个整数。由此可知，它们中间有两个是相等的。既然 a_1，a_2，…，a_{77}中没有相等的数，并且 a_1+21，a_2+21，…，$a_{77}+21$ 中也没有相等的数，因此必然存在一个 i 和一个 j 使得 $a_i=a_j+21$。从而，这位国际象棋大师在第 $j+1$，$j+2$，…，i 天总共下了 21 盘棋。 □

应用 5　从整数 1，2，…，200 中我们选择 101 个整数。证明，在所选的这些整数之间存在两个这样的整数，其中的一个可被另一个整除。

通过分解出尽可能多的 2 因子，我们看到，任一整数都可以写成 $2^k \times a$ 的形式，其中 $k \geqslant 0$并且 a 是奇数。对于 1 和 200 之间的一个整数，a 是 100 个数 1，3，5，…，199 中的一个。因此，在所选的 101 个整数中存在两个整数，当写成上述形式时这两个数具有相同的 a 值。令这两个数是 $2^r \times a$ 和 $2^s \times a$。如果 $r<s$，那么第二个数就能被第一个数整除。如果 $r>s$，那么第一个数就能被第二个数整除。 □

注意，应用 5 在这种意义下是最好的可能：从 1，2，…，200 中可以选择这样的 100 个数，其中没有一个能被另一个整除，比如，101，102，…，199，200 就是这样的整数。

我们以另外的、来自数论中的应用来结束本段。首先我们回忆，如果两个正整数 m 和 n 的最大公约数[㊂]是 1，我们就称它们为*互素*。于是，12 和 35 互素，而 12 和 15 则否，因为 3 是 12 和 15 的公因子。

应用 6（中国剩余定理）　令 m 和 n 为二互素的正整数，并令 a 和 b 为两整数，且 $0 \leqslant a \leqslant m-1$ 以及 $0 \leqslant b \leqslant n-1$。于是，存在一个正整数 x，使得 x 除以 m 的余数为 a，并且 x 除以 n 的余数为 b；即 x 可以写成 $x=pm+a$ 的同时又可写成 $x=qn+b$ 的形式，这里，p 和 q 是两个整数。

为证明这个结论，我们考虑 n 个整数

$$a,\ m+a,\ 2m+a,\ \cdots,\ (n-1)\ m+a$$

这些整数中的每一个除以 m 都余 a。设其中的两个除以 n 有相同的余数 r。令这两个数为

㊀ 序列的每一项大于它前面的那一项。

㊁ 这是仅有的一处用到假设的地方：在这 11 周的任一周，都是最多只能下 12 盘棋。因此，该假设可被替换成假设：在 77 天内最多只能下 132 盘棋。

㊂ 也叫做最大公因子或最高公因子。

$im+a$ 和 $jm+a$，其中 $0\leqslant i<j\leqslant n-1$。因此，存在两整数 q_i 和 q_j，使得

$$im+a=q_in+r$$

及

$$jm+a=q_jn+r$$

第二个方程减去第一个方程，得到

$$(j-i)m=(q_j-q_i)n$$

上面的方程告诉我们，n 是 $(j-i)m$ 的一个因子。由于 n 与 m 没有除1之外的公因子，因此 n 是 $j-i$ 的一个因子。然而，$0\leqslant i<j\leqslant n-1$ 意味着 $0<j-i\leqslant n-1$，也就是说 n 不可能是 $j-i$ 的因子。该矛盾产生于我们的假设：n 个整数 a，$m+a$，$2m+a$，…，$(n-1)m+a$ 中有两个除以 n 会有相同的余数。因此我们断言，这 n 个数中的每一个数除以 n 都有不同的余数。根据鸽巢原理：n 个数，0，1，…，$n-1$ 中的每一个作为余数都要出现；特别是数 b 也是如此。令 p 为整数，满足 $0\leqslant p\leqslant n-1$，且使数 $x=pm+a$ 除以 n 余数为 b。则对于某个适当的 q，

$$x=qn+b$$

因此，$x=pm+a$ 且 $x=qn+b$，从而 x 具有所要求的性质。 □

一个有理数 a/b 最终可以写成十进制循环小数的结论实际上就是鸽巢原理的推论，我们将其证明留作练习。

对于进一步的应用，需要鸽巢原理的一种增强的形式。

2.2 鸽巢原理：加强形式

下列定理包含定理2.1.1作为它的特殊情形。

定理 2.2.1 令 q_1，q_2，…，q_n 为正整数。如果将

$$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$$

个物体放入 n 个盒子内，那么，或者第一个盒子至少含有 q_1 个物体，或者第二个盒子至少含有 q_2 个物体，…，或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物体。

证明：设将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体分放到 n 个盒子中。如果对于每个 $i=1$，2，…，n，第 i 个盒子含有少于 q_i 个物体，那么所有盒子中的物体总数不超过

$$(q_1-1)+(q_2-1)+\cdots+(q_n-1)=q_1+q_2+\cdots+q_n-n$$

该数比所分发的物体总数少1，因此我们断言，对于某一个 $i=1$，2，…，n，第 i 个盒子至少包含 q_i 个物体。 □

注意，能够将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n$ 个物体用下面的方法分到 n 个盒子中，对所有的 $i=1$，2，…，n，第 i 个盒子都不能含有 q_i 个或更多的物体。我们可以通过将 q_1-1 个物体放入第一个盒子，将 q_2-1 个物体放入第二个盒子等等来实现。

鸽巢原理的简单形式是由其强化形式通过使 $q_1=q_2=\cdots=q_n=2$ 得到的。由此有

$$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1=2n-n+1=n+1$$

鸽巢原理的加强形式用着色的术语表述就是：如果 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体中的每一个物体被指定用 n 种颜色中的一种着色，那么存在一个这样的 i，使得第 i 种颜色的物体至少有 q_i 个。

在初等数学中，鸽巢原理加强形式最常用于 q_1，q_2，…，q_n 都等于同一个整数 r 的特殊情况。在这种情况下，该原理叙述如下：

- 如果 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒子中，那么至少有一个盒子含有 r 个或更多的物体。
- 如果 n 个非负整数 m_1，m_2，…，m_n 的平均数大于 $r-1$：

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}>r-1$$

那么至少有一个整数大于或等于 r。

这两种叙述之间的联系可以通过取 $n(r-1)+1$ 个物体并将它们放入 n 个盒子中得到。对于 $i=1$，2，…，n，令 m_i 是第 i 个盒子中的物体个数。于是这 m 个数 m_1，m_2，…，m_n 的平均数为

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}=\frac{n(r-1)+1}{n}=(r-1)+\frac{1}{n}$$

由于这个平均数大于 $r-1$，故而有一个整数 m_i 至少是 r。换句话说，这些盒子中有一个盒子至少含有 r 个物体。

另一个平均原理是：

- 如果 n 个非负整数 m_1，m_2，…，m_n 的平均数小于 $r+1$，即

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}<r+1$$

那么其中至少有一个整数小于 $r+1$。

应用 7 一篮子水果装有苹果、香蕉和橘子。为了保证篮子内或者至少 8 个苹果或者至少 6 个香蕉或者至少 9 个橘子，则放入篮子中的水果的最小件数是多少？

由鸽巢原理的加强形式可知，无论如何选择，$8+6+9-3+1=21$ 件水果将保证篮子内的水果满足所要求的性质。但是，7 个苹果、5 个香蕉和 8 个橘子，总数 20 件水果则不满足所要求的性质。 □

另外一个平均原理是：

- 如果 n 个非负整数 m_1，m_2，…，m_n 的平均数至少等于 r，那么这 n 个整数 m_1，m_2，…，m_n 至少有一个满足 $m_i\geq r$。

应用 8 两个碟子，其中一个比另一个小，它们均被分成 200 个恒等的扇形。在大碟子中任选 100 个扇形并涂成红色；而其余的 100 个扇形则涂成蓝色。在小碟子中，每一个扇形

或者涂成红色，或者涂成蓝色，所涂红色扇形和蓝色扇形的数目没有限制。然后，将小碟子放到大碟子上面使两个碟子的中心重合。证明，能够将两个碟子的扇形对齐使得小碟子和大碟子上相同颜色重合的扇形的数目至少是 100 个。

为了分析问题，我们来考察，如果将大碟子固定，那么就存在 200 个可能的位置使得小碟子的每一个扇形含于大碟子的扇形中。我们首先数一下两个碟子重合的 200 个扇形中颜色匹配的扇形的总数，由于大碟子每种颜色的扇形都有 100 个，因此小碟子的每个扇形在颜色上匹配大碟子上的对应扇形恰好是 200 个可能位置中的 100 个。于是，在所有的位置上，颜色匹配的总数等于小碟子上的扇形数乘以 100，其结果为 20 000。因此，每一个位置上的平均颜色匹配数是 20 000/200＝100。从而，必然存在某个位置其颜色匹配数至少为 100。 □

下面我们要讨论的应用是由 Erdös 和 Szekeres 首先发现的[⊖]。

应用 9 证明每个由 n^2+1 个实数构成的序列 a_1，a_2，…，a_{n^2+1}或者含有长度为$n+1$的递增子序列，或者含有长度为 $n+1$ 的递减子序列。

我们首先澄清子序列的概念。如果 b_1，b_2，…，b_m 是一个序列，那么，b_{i_1}，b_{i_2}，…，b_{i_k}则是一个子序列，其中，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$。于是，$b_2$，$b_4$，$b_5$，$b_6$ 是 b_1，b_2，…，b_8 的子序列，但 b_2，b_6，b_5则不是。子序列 b_{i_1}，b_{i_2}，…，b_{i_k}若满足 $b_{i_1}\leqslant b_{i_2}\leqslant\cdots\leqslant b_{i_k}$则称为递增的（更恰当地说是非减的），而若满足 $b_{i_1}\geqslant b_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant b_{i_k}$则称为递减的。

现在来证明应用 9 的结论。我们假设不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列，则证明必然存在长度为 $n+1$ 的递减子序列。对于每一个 $k=1, 2, \cdots, n^2+1$，令 m_k 为最长的递增子序列的长度，该子序列从 a_k 开始。设对于每一个 $k=1, 2, \cdots, n^2+1$，有 $m_k\leqslant n$，使得不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列。由于 $m_k\geqslant 1$ 对每一个 $k=1, 2, \cdots, n^2+1$ 都成立，故而数 m_1，m_2，…，m_{n^2+1}是 1 和 n 之间的 n^2+1 个整数。由鸽巢原理的加强形式可知，数 m_1，m_2，…，m_{n^2+1}中有 $n+1$ 个是相等的。令

$$m_{k_1}=m_{k_2}=\cdots=m_{k_{n+1}}$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}\leqslant n^2+1$。设对于某个 $i=1, 2, \cdots, n$，有 $a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$。于是，由于 $k_i<k_{i+1}$，我们可做成一个从 $a_{k_{i+1}}$ 开始的最长的递增子序列并将 a_{k_i}放在前面而得到一个从a_{k_i}开始的递增子序列。但这意味着 $m_{k_i}>m_{k_{i+1}}$，因此我们断言，$a_{k_i}\geqslant a_{k_{i+1}}$。由于这对于每一个 $i=1, 2, \cdots, n$ 均成立，因此我们又有

$$a_{k_1}\geqslant a_{k_2}\geqslant\cdots\geqslant a_{k_{n+1}}$$

从而我们断言，a_{k_1}，a_{k_2}，…，$a_{k_{n+1}}$是一个长度为 $n+1$ 的递减子序列。 □

下面是应用 9 的一个有趣的实例。设 n^2+1 个人肩并肩地排成一条直线。于是，总能选出 $n+1$ 个人向前迈出一步，使得从左至右他们的身高是递增（或递减）的。只要用排队和身高的术语通读一遍应用 9 的证明，即可得到这个结论的证明。

⊖ P. Erdös and A. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica*, 2 (1935), 463-470。

2.3 Ramsey 定理

现在我们来讨论鸽巢原理的一个深刻而又重要的推广，它就是以英国逻辑学家 Frank Ramsey[⊖]的名字命名的 Ramsey 定理[⊜]。

Ramsey 定理的最流行和容易理解的例子是：

在 6 个（或更多的）人中，或者有 3 个人，他们中的每两个人都互相认识；或者有 3 个人，他们中的每两个人都彼此不认识。

证明该结果的一种方法是考察这 6 个人相识和不相识的所有不同的可能方式。这是一种冗长乏味的工作，但是，坚毅的人能够完成这项工作。然而，有一个既简单又优美的证明，它避免了对各种情形的考虑。在给出这个证明以前，先把这个结果更抽象地公式化为：

$$K_6 \to K_3, K_3 \text{（读做 } K_6 \text{ 箭指 } K_3, K_3\text{）} \qquad (2\text{-}1)$$

这是什么意思呢？首先，我们用 K_6 代表 6 个物体（例如 6 个人）和由它们配成的全部 15 对（无序的）对的集合。我们通过在平面上选出 6 个点来画出 K_6，其中没有 3 个点是共线的。然后，画出连接每一对点的连线或边（现在，这些边就代表这些点对）[⊜]。一般说来，我们用 K_n 表示 n 个物体和这些物体中所有的由每两个物体配成的对。对 K_n（$n=1, 2, 3, 4, 5$）的解释由下面的图 2-1 给出。注意，K_3 的图是一个三角形图形，我们常常把 K_3 叫做三角形。

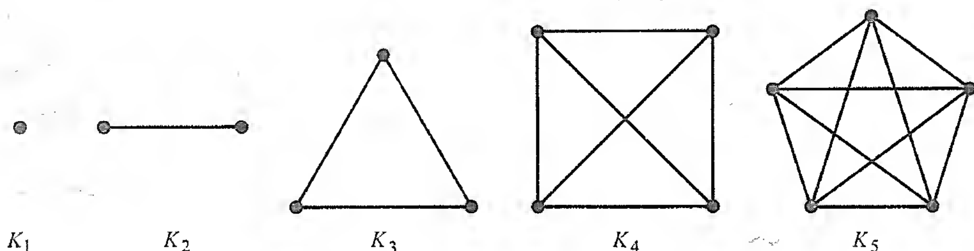


图　2-1

我们把边涂成红色表示熟人相识，涂成蓝色表示彼此不认识，由此我们可以分辨出两个人是相识还是不相识。现在，互相认识的 3 个人即为 K_3，K_3 的每条边都被涂成红色，是个红 K_3。类似地，3 个互不相识的陌生人则形成一个蓝 K_3。现在我们可以解释表达式（2-1）。

$K_6 \to K_3, K_3$ 是一个结论：无论 K_6 的边用红色和蓝色如何去涂，总有一个红 K_3（原始的 6 个点中有 3 个点，它们之间的 3 条线段均被着成红色）或蓝 K_3（原始的 6 个点中有 3 个点，它们之间的 3 条线段均被着成蓝色），简言之，总有一个单色的三角形。

为了证明 $K_6 \to K_3, K_3$，我们论述如下。设 K_6 的边已被以任一种方式涂成红色或蓝色。考虑 K_6 的任意一点 p。它接触到 5 条边。由于这 5 条边的每一条都被涂成红色或是蓝

⊖ Frank Ramsey 生于 1903 年，死于 1930 年，时年不足 27 岁。尽管他过早辞世，但是他奠定了如今称为 Ramsey 理论的基础。

⊜ 该定理的一个证明见 H.J.Ryser：*Combinatorial Mathematics*，Mathematical Association of America，Providence（1963），或 R.L.Graham，B.L.Rothschild and J.H.Spencer：*Ramsey Theory*，second edition，Wiley，New York（1990）。

⊜ 在后面各章中，K_n 叫做 n 阶完全图。

色，从加强形式的鸽巢原理可知，这5条边中或者至少有3条边涂的是红色，或者至少有3条边涂的是蓝色。我们设接触到 p 点的这5条边中有3条边是红色的（如果有3条边是蓝色的，则以下的证明类似）。令这3条红边分别将 p 点与 a、b、c 三点相连。考虑将 a、b、c 两两相连的边。如果这些边都是蓝色的，那么 a、b、c 就确定了一个蓝色的 K_3。如果它们中的一条边，比如连接 a 和 b 的边是红色的，那么 p、a、b 就确定一个红 K_3。因此，我们得到：确实或者是一个红 K_3，或者是一个蓝 K_3。

我们指出，结论 $K_5 \to K_3$，K_3 是不成立的。这是因为存在某种给 K_5 的边涂色的方式，使得既无红 K_3 也无蓝 K_3。这种涂色方式由图 2-2 表示，其中五边形的边（以实线表示的边）是红色边，而里面的五角星形的边（以虚线表示的边）是蓝色的边。

更一般地，Ramsey 定理可叙述为：

如果 $m \geqslant 2$ 及 $n \geqslant 2$ 是两个整数，则存在一个正整数 p 使得

$$K_p \to K_m,\ K_n$$

不过，这个定理仍然不是 Ramsey 定理的最一般的形式。

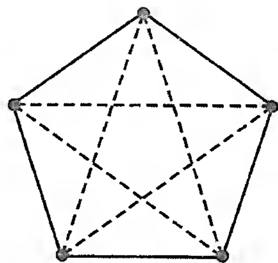


图 2-2

用话来叙述就是，给定 m 和 n，存在一个正整数 p，使得如果 K_p 的边被涂成红色或蓝色，那么或者有一个红色的 K_m，或者有一个蓝色的 K_n。无论 K_p 的边如何着色，红色 K_m 或者蓝色 K_n 的存在性是保证的。

如果 $K_p \to K_m$，K_n，那么对任何的 $q \geqslant p$ 成立 $K_q \to K_m$，K_n。Ramsey 数 $r(m, n)$ 是使得 $K_p \to K_m$，K_n 成立的最小的整数 p。Ramsey 定理则断言数 $r(m, n)$ 的存在性。上面我们证明了

$$r(3,3)=6$$

可以确定 $r(2,n)$ 和 $r(m,2)$。我们下面证明 $r(2,n)=n$：

($r(2,n) \leqslant n$)：事实上，如果我们把 K_n 的边或者涂成红色或者涂成蓝色，那么，或者 K_n 的某条边是红色的（因此我们就得到一个红 K_2），或者 K_n 所有的边都是蓝色的（因此我们就得到一个蓝 K_n）。

($r(2,n) > n-1$)：事实上，如果我们把 K_{n-1} 的边都涂成蓝色，那么我们既得不到红 K_2，也得不到蓝 K_n。

用类似的方法可以证明 $r(m, 2) = m$。这些数称为平凡的 Ramsey 数。一般地，可以通过交换红色和蓝色的位置得到

$$r(m,n)=r(n,m)$$

记住上面这个结论，则关于非平凡 Ramsey 数 $r(m, n)$ 的一些已知结果可列表如下：㊀

$$r(3,3)=6$$
$$r(3,4)=r(4,3)=9$$
$$r(3,5)=r(5,3)=14$$

㊀ 由 S. P. Radziszowski 所写的论文"Small Ramsey Numbers", *Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey #1 包含这些信息及其他信息。

$$r(3,6)=r(6,3)=18$$
$$r(3,7)=r(7,3)=23$$
$$r(3,8)=r(8,3)=28$$
$$r(3,9)=r(9,3)=36$$
$$40\leqslant r(3,10)=r(10,3)\leqslant 43$$
$$r(4,4)=18$$
$$r(4,5)=r(5,4)=25$$
$$43\leqslant r(5,5)\leqslant 55$$

注意，r（3，10）在 40 和 43 之间意味着

$$K_{43}\to K_3,\ K_{10}$$

以及

$$K_{39}\not\to K_3,\ K_{10}$$

因此，不存在既不形成红 K_3 又不形成蓝 K_{10} 的给 K_{43} 的边涂色的方法；存在给 K_{39} 的边涂色的方法使得既不形成红 K_3 又不形成蓝 K_{10}，但是不知道这两个结论对 K_{40}，K_{41} 和 K_{42} 是否成立。结论 $43\leqslant r$（5，5）$\leqslant 55$ 意味着，$K_{55}\to K_5$，K_5 并存在一种给 K_{42} 的边涂色的方法使得无法形成单色的 K_5。

Ramsey 定理可以推广到任意多种颜色的情况。于是，如果 n_1，n_2 和 n_3 是大于或等于 2 的 3 个整数，则存在一个整数 p 使得

$$K_p\to K_{n_1},\ K_{n_2},\ K_{n_3}$$

就是说，如果 K_p 的每条边被涂上红色或蓝色或绿色，那么或者存在一个红 K_{n_1}，或者存在一个蓝 K_{n_2}，或者存在一个绿 K_{n_3}。使该结论成立的最小的整数 p 称为 Ramsey 数 r（n_1，n_2，n_3）。已知这种类型的仅有的非平凡 Ramsey 数为

$$r(3,3,3)=17$$

Ramsey 数 r（n_1，n_2，…，n_k）可用类似的方法定义，而 Ramsey 定理在点对（边）情形下的完全推广形式是：这些数存在；即存在一个整数 p 使得

$$K_p\to K_{n_1},\ K_{n_2},\ \cdots,\ K_{n_k}$$

Ramsey 定理还有更一般的形式，在这种形式中点对（两个元素的子集）由 t 个元素的子集代替，其中 $t\geqslant 1$ 为某个整数。令

$$K_n^t$$

表示 n 个元素的集合中所有的 t 个元素的子集的集合。将上面的概念推广，Ramsey 定理的一般形式可叙述如下：给定整数 $t\geqslant 2$ 及整数 q_1，q_2，…，$q_k\geqslant t$，存在一个整数 p 使得

$$K_p^t\to K_{q_1}^t,\ K_{q_2}^t,\ \cdots,\ K_{q_k}^t$$

也就是说，存在一个整数 p 使得如果将 p 元素集合中的每一个 t 元素子集指定 k 种颜色 c_1，c_2，…，c_k 中的一种，那么或者存在 q_1 个元素，这些元素的所有 t 元素子集都被指定颜色

c_1，或者存在 q_2 个元素，这些元素的所有 t 元素子集都被指定颜色 c_2，…，或者存在 q_k 个元素，这些元素的所有 t 元素子集都被指定颜色 c_k。最小的这样的整数 p 则为 Ramsey 数

$$r_t(q_1, q_2, \cdots, q_k)$$

设 $t=1$。于是，r_1 （q_1，q_2，…，q_k）就是最小的数 p，它满足如果 p 个元素集合的元素用颜色 c_1，c_2，…，c_k 中的一种颜色涂色，那么或者存在 q_1 个涂成颜色 c_1 的元素，或者存在 q_2 个涂成颜色 c_2 的元素，…，或者存在 q_k 个涂成颜色 c_k 的元素。因此，由鸽巢原理的加强形式，

$$r_1(q_1, q_2, \cdots, q_k) = q_1 + q_2 + \cdots + q_k - k + 1$$

就证明了 Ramsey 定理是鸽巢原理的加强形式的推广。

确定一般的 Ramsey 数 r_t （q_1，q_2，…，q_k）是一个困难的问题。关于它们的准确值我们知道得很少。不难看出，

$$r_t(t, q_2, \cdots, q_k) = r_t(q_2, \cdots, q_k)$$

并且这里 q_1，q_2，…，q_k 的顺序并不影响 Ramsey 数的值。

2.4 练习题

1. 关于本节中的应用 4，证明对于每个 $k=1$，2，…，21 存在连续若干天，在此期间国际象棋大师将恰好下完 k 局棋（情形 $k=21$ 是在应用 4 中处理的情况）。能否论断：存在连续若干天，在此期间国际象棋大师将恰好下完 22 局棋？

*2. 关于应用 5，证明如果从 1，2，…，200 中选出 100 个整数，所选的这些整数中有一个小于 16，那么存在 2 个所选出的整数，使得它们中的一个能被另一个整除？

3. 通过从集合 {1，2，…，$2n$} 中选择一些整数，（选多少？）来推广应用 5。

4. 证明，如果从集合 {1，2，…，$2n$} 中选择 $n+1$ 个整数，那么总存在两个整数，它们之间相差为 1。

5. 证明，如果从 {1，2，…，$3n$} 中选择 $n+1$ 个整数，那么总存在两个整数，它们之间最多差 2。

6. 推广练习 4 和练习 5。

*7. 证明，对任意给定的 52 个整数，存在其中的两个整数，要么两者的和能被 100 整除，要么两者的差能被 100 整除。

8. 用鸽巢原理证明，有理数 m/n 展开的十进制小数最终是要循环的。例如，

$$34\,478/99\,900 = 0.345\,125\,125\,125\,125\,12\cdots$$

9. 一间屋内有 10 个人，他们当中没有人超过 60 岁（年龄只能以整数给出）但又至少不低于 1 岁。证明，总能够找出两组人（两组不含相同的人），各组人的年龄和是相同的。题中的数 10 能换成更小的数吗？

10. 一个孩子每天至少看一个小时电视，总共看 7 周，但是每周看电视从不超过 11 小时。证明，存在连续若干天在此期间这个孩子恰好看电视 20 个小时（假设这个孩子每天看

电视的时间为整数个小时)。

11. 一个学生有 37 天用来准备考试。根据过去的经验，她知道她需要不超过 60 小时的学习时间。她还希望每天至少学习 1 小时。证明，无论她如何安排她的学习时间（不过，每天都是整数个小时)，都存在连续的若干天，在此期间她恰好学习了 13 个小时。

12. 举例证明，中国余数定理的结论（应用 6)，当 m 和 n 不互素时未必成立。

*13. 令 S 是平面上 6 个点的集合，其中没有 3 个点共线。由 S 的点所确定的 15 条点间线段或者被涂成红色，或者被涂成蓝色。证明，至少存在两个由 S 的点所确定的三角形或者是红色三角形或者是蓝色三角形（或者两者都是红色三角形，或者两者都是蓝色三角形，或者一个是红色三角形而另一个是蓝色三角形)。

14. 一只袋子装了 100 个苹果、100 个香蕉、100 个橘子和 100 个梨。如果我每分钟从袋子里取出 1 种水果，那么需要多少时间我就能肯定至少已拿出了 1 打相同种类的水果?

15. 证明，对任意 $n+1$ 个整数 a_1，a_2，…，a_{n+1}存在两个整数 a_i 和a_j，$i\neq j$，使得a_i-a_j能够被 n 整除。

16. 证明，在一群 $n>1$ 个人中，存在两个人，他们在这群人中有相同数目的熟人（假设没有人与他或她自己是熟人)。

17. 有一个 100 人的聚会。每个人都有偶数个（有可能是 0 个）熟人。证明，在这次聚会上存在 3 个人有相同个数的熟人。

18. 证明，从边长为 2 的正方形中任选 5 个点，它们当中存在 2 个点，这 2 点的距离至多为 $\sqrt{2}$。

19. ⅰ）证明，在边长为 1 的等边三角形内任意选择 5 个点，存在 2 个点，其间距离至多为 1/2。

ⅱ）证明，在边长为 1 的等边三角形内任意选择 10 个点，存在 2 个点，其间距离至多为 1/3。

ⅲ）确定一个整数 m_n，使得如果在边长为 1 的等边三角形内任意选择的 m_n 个点，则存在 2 个点，其间距离至多为 $1/n$。

20. 证明，$r(3, 3, 3)\leqslant 17$。

*21. 通过展示用红蓝绿 3 色给连接 16 个点的各线段涂色的方法证明 $r(3, 3, 3)\geqslant 17$，其中，涂色结果具有性质：不存在 3 个点使得连接它们的 3 条线段都被涂成相同的颜色。

22. 证明，$r(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{k+1})\leqslant (k+1)(r(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{k})-1)+2$

利用该结果得出 $r(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{n})$ 的一个上界。

23. 将连接 10 个点的各个线段任意涂成红色或涂成蓝色。证明，必然存在 3 个点使得连接该 3 点的 3 条线段都是红色的，或必然存在 4 个点使得连接该 4 点的 6 条线段都是蓝色的（即 $r(3, 4)\leqslant 10$)。

24. 令 q_3 和 t 为正整数且$q_3\geqslant t$。确定 Ramsey 数 $r_t(t, t, q_3)$。

25. 令 q_1，q_2，…，q_k，t 为正整数且$q_1\geqslant t$，$q_2\geqslant t$，…，$q_k\geqslant t$。令 m 为q_1，q_2，…，q_k中之最大者。证明

$$r_t(m, m, \cdots, m) \geqslant r_t(q_1, q_2, \cdots, q_k)$$

结论：为了证明 Ramsey 定理，只要在 $q_1 = q_2 = \cdots = q_k$ 的情形下证明之即可。

26. 设游行乐队的 mn 个人以下述方式站成 m 行 n 列的方队：在每一行中的每个人都比他或她左边的人高。假设指挥将每一列的人以身高从前至后增加的顺序重排。证明，各行仍然是以身高从左至右增加的顺序排列。

27. $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集的集合具有如下性质：每一对子集至少有一个元素是公共的。证明，在该子集的集合中最多存在 2^{n-1} 个子集。

28. 在一次舞会上有 100 位男士和 20 位女士。对于 1，2，…，100 中的每个 i，第 i 位男士选择 a_i 位女士作为他的潜舞伴（这 a_i 位女士组成他的跳舞表），以这种方式得到 20 位男士的任意组，然而，将 20 位男士和 20 位女士配成舞伴对使得每位男士和他的跳舞表中的一位女士结成舞伴总是可能的。保证做到这一点的最小的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是多少？

反证：

若 $a_{ij} > a_{ik}$

则必有一个大于 a_{ij} 的元素置于第 i 行的前面

26 高度 ← a_{ij} 要证：$a_{ij} < a_{ik}$ $(j<k)$

$a_{ij} < a_{ik}$

a_{ij} 在原位置上，第 k 列相应位置的元素（同一行）大于它。（1 个大于它的数）

k 列中，有 $i+1, i+2, \cdots m$ 行中的元素大于它 $(m-i)$

这些原元素的位置中同一行第 k 列的元素都大于它。

在第 k 列中至少有 $m-i+1$ 个大于 a_{ij} 的元素。

1 2 4 6 … 98 50个

这和从小到大的列排序矛盾。

100 个人中 平均数是 2.

如果 有多于两个人具有相同数目的熟人，结果成立。

否则 每两个人有相同数目的熟人

两个谁都不认识的人 从 100 个人剔除。

98 个中，2 个有 98 个熟人的人。

要求证明 $K_{17} \to K_3, K_3, K_3$

每一个顶点有其余 16 条边与它相连，

着红、蓝、黄三色

必定有 6 条边着同一种颜色，假设为红色

其中一端的顶点，可以构成一个 K_6。

设 K_6 中有一条边着红色，则和原来的两条构成一个 K_3

若 K_6 中没有一条着红色，该 K_6 只能着黄色、蓝色边 $K_6 \to K_3, K_3$ 可知该 K_6 必定包含一个蓝色或者黄色。

第3章　排列与组合

本书的大部分读者会有简单的计数问题的经验，因此很可能熟悉“排列”和“组合”的概念。但是，有经验的计数者知道，即使看似颇为简单的一些问题也可能在它们的解法中出现诸多困难。众所周知，为了学好数学必须去做数学，在这里尤其更是如此——严肃的学生应该尝试解决大量的问题。

本章探讨两个一般的原理及它们所蕴涵的某些计数公式。这些原理中的每一个都给出一个我们也要讨论的“补”原理。

3.1　四个基本的计数原理

第一个原理[⊖]是初等的。它是全体等于它的各部分的和这一原理的公式化。

集合 S 的一个划分即为 S 的子集的集合$S_1,S_2,\cdots,S_m$，使得 S 的每一个元素恰好是这些子集之一的元素：

$$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m$$
$$S_i\cap S_j=\varnothing\quad(i\neq j)$$

子集$S_1,S_2,\cdots,S_m$ 称为该划分的部分。我们注意，划分的一个部分可以是空的，不过，考虑带有一个或多个空部分的划分通常没有什么益处。集合 S 的元素个数表示为$|S|$，有时称之为 S 的大小。

加法原理　设集合 S 划分为部分$S_1,S_2,\cdots,S_m$。则 S 的元素的个数可以通过找出它的每一个部分的元素的个数来确定，我们把这些数相加，得到

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_m|$$

如果集合$S_1,S_2,\cdots,S_m$ 可以重叠，那么我们能够使用一个更深刻的原理来计数 S 中元素的个数。这个定理就是第 6 章的容斥原理。

在应用加法原理时，我们通常先要描述性地定义部分。换句话说，我们把问题分成互相排斥的若干情形，而这些情形包括了所有的可能。应用加法原理的技巧就在于把要被计数的集合 S 划分成“容易处理的部分”，即划分成能够容易计数的部分。不过，这句话需要解释。如果我们把集合 S 划分成太多的部分，那么我们就给自己找了麻烦。例如，如果我们把 S 划分成一些部分，使得每部分只含有一个元素，那么应用加法原理就与对部分的数目计数是一样的，而这基本上与列出 S 的所有的元素并没有什么区别。因此，一个更为恰当的描述是，应用加法原理的技巧在于把集合 S 划分成“不太多的易于处理的部分”。

例　设我们想求出威斯康星大学麦迪逊分校所开设的不同课程的数目。我们按照列出课

⊖ 按照 *The Random House College Dictionary* 1975 年的修订版，一个原理是：1）一条被接受或承认的行动或行为的法则；2）一条基本的定律、公理或信条。我们的原理是数学的基本定律，以及求解计数问题的重要行动法则。

程的系来划分这些课程。假设没有交叉列出（交叉列出发生在同一课程被多于一个的系列出的情况），则该大学开设的课程数等于每个系开设的课程数目的和。 □

用选择的术语叙述加法原理的形式为：*如果有 p 种方法能够从一堆中选择一个物体，而有 q 种方法也能够从另外一堆中选择一个物体，那么从这两堆中选择一个物体的方法共有 $p+q$ 种*。这种形式的加法原理可以容易地推广到多于两堆的情况。

例 一名学生想选修一门数学课程或一门生物课程，但两者不同时都选。如果现有4门数学课程和3门生物课程为该生的选课范围，那么该学生能够以 $4+3=7$ 种方法选择一门课程来进修。 □

第二个计数原理要稍微复杂一些。虽然我们是以两个集合的形式叙述的，但它可以推广到任意有限多个集合的情形。

乘法原理 *令 S 是元素的序偶(a,b)的集合，其中第一个元素 a 来自大小为 p 的一个集合，而对于 a 的每个选择，元素 b 存在着 q 种选择。于是，S 的大小为 $p\times q$：*

$$|S|=p\times q$$

乘法原理是加法原理的一个推论。令 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 是对元素 a 的 p 个不同的选择。我们将 S 划分成部分 $S_1,S_2,\cdots,S_p$，其中 S_i 是 S 内第一个元素为 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 的序偶的集合。每个 S_i 的大小为 q，因此由加法原理有

$$\begin{aligned}|S|&=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_p|\\&=q+q+\cdots+q(p\text{ 个 }q)\\&=p\times q\end{aligned}$$

上述推导用到了整数的乘法就是重复的加法这一事实。

乘法原理的第二种形式是：*如果第一项任务有 p 个结果，而不论第一项任务的结果如何，第二项任务都有 q 个结果，那么，这两项任务连续执行就有 $p\times q$ 个结果*。

例 一位学生要修两门课程。第一门课是在上午3个小时中的任一小时上课，第二门课则是在下午4个小时的任一小时上课。对该生可能的课表数为 $3\times4=12$。 □

上面已经提到，乘法原理可被推广到3，4或任意有限多个集合的情形。以下给出 $n=3$ 和 $n=4$ 的例子，我们就不针对 n 个集合的情形给出一般的公式了。

例 粉笔有3种不同的长度，8种不同的颜色，4种不同的直径。粉笔有多少个不同的种类？

为了确定一支粉笔，我们执行3个不同的任务（这3项任务的选取顺序不影响最后的结果）：选择一个长度，选择一种颜色，选择一个直径。由乘法原理可知，共有 $3\times8\times4=96$ 种不同的粉笔。 □

例 从5位男士、6位女士、2名男孩和4名女孩中选择一男一女一男孩和一女孩的方法共有 $5\times6\times2\times4=240$ 种。

这么做的原因在于，我们有4种不同的任务要执行：选择一位男士（5种方法），选择

一位女士（6 种方法），选择一名男孩（2 种方法），选择一名女孩（4 种方法）。此外，如果我们要求出选取一个人的方法数，那么答案则是$5+6+2+4=17$种。这从对于 4 堆的加法原理中可以得出。 □

??**例**　确定数

$$3^4\times5^2\times11^7\times13^8$$

的正整数因子的个数。

数 3，5，11 和 13 均为素数。根据算术基本定理，每个因子都有

$$3^i\times5^j\times11^k\times13^l$$

的形式，其中$0\leqslant i\leqslant4,0\leqslant j\leqslant2,0\leqslant k\leqslant7,0\leqslant l\leqslant8$。$i$ 有 5 个选择，j 有 3 个选择，k 有 8 个选择，而 l 有 9 个选择。由乘法原理，因子总数为

$$5\times3\times8\times9=1\ 080$$ □

在乘法原理中，元素 b 的 q 种选择可以随着 a 的选择而变化。唯一的要求是，选择的个数应是相同的 q 个，而不必是相同的选择。

例　两位数字有多少两个位互异且非零的两位数？

一个两位数 ab 可以看作是一个序偶(a,b)，其中 a 是十位数字而 b 是个位数字。这两位数字在本问题中都不能是 0，而且这两位数字还不能相同。对于 a 有 9 个选择，即$1,2,\cdots,9$。一旦选定 a，对 b 就有 8 种选择。如果$a=1$，那么这 8 中选择为$2,3,\cdots,9$，如果$a=2$，那么这 8 种选择就是$1,3,\cdots,9$，等等。应用乘法原理的重要性在于，b 的选择总是 8 种。根据乘法原理，本题的答案为$9\times8=72$。

我们还可以用另外的方法得到答案 72。两位数字数共有 90 个：$10,11,12,\cdots,99$。在这些数中，9 个有0(即$10,20,\cdots,90$)，9 个有相等的两位(即$11,22,\cdots,99$)。因此，带有互异且非零的两个位的两位数字的个数等于$90-9-9=72$。 □

上面的例子表述了两个想法。一个想法是，可以有多于一种的方法得到计数问题的答案。另一个想法是，为了求出集合 A 的元素个数（本题是带有互异且非零的两个位的两位数字的集合），求解包含 A 的更大的集合 U（即该例中所有两位数字的集合）的元素个数可能会更容易，然后再减去 U 中不属于A 的元素（包含 0 或两个位上的数字相同的两位数字）的个数。我们把这个想法总结成第三个原理。

减法原理　令 A 是一个集合，而 U 是包含A 的更大的集合。设

$$\overline{A}=\{x\in U:\ x\notin A\}$$

是 A 在 U 中的补。那么 A 中的元素个数$|A|$由下列法则给出：

$$|A|=|U|-|\overline{A}|$$

在应用减法原理中，集合 U 通常是某个自然的集合，包含讨论中所有的元素（即所谓

的泛集)。使用减法原理只有当对 U 中元素计数和对 $|\overline{A}|$ 中元素计数比对 A 中元素计数容易时才有意义。

例　计算机口令字计划由 0，1，2，…，9 和小写字母 a，b，c，…，z 中取出的 6 个字符构成的一个串组成。具有重复字符的计算机口令字共有多少?

我们想要计算具有重复字符的计算机口令字集合 A 中元素的个数。令 U 是所有计算机口令字的集合。取 A 在 U 中的补，我们得到无重复字符的计算机口令字的集合 $\overline{A}$。应用两次乘法原理，可以得到

$$|U| = 36^6 = 2\ 176\ 782\ 336$$

及

$$|\overline{A}| = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 1\ 402\ 410\ 240$$

因此，有

$$|A| = |U| - |\overline{A}| = 2\ 176\ 782\ 336 - 1\ 402\ 410\ 240 = 774\ 372\ 096$$ □

现在我们讨论本节最后一个原理。

除法原理　令 S 是一个有限集，它以下述方式被划分成 k 部分，每一部分包含相同数目的元素。此时，划分中的部分的数目由下述公式给出。

$$k = \frac{|S|}{\text{在一个部分中的元素个数}}$$

于是，如果我们知道 S 中元素个数以及各部分所含元素的相同的个数，则可以确定部分的数目。

例　在一组鸽巢中有 740 只鸽子。如果每个鸽巢含有 5 只鸽子，那么鸽巢的数目为

$$\frac{740}{5} = 148$$ □

除法原理的更深奥的应用将在本书稍后出现。现在考虑下一个例子。

例　你想送给你的 Mollie 大婶一篮子水果。在你的冰箱里有 6 个橘子和 9 个苹果。唯一的要求是，篮子内至少必须要有一个水果(即不容许水果篮子内空无水果)。有可能装配成多少种不同篮子水果?

减法原理!!

一种计数不同篮子数的方法如下。首先，忽略篮子不能是空的要求。后面再把这个要求补进去。一篮子水果与另一篮子水果的区别是篮子内的橘子数和苹果数。有 7 种选择确定橘子数(0,1,…,6)以及 10 种选择确定苹果数(0,1,…,9)。根据乘法原理，有$7 \times 10 = 70$ 种可能的不同篮子水果。扣除空篮子这种可能，答案是 69。注意，如果我们不是暂时忽略篮子非空的要求，那么苹果数就有 9 或是 10 种选择，而这要看橘子数是不是 0 来决定，因此我们也就不能直接应用乘法原理来计算了。但是，可以有另外一种解法。把这些非空水果篮子划分成两部分 S_1 和 S_2，其中 S_1 由没有橘子的篮子组成，S_2 由至少装有一个橘子的篮子组成。S_1 的大小为 9 (1,2,…, 9 个苹果)，S_2 的大小根据上面的推理为$6 \times 10 = 60$ 。由加法

原理可知，可能的篮子水果的装配数是$9+60=69$。 □

在前面的例子中我们做了一个含蓄的假设，现在应该把它公开。在解中假设橘子与橘子间没有区别，而苹果与苹果之间也没有区别。于是，装一篮子水果关键不是哪些苹果和哪些橘子装进了篮子，而仅仅是每种水果的数量。如果我们在各个橘子之间和各个苹果之间加以区别（一个橘子是圆的，另一个有磕伤，第3个汁多水大等等），那么篮子的数目就会加大。我们将在3.5节再回到这个例子中来。

在继续考察更多的例子以前，我们讨论某些一般的想法。

大量的计数问题呈现如下的类型：

ⅰ）对元素的有序的摆放数或有序的选择数进行计数

- a）没有重复任何元素。
- b）允许元素重复(但可能是有限的)。

ⅱ）对元素的无序的摆放数或无序的选择数进行计数

- a）没有重复任何元素。
- b）允许元素重复（但可能是有限的）。

有时候不是在元素的非重复和重复之间进行区分，而是从集合和多重集合中的选择来区分会更方便。一个多重集除其成员不必区分外就像一个集合[㊀]。例如，多重集

$$M=\{a,a,a,b,c,c,d,d,d,d\}$$

有10个元素，4种不同的类型：3个类型a，1个类型b，2个类型c，4个类型d。我们也可通过指定不同类型元素出现的次数来表示一个多重集。因此，M也可表示为$\{3\cdot a,1\cdot b,2\cdot c,4\cdot d\}$。数3，1，2和4就是多重集$M$的重复数。集合是其重复数皆等于1的多重集。为了在各类元素出现的次数没有限度的时候仍然能够包括上述情形b)，我们可以使用无限重复数[㊁]。于是，可以通过$\{\infty\cdot a,2\cdot b,\infty\cdot c,4\cdot d\}$表示一个多重集，其中的$a$和$c$都有无穷重复数而$b$和$d$的重复数分别是2和4。在ⅰ)中考虑到顺序的摆放或选择称为排列，而ⅱ）中与顺序无关的摆放或选择叫做组合。下面两节我们将进一步得到关于集合和多重集的排列数和组合数的某些一般的公式。但是，并非所有的排列和组合问题都能够用这些公式得到解决，而是常常需要回到基本的加法原理和乘法原理来解决。

例　在1 000和9 999之间有多少具有不同数字的奇数?

在1 000和9 999之间的一个数就是4个数字的一个有序放置。我们有4种选择要作：个位数字，十位数字，百位数字，千位数字。由于我们要计数的这些数是奇数，因此个位数字可以是1,3,5,7,9中的任一个。十位数字和百位数字可以是0,1,…，9中的任何一个，而千位数字可以是1,2,…，9中的任意一个。因此，个位数字有5种选择。由于各位数字要互异，故不论个位数字选择的是什么，千位数字都有8种选择。于是，不论前两位数字选择的是什么，百位数字都有8种选择，不论前3位数字选择的是什么，十位数字都有7种选择。

㊀ 于是，多重集破坏了集合的一条笛卡儿法则，即元素在集合中不得重复；它们或者在集合中或者不在集合中。集合$\{a,a,b\}$与集合$\{a,b\}$相同，但对多重集而言两者则不同。

㊁ 不存在令我们担心的无穷的大小不同的情况。

因此，根据乘法原理，本题的答案是$5\times8\times8\times7=2\ 240$。 □

假设在前面的例子中我们以相反的顺序进行选择：先选千位数字，然后再选百位数字，十位数字和个位数字。千位数字有 9 种选择，然后百位数字有 9 种选择（因为我们可以使用数字 0），十位数字有 8 种选择，但是现在个位数字（必须是奇数）的选择则依赖于前面的各个选择了。如果我们还没有选到奇数数字，那么个位数字的选择数就是 5；如果我们选择了一个奇数，那么个位数字的选择数就是 4；等等。这样一来如果我们以相反的顺序进行选择，我们就不能应用乘法原理了。从这个例子中我们有两点要学。一是只要在你对一个任务的选择数的答案用到“依赖于”（或类似的词语），则乘法原理就不能使用。二是可能不存在一个固定的顺序来执行这些任务，但是通过改变任务的执行顺序，一个问题可能会更容易地通过乘法原理而得到解决。要牢记一个经验法则：让最有约束性的选择优先。

例 在 0 和 10 000 之间有多少个整数恰好有一位数字是 5?

令 S 为在 0 和 10 000 之间恰好有一位数字是 5 的整数的集合。

解法一：一位数字等于 5。很自然想到把 S 划分成一位数字的集合 S_1，两位数字的集合 S_2，三位数字的集合 S_3，四位数字的集合 S_4。在 S 中没有 5 位数字的数。显然，我们有

$$|S_1|=1$$

S_2 的数很自然地分成两种类型：（ⅰ）个位数字是 5。（ⅱ）十位数字是 5。第一种类型的数的数目为 8（十位数字既不能是 0 也不能是 5）。第二种类型的数的个数为 9（个位数字不能是 5）。因此，

$$|S_2|=8+9=17$$

用类似的推理我们得到

$$|S_3|=8\times9+8\times9+9\times9=225$$

以及

$$|S_4|=8\times9\times9+8\times9\times9+8\times9\times9+9\times9\times9=2\ 673$$

因此

$$|S|=1+17+225+2\ 673=2\ 916$$

解法二：通过填加前导零（如 6 看作 0006，25 看作 0025，352 看作 0352），可以把 S 中的每一个数都当作是 4 位数。现在我们根据数字 5 位于第 1 位、第 2 位、第 3 位还是第 4 位而把 S 划分成S'_1，S'_2，S'_3 和 S'_4。这 4 个集合中的每一个都含有$9\times9\times9=729$ 个整数，从而 S 所含整数的数目等于

$$4\times729=2\ 916$$ □

例 从数字1,1,1,3,8 可以构造出多少个不同的 5 位数?

我们这里要计算多重集的排列数，该集有 3 个第一种类型的元素，1 个第二种类型的元

素和 1 个第三种类型的元素。实际上我们只要进行两种选择：哪个位置要被 3（5 个选择）占据，然后是哪个位置要被 8（4 个选择）占据。其余的 3 处位置由这 3 个 1 占据。根据乘法原理，答案是$5\times4=20$。

如果这 5 个数是$1,1,1,3,3$，则答案就是 10，是上例的一半。 □

这些例子清楚地表明，精通加法原理和乘法原理对于成为专业计数专家是必不可少的。

3.2　集合的排列

令 r 为正整数。我们把 n 个元素的集合 S 的一个 r-排列理解为 n 个元素中的 r 个元素的有序摆放。如果$S=\{a,b,c\}$，则 S 的 3 个 1-排列是

$$a \quad b \quad c$$

S 的 6 个 2-排列是

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb$$

S 的 6 个 3-排列是

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

集合 S 没有 4-排列，因为 S 的元素个数少于 4。

我们用$P(n,r)$表示 n 个元素集合的 r-排列的数目。如果 $r>n$，则$P(n,r)=0$。显然，对每一正整数n，$P(n,1)=n$。一个 n-元素集合 S 的一个 n-排列将被更简单地称为 S 的一个排列或 n 个元素的一个排列。于是，集 S 的一个排列就是以某种顺序列出 S 的所有元素。上面我们已经看到$P(3,1)=3$，$P(3,2)=6$ 和 $P(3,3)=6$。

定理 3.2.1　对于正整数 n 和 r，$r\leqslant n$，有

$$P(n,r)=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$$

证明：在构建 n-元素集的一个 r-排列时，我们可以用 n 种方法选择第一项，不论第一项如何选出，都可以用 $n-1$ 种方法选择第二项，…，以及不论前 $r-1$ 项如何选出，都可以用$n-(r-1)$种方法选择第 r 项。根据乘法原理，这 r 项可以用$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$种方法选出。 □

我们定义 $n!$（读作 n 的阶乘）为

$$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$$

并约定$0!=1$。于是我们可以写成

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

对于上面的 $n\geqslant0$，我们定义$P(n,0)$为 1，而这正与 $r=0$ 时的公式一致。n 个元素的排列数为

$$P(n,n)=\frac{n!}{0!}=n!$$ □

例 使用字母 a,b,c,d,e，每个最多一次而形成的 4-字母"词"的数目等于 $P(5,4)=5!/(5-4)!=120$。由它们形成的 5-字母词 $P(5,5)$ 的个数也是 120。□

例 所谓的"15 迷阵"由 15 个单位滑动方块组成，各块以数字 1 到 15 标注并摆放在图 3-1 所示的 4×4 方框内。该迷阵的难题在于移动诸方块使从图中的初始位置到任意指定的位置。这里的位置指的是在方框内的这 15 个标有数字的方块的一种摆放方法，其中有一个方块是空的。本迷阵中的位置的总数是多少（不管位置是否能够从初始位置移动得到）？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

图 3-1

这个问题等价于确定指定数字 $1,2,\cdots,15$ 给 4×4 网格的 16 个方块并留出一个空白方块的方法的数目。由于我们能够指定 16 为空白方块，因此该问题又等价于确定将 $1,2,\cdots,16$ 指派给 16 个方块的方法的数目，而这正是 $P(16,16)=16!$。

将数字 $1,2,\cdots,15$ 指派给 6×6 网格中的方块并留出 21 个空白方块的方法的总数是多少？这些指派对应 36 方块的 15-排列如下。对于将 $1,2,\cdots,15$ 到 36 个方块中的 15 个方块的一个指派，我们首先摆放标有 1 的方块，第二个摆放标有 2 的方块，等等。通过这种方法就得到 36 方块的 15-排列。因此，指派的总数是 $P(36,15)=36!/21!$。□

例 将字母表中的 26 个字母排序使得元音字母 a,e,i,o,u 中任意两个都不得相继出现，这种排序的方法的总数是多少？

该问题的解（像许多计数问题一样）一旦看出如何去做则可立刻得出。我们考虑两个要完成的主要任务。第一个任务是决定如何对这些辅音字母排序。计有 21 个辅音字母，故有辅音字母的排列数是 21!。由于我们不能有两个元音字母相连地出现在最终的字母排序中，因此这些元音字母必须放在这些辅音字母之前、之后、之间的 22 个空间。我们的第二个任务是把这些元音字母放入这些位置。对于 a 有 22 个位置，对 e 有 21 个位置，i 有 20 个位置，o 有 19 个位置，u 有 18 个位置。就是说，第二个任务可以用

$$P(22,5)=\frac{22!}{17!}$$

种方法完成。根据乘法原理，有序摆放 26 个字母使得元音字母 a,e,i,o,u 中任意两个都不得相继出现的方法数为

$$21!\times\frac{22!}{17!}$$ □

例 有多少取自 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的各位互异的 7 位数使得数字 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

我们要对 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的某些 7-排列计数，并为此将这些 7-排列划分成 4 种类型；ⅰ)在 7 位数字中 5 和 6 均不出现；ⅱ)5 作为数字出现但 6 不出现；ⅲ)6 作为数字出现但 5 不出现；ⅳ)5 和 6 都出现在 7 位数字中。类型ⅰ)是 $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ 的 7-排列，它们的总数是 $P(7,7)=7!=5\,040$。ⅱ)型的排列可以如下计算。数字 5 可以是 7 位数字中的任何一位。其余6位数字是 $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ 的一个6-排列。因此ⅱ)型的7位数有 $7P(7,6)=7(7!)=$

35 280 个。类似地，我们看到，ⅲ)型的 7 位数也有 35 280 个。为了计数ⅳ)型数，我们把ⅳ)型排列划分成三部分：

第一位数字等于 5：

$$5 \quad \neq 6$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

数字 6 有 5 个位置。其他 5 位数字组成 7 位数字$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的 5-排列。因此，该部分有

$$5\times P(7,5)=\frac{5\times 7!}{2!}=12\ 600$$

个 7 位数。

最后一位数字是 5：

$$\neq 6 \quad 5$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

通过类似于前面的论述，我们得到，该部分也有 12 600 个 7 位数字。

数字 5 出现在首尾之外的其他位置上：

$$\neq 6 \quad 5 \quad \neq 6$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

被 5 占据的位置是中间 5 个位置的任意一个位置。于是，6 的位置可用 4 种方法选择。其余 5 个数字构成 7 位数字$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个 5-排列。因此，在这个范围内的 7 位数有$5\times 4\times P(7,5)=50\ 400$个。从而，ⅳ)型数有

$$2(12\ 600)+50\ 400=75\ 600$$

个。根据加法原理，本题答案为

$$5\ 040+2(35\ 280)+75\ 600=151\ 200$$

刚刚给出的解通过将我们要计数的元素的集合划分成可管理的部分，即我们能够计算其元素个数的部分，然后再应用加法原理而得到。但是，加法原理还能够以更巧妙的方式使用，导致另外一种更容易计算的解。让我们考虑使用取自$\{1,2,\cdots,9\}$而形成的互异 7 位数字全体的集合 T。则 T 包含

$$P(9,7)=\frac{9!}{2!}=181\ 440$$

我们将 T 划分成两个子集：S 和 S 的补$\overline{S}$。S 由 T 中 5 和 6 不相继出现的数组成，$\overline{S}$ ⊖由 T 中使 5 和 6 连续出现的数组成。我们希望确定 S 的大小。根据加法原理，T 的大小等于 S 的大小加上$\overline{S}$ 的大小。如果我们求出$\overline{S}$ 的大小，那么我们的问题就解决了。$\overline{S}$ 中有多少元素呢？在$\overline{S}$ 中数字 5 和 6 都是连续地出现。有 6 种方法置 5 后接 6，且有 6 种方法置 6 后接 5。

⊖ S（相对于 T）的补由所有属于 T 但不属于 S 的元素组成。

其余数字构成{1,2,3,4,7,8,9}的 5-排列。因此，$\overline{S}$ 中的数的数目为

$$2\times 6\times P(7,5)=30\ 240$$

从而 S 含有

$$181\ 440-30\ 240=151\ 200$$

个数。□

我们刚刚考虑过的排列更恰当些应该叫做线性排列。我们把元素看作是排成一条线。如果我们不把它们排成一条线而是排成一个圆，那么排列的数目就要减少。这样思考这个问题：设 6 个孩子沿圆圈行进。他们能够以多少种不同的方式形成一个圆？由于孩子们在行进，重要的是他们彼此间的相对位置而不是他们的状态。因此，如果两个循环排列通过一个旋转，即一个循环移位，从其中的一个变到另一个，那么自然要把他们看成是相同的。例如，循环排列

```
      1
  2       6
  3       5
      4
```

可从下列线性排列

123456	234561	345612
456123	561234	612345

中的每一个通过将第一个元素看成接在最后一个元素后面的元素产生。这样，在 6 个孩子的线性排列和 6 个孩子的循环排列之间就存在着 6 到 1 的对应。因此，要想求得循环排列的数目，我们只要用 6 去除线性排列的数目即可。由此可知，6 个孩子的循环排列数等于$6!/6=5!$。

定理 3.2.2　n 个元素的集合的循环 r-排列的个数由

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$

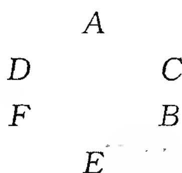
给出。特别地，n 个元素的循环排列的个数是$(n-1)!$。

证明：上述段落基本上包含了本定理的证明。可以把线性 r-排列的集合划分成一些部分，使得两个线性 r-排列对应同一个循环 r-排列当且仅当它们在同一个部分中。于是，循环 r-排列的个数等于部分的个数。既然每一个部分都含有 r 个线性 r-排列，因此，部分的个数就是$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$。□

注意，因为每一部分都包含相同个数 r 个 r-排列，我们可以应用除法原理，所以前面的结论是成立的。但是，比如，如果我们把 10 个元素的集合分成大小分别为 2，4 和 4 的 3 部分，那么部分的个数却不是 10/3。

 看成长桌!! (AND 项链可以翻转).

另一种观察循环排列的计数问题的方法如下。设我们想要计算A,B,C,D,E,F的循环排列的个数(围绕一个桌子安排座位A,B,C,D,E,F的方法的数目)。既然可以使人们围着桌子自由轮转，那么任何一个循环排列都可以转到使A处在一个固定的位置；我们把它看作是“桌长”:



既然A已经固定，那么A,B,C,D,E,F的循环排列可以等同于B,C,D,E,F的线性排列(上述循环排列恒等于线性排列$DFEBC$)。但B,C,D,E,F的线性排列有$5!$个，因此，A,B,C,D,E,F的循环排列有$5!$个。

当循环排列的公式不能够直接应用的时候，这种看待循环排列的方法还是有用的。

例 10个人要围坐一圆桌，其中有两人不愿彼此挨着就坐。共有多少循环座位排放方法?

为解决该问题，令这10人为$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_{10}$，其中$P_1,P_2$是彼此不愿意坐在一起的两个人。考虑9个人$X,P_3,\cdots,P_{10}$围坐圆桌的座位安排。共有$8!$个这样的安排方法。如果在每一种座位安排中都用$P_1,P_2$或$P_2$，$P_1$代替$X$，那么我们都将得到10人的一种座位安排而$P_1,P_2$彼此挨着就坐。因此，$P_1,P_2$不坐在一起的座位安排方法总数为$9!-2\times8!=7\times8!$。

这个问题的另一种分析方法如下。第一个座位P_1在桌长的位置。P_2就不能在桌长两边的位置。P_1左边的人选有8个，P_1右边的人选有7个，而其余的座位有$7!$种方法安排。因此，P_1和P_2不能坐在一起的座位安排方法共有

$$8\times7\times7!=7\times8!$$

种。 □

像讨论循环排列以前那样，我们继续使用“排列”来代表“线性排列”。

例 将12个不同的记号记在旋转的圆鼓上的方法的个数是$P(12,12)/12=11!$。 □

项链可以翻转!

例 用20个不同颜色的念珠串成一条项链，能够做成多少不同的项链?

20个念珠共有$20!$种不同的排列。由于每条项链都可以旋转而不必改变念珠的排列，项链的数目最多为$20!/20=19!$。又由于项链还可以翻转过来而念珠的排放未改动，因此项链的总数是$19!/2$。 □

循环排列和项链将在第14章以更一般的方式计数。

圆排列—旋转对称、反转

3.3 集合的组合

令r为非负整数。我们把n个元素的集合S的r-组合理解为从S的n个元素中对r个

元素的无序选择。换句话说，S 的一个 r-组合是 S 的一个子集，该子集由 S 的 n 个元素中的 r 个组成，即 S 的一个 r-元素子集。如果 $S=\{a,b,c,d\}$，那么

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$$

是 S 的 4 个 3-组合。我们用 $\binom{n}{r}$ 表示 n-元素集的 r-组合的个数[⊖]。显然

$$\binom{n}{r}=0 \qquad \text{若 } r>n$$

又有

$$\binom{0}{r}=0 \qquad \text{若 } r>0$$

容易看出，下述另外一些事实对非负整数 n 是成立的：

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{n}=1$$

特别地，$\binom{0}{0}=1$。组合的基本公式在下一个定理中给出。

定理 3.3.1　对于 $0\leqslant r\leqslant n$，

$$P(n,r)=r!\binom{n}{r}$$

因此

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

证明：令 S 是一个 n-元素集。S 的每个 r-排列都恰由下面的两个任务执行结果而产生。

ⅰ）从 S 中选出 r 个元素。

ⅱ）将所选出的 r 个元素以某种顺序排列。

执行第一个任务的方法数根据定义可知为组合数 $\binom{n}{r}$。执行第二个任务的方法数则是 $P(r,r)=r!$。根据乘法原理我们有 $P(n,r)=r!\binom{n}{r}$。现在我们使用公式 $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ 得到

$$\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!} \qquad \square$$

例　在平面上给出 25 个点，没有 3 个点共线。这些点确定多少条直线？确定多少个三角形？

⊖ 该个数其他常用的记号是 $C(n,r)$ 和 ${}_nC_r$。

由于没有 3 个点位于同一条直线上，每一对点就确定唯一一条直线。因此，所确定的直线数目等于 25-元素集的 2-组合数，该组合数由

$$\binom{25}{2}=\frac{25!}{2!23!}=300$$

类似地，每 3 个点确定唯一一个三角形，因此，所确定的三角形的个数为

$$\binom{25}{3}=\frac{25!}{3!22!}$$ □

例　有 15 人注册了数学课，但任意一天都恰有 12 名学生听课。选出 12 名学生的不同的方法数是

$$\binom{15}{12}=\frac{15!}{12!3!}$$

如果教室内有 25 个座位，那么这 12 名学生可有 $P(25,12)=25!/13!$ 种方法选择座位。因此，一位教师可以有

$$\binom{15}{12}P(25,12)=\frac{15!25!}{12!3!13!}$$

种方式见到在教室里的 12 名学生。□

例　如果每个词包含 3、4 或 5 个元音，那么用字母表中的 26 个字母可以构造多少个 8-字母词？可以理解为，在一个词中字母的使用次数没有限制。

我们按照所含元音个数来对单词计数，然后应用加法原理。

3 元音词：由元音所占据的 3 个位置可以有 $\binom{8}{3}$ 种选择方式；其余 5 个位置由辅音占据。元音的位置可由 5^3 种方式确定，辅音位置可由 21^5 种方式确定。具有 3 个元音的词的个数为

$$\binom{8}{3}5^3 21^5=\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5$$

4 元音词：

$$\binom{8}{4}5^4 21^4=\frac{8!}{4!4!}5^4 21^4$$

5 元音词：

$$\binom{8}{5}5^5 21^3=\frac{8!}{5!3!}5^5 21^3$$

因此，词的总数为

$$\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5+\frac{8!}{4!4!}5^4 21^4+\frac{8!}{5!3!}5^5 21^3$$ □

下列重要性质由定理 3.3.1 立即得出。

推论 3.3.2　对于$0\leqslant r\leqslant n$，

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$ □

数$\binom{n}{r}$有许多重要的和便利的性质，其中的部分性质将在第 5 章讨论。现在只介绍一个性质。

定理 3.3.3　我们有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

这个值等于 n 元素集的所有组合的总个数。

证明：通过证明上式两边是以不同的方式对 n-元素集 S 的组合数计数来证明这个定理。首先我们观察 S 的每一个组合是 S 对于$r=0,1,2,\cdots$， n 的一个 r-组合。由于$\binom{n}{r}$等于 S 的 r-组合数，由加法原理

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

等于 S 的所有组合的总个数。

也可以如下计算 S 的所有组合的总个数，把一个组合的选取分成 n 个任务来完成。令 S 的元素为$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 。在选取 S 的一个组合时，对 n 个元素的每一个都有两个选择：x_1 要么在这个组合里，要么不在组合里，x_2 要么在这个组合里，要么不在组合里，…，x_n 要么在这个组合里，要么不在组合里。因此，由乘法原理，存在 2^n 种方法使得我们可以形成 S 的一个组合。使两种方法相等就完成了定理的证明。 □

定理 3.3.3 的证明是通过计数（此处是 n 个元素集合的所有组合的计数）得到恒等式的一个例子。它先对一个集合的元素用两种不同方法计数，然后令所得出的两个结果相等。这种“双计数”技术是组合学中的强大的方法。我们将再讨论几个其他的应用。

例　前 n 个正整数的集$\{1,2,\cdots,n\}$的 2-组合数为$\binom{n}{2}$。再按照所包含的最大整数划分这些 2-组合。对每个$i=1,2,\cdots,n$ ，2-组合的个数为 $i-1$（另一个整数可以是$1,2,\cdots$， $i-1$ 中的任一个）。这两种计数结果应该相等，由此得到恒等式

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$ □

3.4　多重集的排列

如果 S 是一个多重集，那么 S 的一个 r-排列是 S 的 r 个元素的一个有序排放。如果 S 的元素总个数是 n（包括计算重复元素），那么 S 的 n-排列也将称为 S 的排列。例如，如果

$S=\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$，那么

$$acbc \qquad cbcc$$

都是 S 的 4-排列，而

$$abccca$$

是 S 的一个排列。多重集 S 没有 7-排列，因为$7>2+1+3=6$，即 7 大于集 S 的元素个数。我们首先计算多重集 S 的 r-排列的个数，其每一个重复的次数都是无限的。

定理 3.4.1 令 S 是一个多重集，它有 k 个不同类型的元素，每一个元素都有无限重复次数。那么，S 的 r-排列的个数为 k^r。

证明： 在构造 S 的一个 r-排列时，选取第一项为 k 种元素中的任一种的一个元素。类似地，第二项也是 k 种元素中的任一种的一个元素等等。由于 S 的所有元素的重复数都是无限的，因此任意一项的不同选择的个数总是 k，而且不依赖于任何前面项的选择。根据乘法原理，r 项可以有 k^r 种选择方法。 □

定理的另一种证明方法如下：k 个不同物体（每个物体都可以无限地提供）的 r-排列的个数等于 k^r。我们还注意到，如果 S 的 k 个不同种类的元素的重复数均至少为 r，那么定理还是成立的。重复数无限的假设是保证我们在构造 r-排列时用不完任何一种元素的简单的方法。

例 最多 4 位数字的三进制数[⊖]的个数是多少？

这个问题的答案是多重集$\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2\}$或多重集$\{4\cdot 0,4\cdot 1,4\cdot 2\}$的 4-排列的个数。根据定理 3.4.1，这个数等于$3^4=81$。 □

现在我们计算一种多重集的排列数，该集合具有 k 个不同类型的元素，每个元素重复次数有限。

定理 3.4.2 令 S 是一个多重集，有 k 个不同类型的元素，各元素的重数分别为 n_1, $n_2,\cdots,n_k$。设 S 的大小为$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ \cdots n_k!}$$

证明： 给定多重集 S，有 k 种类型的元素，比如说$a_1,a_2,\cdots,a_k$，且分别有重数n_1, $n_2,\cdots,n_k$，元素的总个数为$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。要想确定这 n 个元素的排列数。可以这样来看这个问题。现在存在 n 个位置，而我们想要在每一个位置上恰好放 S 的一个元素。我们首先决定哪些位置要被 a_1 类型的元素占据。由于在 S 中有 n_1 个 a_1，必须从 n 个位置的集合选出 n_1 个位置的子集。有$\binom{n}{n_1}$种方法选出这种子集。下一步决定哪些位置要被 a_2 类型的元素占据。还剩下 $n-n_1$ 个位置，必须选择其中的 n_2 个。这可有$\binom{n-n_1}{n_2}$种方法。

⊖ 一个三进制数，或基为 3 的数，即通过 3 的幂表示而得到的数。例如，$46=1\times3^3+2\times3^2+0\times3^1+1\times3^0$，因此它的三进制数是 1201。

我们发现，为 a_3 选择放置的位置有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种方法。像这样继续下去，由乘法原理可知，S 的排列的总数等于

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

应用定理 3.3.1，我们看到，这个数等于

$$\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\ (n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\ (n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$

化简后得到

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ \cdots n_k!\ 0!}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ \cdots n_k!}$$ □

例　在单词 MISSISSIPPI 中的字母排列数是

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

因为这个数等于多重集 $\{1\cdot M, 4\cdot I, 4\cdot S, 2\cdot P\}$ 的排列数。 □

如果多重集 S 只有两种类型的元素 a_1 和 a_2，它们对应的重数分别是 n_1 和 n_2，其中 $n=n_1+n_2$，那么按照定理 3.4.2，集 S 的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!}=\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}=\binom{n}{n_1}$$

因此，可以把 $\binom{n}{n_1}$ 看作是 n 个元素集合的 n_1-组合数，也可看成是具有两种类型的元素且它们的重数分别是 n_1 和 $n-n_1$ 的多重集的排列的个数。

在定理 3.4.2 中出现的数 $\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$ 还有另外一种解释。它涉及把元素的一个集合划分成指定大小的部分的问题，其中，这些部分现在就有了指派给它们的标签。为了理解最后的短语的含义，我们举出下一个例子。

例　考虑 4 个元素集合 $\{a, b, c, d\}$，它要被划分成两个集合，每个的大小为 2。如果这两部分没有做标签，那么存在三种不同的划分：

$$\{a, b\}, \{c, d\};\ \{a, c\}, \{b, d\};\ \{a, d\}, \{b, c\}$$

然而，如果这些部分被做了标签，那么让我们用颜色红和蓝标记它们。此时，划分的个数更多；实际上，由于可以将标签红和蓝以两种方式指派给划分的每个部分，因此有 6 个划分。例如，对于划分 $\{a, b\}, \{c, d\}$，有

红盒 $\{a, b\}$，蓝盒 $\{c, d\}$

和

蓝盒 $\{a, b\}$，红盒 $\{c, d\}$ □

在一般情形下，我们标记部分 $B_1, B_2, \cdots, B_k$（看成是颜色 1，颜色 2，⋯，颜色 k），并且把这些部分看成是盒子。

定理 3.4.3　令 n 是一个正整数，并令 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是正整数且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。将 n 个元素的集合划分成 k 个被做标签的盒子 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 的方式数为

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

其中盒 1 含有 n_1 个元素，盒 2 含有 n_2 个元素，…，盒 k 含有 n_k 个元素。如果这些盒子不被做标签，那么划分的个数为

$$\frac{n!}{k!\ n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

证明：证明是乘法原理的直接应用。我们必须选取哪些元素放进哪些盒子，并满足大小的限制。首先选择 n_1 个元素放入第一个盒子，然后从剩下的 $n-n_1$ 个元素中取 n_2 个元素放入第 2 个盒子，然后从剩下的 $n-n_1-n_2$ 个元素中取 n_3 个元素放入第 3 个盒子，…，最后将 $n-n_1-\cdots-n_{k-1}=n_k$ 个元素放入第 k 个盒子。由乘法原理，进行这些选择的方法数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

正如定理 3.4.2 的证明，这给出

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

现在设对这些盒子不做标签。此时的结果必须被 $k!$ 整除。情况正是这样，因为对于把元素放入 k 个无标签的盒子中的每一种方法，现在存在 $k!$ 种方法将标签 1，2，…，k 贴在盒子上。因此，使用除法原理，我们发现，具有无标签盒子的划分的个数是

$$\frac{n!}{k!\ n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

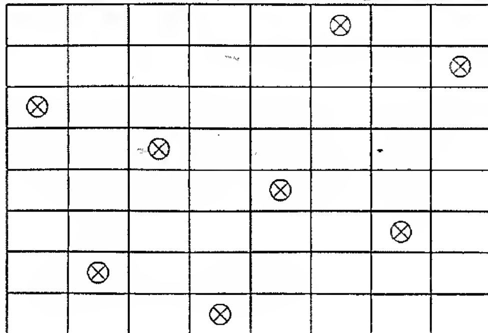
□

对于那些其各部分的大小尚未指定的划分的更困难的计数问题在第 8.2 节中研究。

我们用一类例子结束本段，这类例子我们将在本书其余部分多次提到[⊖]。这个例子涉及国际象棋棋盘上的非攻击型车。为防止读者担心本书其余部分要涉及国际象棋的一些知识，我们现在要说，唯一需要知道的关于下棋的知识是：两个车能够互相攻击当且仅当它们位于棋盘的同一行或同一列。象棋的其他知识就不需要了(且与问题也无补)。因此，棋盘上非攻击型车的集合指的就是叫做“车”的那些棋子的集合，它们占据着棋盘上的一些方格，并且没有两个车位于同一行或同一列上。

例　在 8×8 棋盘上对于 8 个非攻击型车有多少可能的放法？

在 8×8 棋盘上放置 8 个非攻击型车的例子如下：



⊖ 这是作者喜爱的一类例子，它能解释很多思想。

我们给棋盘上的每个方块一对坐标(i,j)。整数 i 指出方块的行数，整数 j 指出方块的列数。因此，i 和 j 是 1 和 8 之间的整数。由于棋盘是8×8，棋盘上就能有 8 个车它们不能彼此攻击，每行上必然恰好有一个车。因此，这些车必然占据 8 个方块而且具有坐标

$$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(8,j_8)$$

但是，还必须在每一列上恰好有一个车，这使得数$j_1,j_2,\cdots,j_8$中没有两个是相等的。更准确地说，

$$j_1, j_2, \cdots, j_8$$

必须是$\{1,2,\cdots,8\}$的一个排列。反过来，如果 $j_1, j_2, \cdots, j_8$ 是 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的一个排列，那么将车放在坐标为$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(8,j_8)$的各个方块上，就得到盘上的 8 个非攻击型车。因此，在 8×8 棋盘上的 8 个非攻击型车与$\{1,2,\cdots,8\}$的排列之间就有一个一一对应，既然$\{1,2,\cdots,8\}$有 8!个排列，因此将 8 个车放到 8×8 棋盘上使得它们具有非攻击性的方法也有 8!个。

在上面的讨论中我们实际上已经间接假设这些车是彼此没有什么区别的。因此，唯一的关键在于哪些方块被这些车占据。如果我们有 8 个不同的车，比如，用 8 种不同的颜色分别给 8 个车涂色，那么我们还要考虑在 8 个被占据方块的每一个方块里放的是哪个车。让我们这样假设，我们有 8 个不同颜色的车。在决定哪 8 个方块要被这些车占据后（8!种可能），我们现在还要决定：在每个所占据的方块上的车是什么颜色？观察从第一行到第 8 行的这些车时我们看到 8 种颜色的一个排列。因此，决定了哪 8 个方块要被这些车占据之后（8!种可能），就必须决定 8 种颜色的哪个排列（8!种排列）需要指定。于是，在 8×8 棋盘上具有 8 种不同颜色的 8 个非攻击性车的放置方法数等于

$$8!8!=(8!)^2$$

现在假设有 1 个红（R）车，3 个蓝（B）车，4 个黄（Y）车。假设同颜色的车彼此没有区别[⊖]。现在当我们从第 1 行到第 8 行观察这些车时看到多重集

$$\{1\cdot R,3\cdot B,4\cdot Y\}$$

颜色的一个排列。根据定理 3.4.2，这个多重集的排列个数等于

$$\frac{8!}{1!\ 3!\ 4!}$$

因此，在 8×8 棋盘上放置 1 个红车，3 个蓝车，4 个黄车并使它们彼此不能互相攻击的方法数等于

$$8!\ \frac{8!}{1!\ 3!\ 4!}=\frac{(8!)^2}{1!\ 3!\ 4!}$$ □

前面的例子中的推理相当普遍且导致下面的定理。

定理 3.4.4　有 n 个车共 k 种颜色，第一种颜色的车有 n_1 个，第二种颜色的车有 n_2

⊖ 换句话说，我们能够区别两个车的唯一的方法是通过辨别其颜色。

个，…，第 k 种颜色的车有 n_k 个。将这些车摆放在 $n\times n$ 棋盘上，使没有车能够互相攻击的摆放方法数等于

$$n!\ \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}=\frac{(n!)^2}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

注意，如果这些车的颜色都不相同（$k=n$ 且所有的 $n_i=1$），则公式的答案为 $(n!)^2$。如果这些车都涂成相同的颜色（$k=1$ 且 $n_1=n$），则公式的答案为 $n!$。

令 S 是 n-元素的多重集，各元素的重数分别等于 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，且使得 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。定理 3.4.2 提供了计算 S 的 n-排列的个数的简单公式。如果 $r<n$，则一般就不存在计算 S 的 r-排列的个数的简单公式。但是，通过使用生成函数的技巧也可以得到问题的解，我们将在第 7 章讨论这种方法。在某些情形下，我们可以像下面的例子那样论证。

例　考虑 3 种类型 9 个元素的多重集 $S=\{3\cdot a,2\cdot b,4\cdot c\}$。求 S 的 8-排列的个数。

S 的 8-排列可以被分成 3 个部分：

（ⅰ）$\{2\cdot a,2\cdot b,4\cdot c\}$的 8-排列，有

$$\frac{8!}{2!\ 2!\ 4!}=420$$

ⅱ）$\{3\cdot a,1\cdot b,4\cdot c\}$的 8-排列，有

$$\frac{8!}{3!\ 1!\ 4!}=280$$

ⅲ）$\{3\cdot a,2\cdot b,3\cdot c\}$的 8-排列，有

$$\frac{8!}{3!\ 2!\ 3!}=560$$

因此，S 的 8-排列的个数为

$$420+280+560=1\ 260$$

□

3.5　多重集的组合

如果 S 是一个多重集，那么 S 的 r-组合是 S 中的 r 个元素的一个无序选择。因此，S 的一个 r-组合本身就是一个多重集——S 的一个子多重集。如果 S 有 n 个元素，那么 S 只有一个 n-组合，即 S 自己。如果 S 含有 k 种不同类型的元素，那么就存在 S 的 k 个 1-组合。

例　如果 $S=\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$，那么 S 的 3-组合有

$$\{2\cdot a,1\cdot b\},\{2\cdot a,1\cdot c\},\{1\cdot a,1\cdot b,1\cdot c\},\{1\cdot a,2\cdot c\},\{1\cdot b,2\cdot c\},\{3\cdot c\}$$

□

我们首先计算一个多重集的 r-组合数，设该多重集的所有元素的重复数均为无限的。

定理 3.5.1　令 S 为具有 k 种类型元素的一个多重集，每种元素均具有无限的重复数。则 S 的 r-组合的个数等于

K种类型，S的一r组合

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

证明： 令 S 的 k 种类型的元素为$a_1,a_2,\cdots,a_k$，满足

$$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$$

S 的任一个 r-组合均呈$\{x_1.a_1,x_2.a_2,\cdots,x_k.a_k\}$的形式，其中$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 皆为非负整数，且$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$。反过来，满足$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数的每个序列$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 对应 S 的一个 r-组合。因此，S 的 r-组合的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

的解的个数，其中$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是非负整数。我们证明，这些解的个数等于两种不同类型元素的多重集

$$T=\{r\cdot 1,(k-1)\cdot *\}$$

的排列的个数[㊀]。给定 T 的一个排列，$k-1$ 个 $*$ 把 r 个 1 分成 k 组。设第一个 $*$ 的左边有 x_1 个1，在第一个 $*$ 号和第二个 $*$ 号之间有 x_2 个1，…，在最后一个 $*$ 号的右边有 x_k 个1。于是，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是满足$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数。反之，给定非负整数$x_1,x_2,\cdots,x_k$，满足$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，将上述步骤倒推并构造 T 的排列[㊁]。于是，多重集 S 的 r-组合的个数等于多重集 T 的排列的个数，由定理3.4.2可知它等于

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=\binom{r+k-1}{r}$$ □

定理3.5.1的另一种表述方式为：

每种物体都可提供无限多个数的 k 种不同类型的元素的 r-组合的个数等于

$$\binom{r+k-1}{r}$$

我们注意，如果 S 的k 种元素的重复数都至少是r，那么定理3.5.1仍然成立。

例 一家面包房生产8种炸面饼圈。如果一盒内装有一打炸面饼圈，那么你能够买到多少种不同的盒装炸面饼圈？

12个

假设面包房现有大量各种（每种至少12个）面饼圈。由于我们假设盒中的面饼圈顺序与购买者无关，因此这是一个组合问题。不同盒装的数量等于每种元素都可提供无限多个数的8种类型元素的多重集的12-组合数。根据定理3.5.1，这个数等于

$\binom{12+8-1}{12}$

$$\binom{12+8-1}{12}=\binom{19}{12}$$ □

例 其项取自$1,2,\cdots,k$ 的长为 r 的非减序列的个数是多少？

对!!

㊀ 等价地，具有 r 个1和 $k-1$ 个0的长为 $r+k-1$ 的0和1的序列的个数。

㊁ 例如，如果 $k=4$ 和 $r=5$，则 T 的由 $*111**11$ 给出的排列对应方程$x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的由$x_1=0,x_2=3,x_3=0,x_4=2$给出的解。

要被计数的非减序列可以首先通过从多重集选择一个 r-组合

$$S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot k\}$$

然后再以递增顺序排列这些元素。这样的序列的个数等于 S 的 r-组合的个数，因此由定理 3.5.1 可知等于

$$\binom{r+k-1}{r}$$ □

在定理 3.5.1 的证明中已经看到，在具有 k 种不同类型元素的多重集 S 的 r-组合与方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

的非负整数解之间存在一一对应。在这种对应中，x_i 代表用于 r-组合的第 i 种元素的个数。对每种元素在 r-组合中出现的次数施加限制等价于对 x_i 施加限制。

例 令 S 是具有四种元素 a,b,c,d 的多重集 $\{10\cdot a,10\cdot b,10\cdot c,10\cdot d\}$。$S$ 的使得 4 种元素的每一种都至少出现一次的 10-组合的数目是多少？

本题答案是方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

的正整数解的个数。这里，x_1 代表在 10-组合中 a 的个数，x_2 代表在 10-组合中 b 的个数，x_3 代表在 10-组合中 c 的个数，x_4 代表在 10-组合中 d 的个数。由于重复数都等于 10，而 10 又是被计数的组合的长度，因此可以忽略这个重复数。进行变量代换：

$$y_1=x_1-1,y_2=x_2-1,y_3=x_3-1,y_4=x_4-1$$

则方程变为

$$y_1+y_2+y_3+y_4=6$$

既然这些 x_i 是正的，那么这些 y_i 就是非负的。由定理 3.5.1 可知新方程的非负整数解的个数是

$$\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}=84$$ □

例 继续考虑在定理 3.5.1 后面的面饼圈的例子，用类似的方法看到，装有面饼圈且这 8 种面饼圈中每种至少包含一个的不同盒数等于

$$\binom{4+8-1}{4}=\binom{11}{4}=330$$ □

在组合中每种元素出现的次数的一般下界也可以通过变量的变换来处理。

例 方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=20$$

的整数解的个数是多少？其中

$$x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 5$$

我们引入新的变量：

$$y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 5$$

此时方程变为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

诸 x_i 的下界能够满足当且仅当这些 y_i 是非负的。新方程的非负整数解的个数是

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$$

□

含有 k 种元素且重复数为$n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的多重集

$$S = \{n_1 . a_1, n_2 . a_2, \cdots, n_k . a_k\}$$

的 r-组合数的计数问题要更困难。S 的 r-组合数和方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

的整数解的个数相同，其中

$$0 \leqslant x_1 \leqslant n_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant n_2, \cdots, 0 \leqslant x_k \leqslant n_k$$

现在我们有诸 x_i 的上界，但它们不能以与下界相同的方式来处理。我们将在第 6 章指出容斥原理如何为这种情形提供满意的方法。

3.6　练习题

1. 对于性质ⅰ)和ⅱ)的四种组合中的每一种，计算四位数字可以是 1，2，3，4 或 5 的四位数的个数：
   ⅰ）这些数字是互异的。
   ⅱ）该数是偶数。
   注意，这里存在四个问题：∅（没有进一步的限制）；{ⅰ}（性质ⅰ)成立）；{ⅱ}(性质ⅱ)成立)；{ⅰ，ⅱ}(性质ⅰ)和性质ⅱ)同时成立)。
2. 如果所有同花牌都放在一起，那么对于 52 张一副的牌有多少种排序方法？
3. 一手牌（a poker hand —— 5 张牌）能有多少种处理方法？共有多少种不同的一手牌？
4. 下列各数各有多少互异正因子？
   ⅰ）$3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$。
   ⅱ）620。
   ⅲ）10^{10}。
5. 确定成为下列各数的因子的 10 的最大幂（等价地，用通常 10 为基的表示方法时尾部 0 的个数）：
   ⅰ）50!。
   ⅱ）1 000!。

6. 有多少使下列性质同时成立的大于 5 400 的整数？

　ⅰ）各位数字互异。

　ⅱ）数字 2 和 7 不出现。

7. 确定下列类型的一手牌（5 张牌）的数目。

　ⅰ）full houses（3 张一样大小的牌及 2 张相同点数的另外大小的牌）。

　ⅱ）顺牌（5 张点数相连的牌）。

　ⅲ）同花（5 张一样花色的牌）。

　ⅳ）同花顺（5 张点数相连的同样花色的牌）。

　ⅴ）恰好两个对（一对同样大小，另一对另外点数同样大小，再有一张另外大小的 5 张牌）。

　ⅵ）恰好一个对（一对同样大小，另外三张另外大小且互异点数的牌）。

8. 6 男 6 女围坐一个圆桌。如果男女交替围坐，可有多少种围坐方式？

9. 15 人围坐一个圆桌。如果 B 拒绝挨着 A 坐，有多少种围坐方式？
　如果 B 只拒绝坐在 A 的右侧，又有多少种围坐方式？

10. 从拥有 10 名男会员和 12 名女会员的一个俱乐部选出一个 5 人委员会。如果至少要包含 2 位女士，能够有多少种方法形成这个委员会？此外，如果俱乐部还有一位特定的男士和一位特定的女士拒绝进入该委员会一起工作，形成委员会的方式又有多少？

11. 从数集 $\{1,2,3,\cdots,20\}$ 中形成 3 个数的集合，如果没有 2 个相连的数字在同一个集合中，那么能够形成多少 3 个数的集合？

12. 从 15 个球员的集合中选人组成 11 个球员的足球队，其中 5 人只能踢后卫，8 人只能踢边卫，2 人既能踢后卫又能踢边卫。假设足球队有 7 个人踢边卫 4 个人踢后卫，确定足球队可能的组队方法数。

13. 学校有 100 名学生和 3 个宿舍 A，B 和 C，它们分别容纳25，35 和 40 人。

　ⅰ）为学生安排宿舍有多少种方法？

　ⅱ）设 100 个学生中有 50 名男生和 50 名女生，而宿舍 A 是全男生宿舍，宿舍 B 是全女生宿舍，宿舍 C 男女兼收。有多少种方法可为学生安排宿舍？

14. 教室有两排每排 8 个座位。现有学生 14 人，其中 5 人总坐在前排，4 人总坐在后排。有多少种方法将学生分派到座位上？

15. 在一个聚会上有 15 位男士和 20 位女士。

　ⅰ）有多少种方式形成 15 对男女？

　ⅱ）有多少种方式形成 10 对男女？

16. 用组合的论述但不要用如定理 3.3.1 中的公式，证明

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

17. 6 个没有区别的车放在 6×6 棋盘上，使没有两个车能够互相攻击的放置方法有多少？如果是 2 个红车 4 个蓝车，那么放置方法又是多少？

18. 2 个红车 4 个蓝车放在 8×8 棋盘上，使没有两个车可以互相攻击的摆放方法有多少？

19. 给定 8 个车，其中 5 个红车，3 个蓝车。

　ⅰ）将 8 个车放在 8×8 棋盘上，使没有两个车可以互相攻击的摆放方法有多少？

ⅱ）将 8 个车放在 12×12 棋盘上，使没有两个车可以互相攻击的摆放方法有多少？

20. 确定{0,1,2,…,9}的循环排列的个数，其中 0 和 9 不在对面（提示：计算 0 和 9 在对面的循环排列的个数）。

21. 单词 ADDRESSES 的字母有多少排列？这 9 个字母有多少 8-排列？

22. 竞走比赛在 4 个运动员之间进行。如果允许名次并列（甚至是 4 个人同时到达终点），那么比赛有多少种结束的方式？

23. 4 人打桥牌而一副牌共 52 张，开始时每人手里 13 张牌，桥牌开局时有多少种不同的状态？

24. 过山车有 5 个车厢，每个车厢 4 个座位，两个在前，两个在后。今有 20 人准备乘车，开始乘车时有多少种方式？若有 2 人想坐在不同的车厢，有多少种开始乘车的方式？

25. 大观览车有 5 个车厢，每个车厢有一排 4 个座位，今有 20 人准备乘车，开始乘车时的方式有多少种？若有 2 人想坐在不同的车厢，开始乘车的方式又有多少种？

26. 一群 mn 个人要被编入 m 个队里，每队 n 个运动员。

ⅰ）如果每队都有一个不同的名字，则确定编队的方法数。

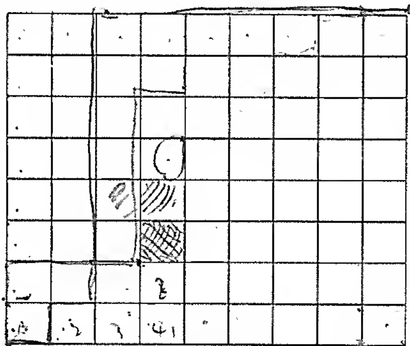
ⅱ）如果各队都没有名字，则确定编队的方法数。

27. 5 个没有区别的车放在 8×8 棋盘上，使没有车能够攻击别的车并且第一行和第一列都不能是空的摆放方法有多少？

28. 一位秘书在距离家以东 9 个街区、以北 8 个街区的一座大楼里工作。每天他都要步行 17 个街区去上班（见右图）。

ⅰ）对他来说可能有多少不同的路线？

ⅱ）如果在他家以东 4 个街区、以北 3 个街区开始向东方向的街区在水下（而他又不会游泳），则有多少条不同的路线（提示：计算使用水下这个街区的路线的数目）？



29. 令 S 是重复数为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的多重集，$n_1 = 1$。令 $n = n_2 + \cdots + n_k$。证明 S 的循环排列数等于

$$\frac{n!}{n_2! \cdots n_k!}$$

30. 我们用围绕一个桌子的循环排列的方式给 5 位男士、5 位女士和 1 条狗安排座位。如果男士不坐在男士旁边，女士也不坐在女士旁边，那么能有多少种方法安排座位？

31. 在 15 个队参加的足球锦标赛中，最好的 3 支球队将获得金杯、银杯和铜杯，最差的 3 支球队将被降到低一级的联赛比赛。如果分别获得金银铜杯的那些球队是相同的，而遭到降级的那些球队也都是相同的，那么我们认为锦标赛的两个结果是相同的。试问锦标赛可能有多少种不同的结果？

32. 确定多重集

$$S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$$

的 11-排列的个数。

33. 确定多重集

$$S=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$$

的 10-排列的个数。

34. 确定多重集

$$S=\{3\cdot a,3\cdot b,3\cdot c,3\cdot d\}$$

的 11-排列的个数。

35. 列出多重集

$$\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$$

的所有的 3-组合和 4-组合。

36. 确定具有 k 种不同物体且它们的重复数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的多重集的（任何大小的）组合的总数。

37. 一个面包店销售 6 个不同种类的酥皮糕点。假设该店每种糕点至少有 1 打，那么可能有多少种（装配成）不同打的酥皮糕点？如果在一盒中每种酥皮糕点至少有一块，又能有多少打？

38. 方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=30$$

有多少满足$x_1\geqslant 2,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant -5,x_4\geqslant 8$ 的整数解？

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行，占据 20 个位置：

$$|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|$$

要从中选出 6 根。

ⅰ）有多少种选择？

ⅱ）如果所选出的棍中没有两根是相连的，那么又有多少种选择？

ⅲ）如果在每一对所选的棍之间必须至少有两根棍，有多少种选择？

40. 有 n 根棍列成一行并将从中选出 k 根。

ⅰ）有多少种选择？

ⅱ）如果所选出的棍中没有两根是相连的，那么又有多少种选择？

ⅲ）如果在每一对所选的棍之间必须至少有 l 根棍，有多少种选择？

41. 在三个孩子之间分发 12 个完全相同的苹果和 1 个橘子，使每个孩子至少得到一个水果，有多少种分发方法？

42. 将 10 罐橘子汁、1 罐柠檬汁和 1 罐酸橙汁分发给 4 位口渴的学生，并要求每位学生至少得到一罐饮料，并且柠檬汁和酸橙汁要分给不同的学生。确定分发的方法数。

43. 确定多重集

$$\{1\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$$

的 r-组合的个数。

44. 证明，在 k 个孩子当中，分发 n 件不同的物体的分发方法数等于k^n。

45. 20 本书要放在 5 个书架上，每个书架至少能够存放 20 本书。

ⅰ）如果只关心书架上书的数量（而不关心哪本书在什么地方），那么有多少种不同的摆放方法？

ⅱ）如果关心书存放的地方但不关心书在书架上的顺序，那么有多少种不同的摆放方法？

ⅲ）如果书架上书的顺序确实需要考虑，那么又有多少种不同的摆放方法？

46. ⅰ）在一次聚会上有偶数 $2n$ 个人，他们成对交谈，每一个人都和某个别人交谈（因此是 n 对）。$2n$ 个人像这样交谈能有多少种不同的方式？

ⅱ）假设在一次聚会上有奇数 $2n+1$ 个人，除去一人外，每一个人都和某个人交谈。有多少种分对交谈的方法？

47. 有 $2n+1$ 本相同的书要放入带有 3 个书架的书柜中，如果每一对书架一共包含的书的数量大于另一个书架上的书的数量，有多少种方法可把书放入书柜中？

48. 证明 m 个 A 和至少 n 个 B 的排列的数目等于 $\binom{m+n+1}{m+1}$。

49. 证明最多 m 个 A 及最多 n 个 B 的排列数等于 $\binom{m+n+2}{m+1}-2$。

50. 将 5 个相同的车放入 8×8 棋盘的方格中，使得其中的 4 个车形成一个矩形，其摆放方法有多少种？

51. 考虑大小为 $2n$ 的多重集 $\{n\cdot a, 1, 2, 3, \cdots, n\}$，确定它的 n-组合数。

52. 考虑大小为 $3n+1$ 的多重集 $\{n\cdot a, n\cdot b, 1, 2, 3, \cdots, n+1\}$，确定它的 n-组合数。

53. 在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列和塔状集 $A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n$ 间建立一一对应，其中 $|A_k|=k$，$k=0, 1, 2, \cdots, n$。

54. 确定形式 $\varnothing\subseteq A\subseteq B\subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ 的塔数。

55. 单词 PNEUMONOULTRAMICROSCOPICSILICOVOLCANOCONIOSIS 中的字母有多少排列？按照某种说法，这个单词是英语中最长的单词。

第4章 生成排列和组合

本章探讨排列和组合的一些不与计数直接相关的性质。我们讨论排列和组合的某些排序方案以及执行这些方案的算法。还要引入集合关系的概念并讨论两个重要的例子：偏序关系和等价关系。

4.1 生成排列

由前 n 个正整数组成的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $n!$ 个排列，即使只要 n 稍大，这个阶乘的值也相当大。例如，15！比 1 000 000 000 000 还要大。Stirling 公式给出一个有用且容易的计算 $n!$ 的方法：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

其中 $\pi=3.141\cdots$，$e=2.718\cdots$ 是自然对数的基底。随着 n 无限地增长，$n!$ 与 $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 的比值趋向于 1。这个结论的证明可以在许多高等微积分的教科书中找到，也可在 Feller 的文章中找到[1]。

在许多不同的场合，排列都有着理论与应用上的重要性。对于计算机科学中的排序技术而言，排列对应未排序的输入数据。我们在本小节考虑一种简单而又优美的生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 所有排列的算法。

因为 n 个元素集合的排列的个数很大，为了使算法在计算机上有效地运行，算法的每一步执行起来必须简单。算法的结果应该是一个表，该表包含 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的每一个排列且每一个排列只出现一次。下面将要描述的算法应该具有这些特性。这个算法由 Johnson[2] 和 Trotter[3] 独立地发现，并被 Gardner[4] 在一篇通俗文章中作了描述。该算法基于下面的观察：

如果将整数 n 从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列中删除，那么结果则是 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的一个排列。

集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的同一个排列可以从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同的排列得到。例如，若 $n=5$，我们从排列 3，4，1，5，2 中删除 5，则得到 3，4，1，2。可是，3，4，1，2 也可以从 3，5，4，1，2 中删除 5 而得到。恰好存在 $\{1,2,3,4,5\}$ 的 5 个排列，当删除 5 以后产生 3，4，1，2，即

---

[1] W.Feller：A direct proof of Stirling's formula，*American Mathematical Monthly*，74（1967），1223-1225。

[2] S.M.Johnson：Generation of permutations by adjacent transpositions，*Mathematics of Computation*，17（1963），282-285。

[3] H.F.Trotter：Algorithm 115，*Communications of the Association for Computing Machinery*，5（1962），434-435。

[4] M.Gardner：Mathematical Games，*Scientific American*，November（1974），122-125。

5, 3, 4, 1, 2
3, 5, 4, 1, 2
3, 4, 5, 1, 2
3, 4, 1, 5, 2
3, 4, 1, 2, 5

更一般地，$\{1,2,\cdots,n-1\}$的每一个排列都可以由$\{1,2,\cdots,n\}$的恰好 n 个排列中删除 n 而得到。反过来看，给定$\{1,2,\cdots,n-1\}$的一个排列，恰好存在 n 种方法将 n 插入到该排列中而得到$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列。因此，给定$\{1,2,\cdots,n-1\}$的$(n-1)!$ 个排列的表，我们能够通过以所有可能的方式系统地将 n 插入到$\{1,2,\cdots,n-1\}$的每一个排列中，从而得到$\{1,2,\cdots,n\}$的 $n!$ 个排列的表。现在我们给出这种算法的归纳描述。它从$\{1,2,\cdots,n-1\}$的排列生成$\{1,2,\cdots,n\}$的排列。因此，从$\{1\}$的唯一的一个排列开始，建立$\{1,2\}$的所有排列，然后是$\{1,2,3\}$的所有排列等等，直到最后得到$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列。

$n=2$：为了生成$\{1,2\}$的所有排列，把$\{1\}$的唯一的排列写两遍并交错插入 2：

	1	**2**
2	1	

第二个排列由第一个排列交换这两个数而得到。

$n=3$：为了生成$\{1,2,3\}$的所有排列，将$\{1,2\}$的每一个排列以上面生成的顺序写三次并交替插入 3 如下：

	1		2	**3**
	1	**3**	2	
3	1		2	
3	2		1	
	2	**3**	1	
	2		1	**3**

可以看到，除第一个外的每一个排列都由前一个排列通过交换两个相邻的数而得到。当 3 固定时，如在生成的序列中的第三个排列到第四个排列那样，交换来自对应于 $n=2$ 时的交换。注意，在所生成的最后的排列中通过交换 1 和 2，得到第一个排列，即 123。

$n=4$：为了生成$\{1,2,3,4\}$的所有排列，把 1，2，3 的每一个排列以上面生成的顺序写四遍，并插入 4 如下：

	1		2		3	**4**
	1		2	**4**	3	
	1	**4**	2		3	
4	1		2		3	
4	1		3		2	
	1	**4**	3		2	
	1		3	**4**	2	
	1		3		2	**4**

3 1 2 4

3 1 4 2

3 4 1 2

4 3 1 2

4 3 2 1

3 4 2 1

3 2 4 1

3 2 1 4

2 3 1 4

2 3 4 1

2 4 3 1

4 2 3 1

4 2 1 3

2 4 1 3

2 1 4 3

2 1 3 4

我们还可以观察到，每一个排列都是由前一个排列交换两个相邻的数而得到。当 4 固定时，如在生成的序列中的第 4 个排列到第 5 个排列、第 8 个排列到第 9 个排列、第 12 个排列到第 13 个排列、第 16 个排列到第 17 个排列以及第 20 个排列到第 21 个排列那样，交换来自对应于 $n=3$ 时的交换。还注意到，在所生成的最后一个排列中交换 1 和 2 后就得到第一个排列 1234。

现在应该清楚对于任意的 n 如何进行生成所有排列的过程。使用早先的评注，通过对 n 的归纳可知，该算法恰好生成$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列，其中的每个排列都只出现一次。此外，除第一个排列外，每一个都通过前一个排列交换两个相邻的数而得到。所生成的第一个排列是 $12\cdots n$。这对于 $n=1$ 是成立的，并由归纳法可以推出，因为在算法中 n 是第一个被放到最右边的数。假设 $n\geqslant 2$，则所生成的最后一个排列是 $213\cdots n$。这个观察结果可以通过对 n 的归纳法验证如下：如果 $n=2$，那么最后生成的排列是 21。现在假设 $n\geqslant 3$ 且 $213\cdots(n-1)$是关于$\{1,2,\cdots,n-1\}$最后一个所生成的排列。存在$\{1,2,\cdots,n-1\}$的$(n-1)!$个排列（偶数个排列），并由此可知；在应用该算法中整数 n 终止在排列的最右边。因此，$213\cdots n$ 是所生成的最后一个排列。由于最后一个排列是 $213\cdots n$，交换该最后的排列中的 1 和 2 就得到第一个排列。因此，算法实际上是循环的。

为了用刚刚描述的方法生成$\{1,2,\cdots,n\}$的所有的排列，必须首先生成$\{1,2,\cdots,n-1\}$的所有排列。而为了生成$\{1,2,\cdots,n-1\}$的所有排列，又必须先要生成$\{1,2,\cdots,n-2\}$的所有排列等等。我们想做而且能做的就是一次一个地生成这些排列，为了生成下一个排列而仅仅使用当前的排列。下面我们指出，用这种方法以与上面相同的顺序怎么能够生成$\{1,2,\cdots,n\}$的排列。不必保留所有排列的列表就能够简单地用后面的排列覆盖当前的排列。为此，需要确定哪一对相邻的整数需要交换以形成表中的排列。我们给出的特殊的描述取自 Even 的著作[⊖]。

⊖ S. Even: *Algorithmic Combinatorics*, Macmillan, New York, 1973。

给定一个整数 k，通过在其上画一个指向左或向右的箭头来表示一个方向：$\overleftarrow{k}$ 或 $\overrightarrow{k}$。考虑 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，其中的每一个整数都给定一个方向。如果一个整数 k 的箭头指向一个与其相邻但比它要小的整数，那么这个整数 k 就叫做是活动的。例如，对于

$$\overrightarrow{2}\ \overrightarrow{6}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{5}\ \overrightarrow{4}$$

只有 3、5 和 6 是活动的。由此可知，1 绝不可能是活动的，因为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中不存在比 1 还小的整数。除下面两种情形外，整数 n 总是活动的：

（ⅰ）n 是第一个整数而它的箭头指向左边：$\overleftarrow{n}\cdots$

（ⅱ）n 是最后一个整数而它的箭头指向右边：$\cdots\overrightarrow{n}$

这是因为只要 n 的箭头指向一个整数它就是活动的，因为 n 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中最大的整数。现在，我们可以描述直接生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的这些排列的算法了。

生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列的算法

从 $\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\cdots\overleftarrow{n}$ 开始。

当存在一个活动的整数时，做

（ⅰ）求出最大的活动整数 m。

（ⅱ）交换 m 和其箭头所指向的与其相邻的整数。

（ⅲ）交换所有满足 $p>m$ 的整数 p 的方向。

我们就 $n=4$ 叙述该算法。结果用两列显示，第一列给出前 12 个排列。

$$
\begin{array}{cc}
\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\overleftarrow{4} & \overrightarrow{4}\overrightarrow{3}\overleftarrow{2}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{4}\overleftarrow{3} & \overrightarrow{3}\overrightarrow{4}\overleftarrow{2}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1}\overleftarrow{4}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3} & \overrightarrow{3}\overleftarrow{2}\overrightarrow{4}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{4}\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3} & \overrightarrow{3}\overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overrightarrow{4} \\
\overrightarrow{4}\overleftarrow{1}\overleftarrow{3}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overrightarrow{3}\overleftarrow{1}\overleftarrow{4} \\
\overleftarrow{1}\overrightarrow{4}\overleftarrow{3}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overrightarrow{3}\overleftarrow{4}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1}\overleftarrow{3}\overrightarrow{4}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overleftarrow{4}\overrightarrow{3}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{1}\overleftarrow{3}\overleftarrow{2}\overrightarrow{4} & \overleftarrow{4}\overleftarrow{2}\overrightarrow{3}\overleftarrow{1} \\
\overleftarrow{3}\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{4} & \overrightarrow{4}\overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{3}\overleftarrow{1}\overleftarrow{4}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overrightarrow{4}\overleftarrow{1}\overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{3}\overleftarrow{4}\overleftarrow{1}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overrightarrow{4}\overrightarrow{3} \\
\overleftarrow{4}\overleftarrow{3}\overleftarrow{1}\overleftarrow{2} & \overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overrightarrow{3}\overrightarrow{4}
\end{array}
$$

由于在 $\overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overrightarrow{3}\overrightarrow{4}$ 中没有活动的整数，算法终止。

通过对 n 的归纳法可以得知，这个算法生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有的排列，并且具有与前

面的方法相同的顺序。我们叙述从 $n=3$ 到 $n=4$ 的归纳法中的一步。从$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{4}$开始，其中 4 是最大的活动整数。该整数 4 始终是活动的，直到达到最左边位置为止。此时 4 已经以各种可能的方式插入到$\{1,2,3\}$的排列 123 中。现在 4 又不再是活动的。最大的活动整数是 3，它和$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}$中的最大的活动整数是相同的。然后 3 和 2 交换位置且 4 改变方向。这个交换与$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}$中出现的交换是相同的。现在的结果变成$\overrightarrow{4}\,\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{2}$；此时 4 又变成活动的并将活动状态保持到该 4 到达最右边为止。然后再进行交换，该交换与发生在$\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{2}$中的交换相同。算法如此继续进行，4 以各种可能的方式交错地插入到$\{1,2,3\}$的每一个排列中。

对于$\{1,2,\cdots,n\}$的一个给定的排列，有可能确定该排列在前述算法的哪一步出现。反之，也能够确定哪一个排列出现在给定的一步中。关于这一点的深入分析，参见 Even 的书[㊀]。

4.2　排列中的逆序

本节我们讨论借助于逆序来描述排列的方法，该方法由 Hall 发现[㊁]。逆序的概念是一个老概念，它在矩阵的行列式理论中起着重要的作用。

令 $i_1i_2\cdots i_n$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列。如果 $k<l$ 且 $i_k>i_l$，则数对(i_k,i_l)叫做一个逆序。因此，排列中的一个逆序对应着不是以自然数的顺序出现的一对数。例如，排列 31524 有 4 个逆序，即（3，1），（3，2），（5，2），（5，4）。集合$\{1,2,\cdots,n\}$唯一没有逆序的排列是 $12\cdots n$。对于一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，令 a_j 表示逆序数，它的第二个成分是 j。换句话说，

a_j 等于在排列中先于 j 但大于 j 的整数的个数；它量度 j 反序的程度。

数值序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

叫做排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的*逆序列*。数 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 量度一个排列的无序的程度。

例　排列 31524 的逆序列是

$$1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0$$ □

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序列 a_1，a_2，…，a_n 满足条件

$$0\leqslant a_1\leqslant n-1,\ 0\leqslant a_2\leqslant n-2,\ \cdots,\ 0\leqslant a_{n-1}\leqslant 1,\ a_n=0$$

这是因为对于每个 $k=1,2,\cdots,n$，在集合$\{1,2,\cdots,n\}$中存在 $n-k$ 个整数大于 k。由乘法原理我们看到，满足

$$0\leqslant b_1\leqslant n-1,\ 0\leqslant b_2\leqslant n-2,\ \cdots,\ 0\leqslant b_{n-1}\leqslant 1,\ b_n=0 \tag{4-1}$$

的整数 b_1，b_2，…，b_n 的序列的数目等于 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$。

因此，存在的$\{1,2,\cdots,n\}$的排列和存在的可能的逆序列一样多。这就提出（但还不是

㊀ 见上一个的脚注。

㊁ M.Hall, Jr.: *Proceedings Symposium in pure Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 6 (1963), 203。

证明）$\{1,2,\cdots,n\}$的不同的排列有不同的逆序列。如果我们能够证明满足式（4-1）的整数 b_1，b_2，…，b_n 的每一个序列都是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列的逆序列，那么（从鸽巢原理）就推出不同的排列有不同的逆序列。

定理 4.2.1 令 b_1，b_2，…，b_n 是满足

$$0\leqslant b_1\leqslant n-1,\ 0\leqslant b_2\leqslant n-2,\ \cdots,\ 0\leqslant b_{n-1}\leqslant 1,\ b_n=0$$

的整数的序列。那么，存在$\{1,2,\cdots,n\}$的唯一的一个排列，它的逆序列是 b_1，b_2，…，b_n。

证明：我们描述两种方法唯一地构造一个排列，使它的逆序列是 b_1，b_2，…，b_n。

算法Ⅰ　从逆序列构造一个排列

n：写出 n。

n－1：考虑 b_{n-1}。我们知道 $0\leqslant b_{n-1}\leqslant 1$。如果 $b_{n-1}=0$，那么 $n-1$ 必须放在 n 的前面。如果 $b_{n-1}=1$，那么 $n-1$ 必须放在 n 的后面。

n－2：考虑 b_{n-2}。我们知道 $0\leqslant b_{n-2}\leqslant 2$。如果 $b_{n-2}=0$，那么 $n-2$ 必须放在从 $n-1$ 步得到的两个数的前面。如果 $b_{n-2}=1$，那么 $n-2$ 必须放在从 $n-1$ 步得到的两个数之间。如果 $b_{n-2}=2$，那么 $n-2$ 必须放在从 $n-1$ 步得到的两个数的后面。

⋮

n－k：（一般的一步）考虑 b_{n-k}。我们知道 $0\leqslant b_{n-k}\leqslant k$。在从步 n 直到步 $n-k+1$ 中，k 个数 n，$n-1$，…，$n-k+1$ 都已经按所要求的顺序放好。如果 $b_{n-k}=0$，那么 $n-k$ 必须放在从 $n-k+1$ 步得到的所有的数的前面。如果 $b_{n-k}=1$，那么 $n-k$ 必须放在前两个数之间…。如果 $b_{n-k}=k$，那么 $n-k$ 必须放在所有的数的后面。

⋮

1：我们必须把 1 放在 $n-1$ 步所构造的序列的第 b_1 个数的后面。

当执行时，步骤 n，$n-1$，$n-2$，…，1 确定了$\{1,2,\cdots,n\}$的唯一的一个排列，该排列的逆序列是 b_1，b_2，…，b_n。这个算法的缺点是，排列中的每一个整数的定位不到最后是不得而知的；整个算法只有这些整数的相对位置保持固定。

在第二个算法中[1]所要确定的正是排列中的整数 1，2，…，n 的位置。

算法Ⅱ　从逆序列构造一个排列

从 n 个空位置开始，从左到右把这些位置标为 1，2，…，n。

1：由于在排列中要有 b_1 个整数在 1 的前面，因此必须把 1 放在位置号为 b_1+1 的位置上。

2：由于在排列中要有 b_2 个比 2 大的整数在 2 的前面，而且这些整数还没有被插进来，因此必须给这些数留出 b_2 个空位置。于是，把 2 放在第 b_2+1 的空位置上。

⋮

k：（一般的一步）由于在排列中要有 b_k 个整数在 k 的前面，而且这些整数还没有被插进来，因此必须给这些数留出 b_k 个空位置。在本步骤开始时空位置的个数是 $n-(k-1)=n-k+1$。我们把 k 放在从左边数的第(b_k+1)的空位置上。既然 $b_k\leqslant n-k$，

---

[1] 这个算法由 J.Csima 引起我的注意。

因此就有 $b_k+1\leqslant n-k+1$，从而这样一个空位置就被确定下来。

⋮

n：把 n 放在剩下的一个空位置上。

按上面描述的顺序执行步骤 1，2，…，n 后，得到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 唯一的排列，已知它的逆序列就是 b_1，b_2，…，b_n。 □

例　确定 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 的排列，已知它的逆序列是 5，3，4，0，2，1，1，0。

按照给定的逆序列执行定理 4.2.1 证明中的两个算法的各步骤，产生下列结果

算法 I

8:	8
7:	87
6:	867
5:	8657
4:	48657
3:	486537
2:	4862537
1:	48625137

因此，排列为 48625137。

算法 II

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1:						1		
2:				2		1		
3:				2		1	3	
4:	4			2		1	3	
5:	4			2	5	1	3	
6:	4		6	2	5	1	3	
7:	4		6	2	5	1	3	7
8:	4	8	6	2	5	1	3	7

我们又得到这个排列 48625137。 □

由定理 4.2.1 可知，每个排列与所相联系的逆序列之间的对应是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列和满足

$$0\leqslant b_1\leqslant n-1,\ 0\leqslant b_2\leqslant n-2,\ \cdots,\ 0\leqslant b_{n-1}\leqslant 1,\ b_n=0$$

的整数序列 b_1，b_2，…，b_n 之间的一一对应。因此，一个排列通过指定它的逆序列而唯一确定。把逆序列看成是这个排列的"代码"（在定理 4.2.1 的证明中我们已经给出两种方法来"破解这个代码"）。

在一个排列和它的逆序列之间存在着微妙的差别需要辨别。在选择 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个

排列时必须进行 n 次选择，排列的每一项选择一次。用 n 种方式中的任意一种方式选择第一项，然后用 $n-1$ 种方式中的任意一种方式选择第二项。注意，虽然第二项的选择个数 $n-1$ 与第一项的选择无关，但是第二项选择本身却并不独立于第一项（不管第一项已经选择了什么，第二项就不能再选它）。选择第 k 项时也有同样的情况发生。对于第 k 项有 $n-(k-1)$ 种选择，但实际选择却依赖于前 $k-1$ 项选择了什么。

可以将上面的描述与选取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 排列的逆序列 b_1，b_2，…，b_n 进行比较。对于 b_1 可以选择 n 个整数 0，1，…，$n-1$ 中的任一个。对于 b_2 可以选择 $n-1$ 个整数 0，1，…，$n-2$ 中的任一个，它并不在乎对于 b_1 选择是什么。一般地，对于 b_k 选择 $n-(k-1)$ 个整数 0，1，…，$n-k$ 中的任意一个，而并不介意对于 b_1，b_2，…，b_{k-1}，我们的选择都是些什么。因此，逆序列通过独立的选择代替相关的选择。

习惯上，按照其逆序个数是偶数还是奇数而把 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为是偶的或奇的。排列的符号按照排列是偶的还是奇的而被定义为 +1 或 −1。排列的符号在矩阵的行列式理论中很重要，其中一个 $n\times n$ 矩阵

$$A=[a_{ij}]\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

的行列式定义为

$$\det(A)=\sum\varepsilon(i_1i_2\cdots i_n)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这里求和记号是对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和，而 $\varepsilon(i_1i_2\cdots i_n)$ 等于 $i_1i_2\cdots i_n$ 的符号[⊖]。

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 有逆序列 b_1，b_2，…，b_n 且 $k=b_1+b_2+\cdots+b_n$ 为逆序数，那么 $i_1i_2\cdots i_n$ 可以通过 k 次连续交换相邻的数而化成 $12\cdots n$。首先连续交换 1 和其左边的 b_1 个数。然后连续交换 2 和 2 左边比 2 大的数，等等。用这种方法就可在进行 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 次交换后得到 $12\cdots n$。

例　通过连续交换相邻的数将排列 361245 变成 123456。

逆序列为 220110。连续交换的结果为：

```
3 6 1 2 4 5
3 1 6 2 4 5
1 3 6 2 4 5
1 3 2 6 4 5
1 2 3 6 4 5
1 2 3 4 6 5
1 2 3 4 5 6
```

□

这个过程是计算机科学中一种普通的排序过程的例子。排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的元素对应未排

⊖ 把 $n\times n$ 矩阵想象成 n 行 n 列的棋盘，盘中的方块用数填入，行列式公式中的求和的这些项对应着将 n 个非攻击型车放到棋盘上的 n! 种方式。

序的数据。对于更有效的排序方法和它们的分析，读者可参考 Knuth 的著述。[1]

4.3　生成组合

令 S 是 n 个元素的集合。为了下面分析清楚起见，取 S 为集合

$$S=\{x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0\}$$

现在我们寻找一种生成 S 所有 2^n 个组合（子集）的算法。这就是说，要找一个将 S 的所有组合列出的系统过程。算法的结果应该包含 S 的所有的组合（并且只是 S 的组合），而且没有重复。因此，根据定理 3.3.3，列出的组合将共有 2^n 个。

给定 S 的一个组合 A，则每一个元素 x_i 不是属于 A 就是不属于 A。如果用 1 表示属于，用 0 表示不属于，那么就能够用 2^n 个 0 和 1 的 n 元组

$$(a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0)=a_{n-1}\cdots a_1a_0$$

区分 S 的 2^n 个组合[2]。对于每个 $i=0, 1, \cdots, n-1$，令 n 元组的第 i 项 a_i 对应元素 x_i。例如，当 $n=3$ 时，$2^3=8$ 个组合以及它们对应的 3 元组如下：

	a_2	a_1	a_0
$\varnothing$	0	0	0
$\{x_0\}$	0	0	1
$\{x_1\}$	0	1	0
$\{x_1, x_0\}$	0	1	1
$\{x_2\}$	1	0	0
$\{x_2, x_0\}$	1	0	1
$\{x_2, x_1\}$	1	1	0
$\{x_2, x_1, x_0\}$	1	1	1

例　令 $S=\{x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1,x_0\}$。对应于组合 $\{x_5,x_4,x_2,x_0\}$ 的 7 元组 0110101。对应于 7 元组 1010001 的组合是 $\{x_6, x_4, x_0\}$。　□

由于 n 个元素集合的组合可以用 0 和 1 的 n 元组确定，为了生成 n 个元素的集合的所有组合，只要能够描述以表的形式写出 0 和 1 的 2^n 个 n 元组的系统的过程也就足够了。现在每一个 n 元组都可以看作是基为 2 的一个数[3]。例如，10011 是整数 19 的二进制数，因为

$$19=1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

一般地，给定一个从 0 到 2^n-1 的整数 m，则数 m 可以由如下形式表示

$$m=a_{n-1}\times2^{n-1}+a_{n-2}\times2^{n-2}+\cdots+a_1\times2^1+a_0\times2^0$$

其中每个 a_i 是 0 或 1。它的二进制数是

$$a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$$

反之，由于

---

[1] D.E.Knuth: *Sorting and Searching*. Volume 3 of *The Art of Computer Programming*; Addison－Wesley, Reading, MA (1973)。

[2] 用 3.3 节的语言：我们用多重集 $\{n\cdot0, n\cdot1\}$ 的 n-排列来区分这些组合。

[3] 也见 1.7 节。

$$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1+2^0=2^n-1$$

上述形式的每一个表达式都有一个值，该值等于 0 到 2^{n-1}之间的一个整数。因此，0 和 1 的 n 元组与整数 0，1，…，2^n-1 之间存在一一对应。注意　在写出从 0 到 2^n-1 之间的一个整数的二进制数的时候，我们的习惯是使用恰好 n 个数字，因此，如果必要，则可包含一些初始的 0，而这些 0 通常是没有的。

例　令 $n=7$。数 29 在 0 和 $2^7-1=127$ 之间并且可以表示成

$$29=0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$$

因此，29 有一个由 0011101 给出的 7 位数字的二进制表示并且对应集合

$$S=\{x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1,x_0\}$$

的组合$\{x_4,x_3,x_2,x_0\}$。　□

如何生成$S=\{x_{n-1},\cdots,x_1,x_0\}$的 2^n 个组合呢？或者等价地说，如何生成 0 和 1 的 2^n 个 n 元组呢？这个答案现在变得简单了。以大小递增的顺序写出从 0 到 2^n-1 的数，但要用二进制的形式，使用基为 2 的运算每次加 1。这就是前面生成 0 和 1 的 3 元组的方法。

例　生成 0 和 1 的 4 元组。

数	二进制数
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

□

例　使用上面描述的方案，紧接在组合$\{x_6,x_4,x_2,x_1,x_0\}$后面的$\{x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1,x_0\}$的组合是什么？

组合$\{x_6,x_4,x_2,x_1,x_0\}$对应二进制数 1010111。使用基为 2 的运算，看到下一个组合对应

$$\begin{array}{r} 1010111 \\ + \qquad 1 \\ \hline 1011000 \end{array}$$

因此是组合$\{x_6, x_4, x_3\}$。由于

$$1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=87$$

则组合$\{x_6, x_4, x_2, x_1, x_0\}$为表上的 87。表上的第 88 位置上的组合是$\{x_6, x_4, x_3\}$。注意表上的位置以 0 开始。占据第 0 个位置的组合总是空集。例如，当我们说表上的第 5 个组合，那么我们指的是表上对应数 5 的组合，而不是对应数 4 的组合。在表上的第 5 个组合的前面有五个组合。如果这一点还不清楚，那么下一个例子应该能够阐明我们的约定。 □

例 $S=\{x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$的哪个组合是表的第 108 组合？

首先求出 108 的基为 2 的数

$$108=1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$$

108 的二进制数是

$$1101100$$

因此，这个组合为$\{x_6, x_5, x_3, x_2\}$。哪个组合直接先于这个组合呢？简单地进行二进制减法：

$$\begin{array}{r} 1101100 \\ - \qquad 1 \\ \hline 1101011 \end{array}$$

它对应组合 $\{x_6,\ x_5,\ x_3,\ x_1,\ x_0\}$。 □

现在以紧凑的方式描述生成 n 个元素的集合的组合算法。描述是以 0 和 1 的 n 元组的形式进行的。算法中给出的连续法则是使用基为 2 的运算加法的结果。

生成$\{x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0\}$组合的基 2 算法

从 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0=0\cdots00$ 开始。

当 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0\neq1\cdots11$ 时，做：

（i）求出使得 $a_j=0$ 的最小的整数 j（在 $n-1$ 和 0 之间）。

（ii）用 1 代替 a_j 并用 0 代替 a_{j-1}，…，a_0 中的每一个（由我们对 j 的选择可知，在用 0 代替以前它们都等于 1）。

当 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0=1\cdots11$ 时算法结束，它是在结果列表中的最后的二进制 n 元组。

通过基 2 的生成方案所产生的 0 和 1 的 n 元组的顺序称为 n 元组的字典序。在这种顺序下，假设表中有两个 n 元组 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0$ 和 $b_{n-1}\cdots b_1 b_0$，从左边开始，出现第一个位置不同，譬如 j，是 $a_j=0$ 而 $b_j=1$，那么 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0$ 就出现在另一个 n 元组 $b_{n-1}\cdots b_1 b_0$ 的前面（也就是说，由 $a_{n-1}\cdots a_1 a_0$ 给出的基为 2 的数小于由 $b_{n-1}\cdots b_1 b_0$ 给出的基为 2 的数）。在 0 作为第一个"字母"而 1 作为第二个"字母"的字母表中，把 n 元组看成表中长度为 n 的"单词"，字典序就是这些单词出现在字典中的顺序。

把 n 元组看作集合$\{x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0\}$的组合，那么对于每一个满足 $n-1>j$ 的 j，

$\{x_j, \cdots, x_1, x_0\}$的所有的组合先于至少含有 x_{n-1}，…，x_{j+1}中一个元素的那些组合。由于这个原因，有时 0 和 1 的 n 元组的字典序若被看作是集合$\{x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0\}$的组合的顺序也叫做组合的压缩序。我们用压缩序将当前那些元素的所有组合列在引进一个新元素后的组合前面。集合 $\{x_3=4, x_2=3, x_1=2, x_0=1\}$ 的诸组合的压缩序在下面列出。这对应前面（字典序）列出的二进制 4 元组。

∅	4
1	1，4
2	2，4
1，2	1，2，4
3	3，4
1，3	1，3，4
2，3	2，3，4
1，2，3	1，2，3，4

以压缩序排出的$\{1,2,3,4\}$的组合

注意，在这种排序中所有不包含 4 的组合是如何排在包含 4 的组合前面的。在不包含 4 的组合中，不包含 3 的组合排在包含 3 的组合前面。在既不包含 4 也不包含 3 的组合中，那些不包含 2 的组合排在包含 2 的组合前面。

在组合的压缩序中，一个组合的直接后继可能和这个组合本身大不一样。组合 $A=\{x_6, x_4, x_3\}$（等价地，7 元组 1011000）在组合 $B=\{x_6, x_4, x_2, x_1, x_0\}$（等价地，1010111）的下一位置，但与 B 相比有 4 处不同的地方，因为 A 包含 x_3（B 不包含），而 B 包含 x_2，x_1 和 x_0（A 不包含）。这就提出要考虑下面的问题：能否以不同的顺序生成 n 个元素集合的组合，使得一个组合的直接后继与这个组合尽可能小地不同？尽可能小在这里指的是一个组合的直接后继或者通过增加一个新元素或者通过删除一个老元素但不是增删同时进行而得到；简言之，一进或者一出。由于诸多原因，这种方案会是重要的，尤其是在生成所有组合的时候误差出现的机会会更小。

例　令 $S=\{x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0\}$，考虑 S 的组合及 $n=1, 2, 3$ 对应的 n 元组的下述列表。

$n=1$

∅	0
$\{x_0\}$	1

$n=2$

∅	0 0
$\{x_0\}$	0 1
$\{x_1, x_0\}$	1 1
$\{x_1\}$	1 0

$n=3$

∅	0 0 0
$\{x_0\}$	0 0 1

$\{x_1, x_0\}$	0	1	1
$\{x_1\}$	0	1	0
$\{x_2, x_1\}$	1	1	0
$\{x_2, x_1, x_0\}$	1	1	1
$\{x_2, x_0\}$	1	0	1
$\{x_2\}$	1	0	0

在每一个列表中，从一个组合到下一个组合的转换是通过插入一个新元素或者移走一个已经存在的元素但不是两者都做而得到的。用 0 和 1 的 n 元组术语来说，把 0 变成 1 或者把 1 变成 0，但不是两者同时变。 □

现在做进一步的表示，这次是几何的表示。我们把 0 和 1 的一个 n 元组当作是 n 维空间一个点的坐标。于是，对于 $n=1$，这种表示就是一条直线上的点；对于 $n=2$，则用 2 维空间或平面上的点表示；对于 $n=3$，这种表示用的是 3 维空间中的点。

例 令 $n=1$。0 和 1 的 1 元组对应单位线段的两个端点或两头，如图 4-1 所示。 □



图 4-1

例 令 $n=2$。0 和 1 的 2 元组对应单位正方形的 4 个角上的点，如图 4-2 所示。 □

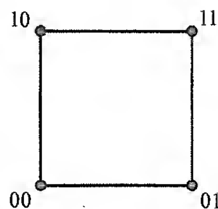


图 4-2

例 令 $n=3$。0 和 1 的 3 元组对应单位正方体的 8 个角上的点，如图 4-3 所示。 □

注意，在上面的三个例子中，每两个角点间当它们的坐标只有一处不同时恰好有一条边。这正是在生成 0 和 1 的 n 元组时要寻找的特点！

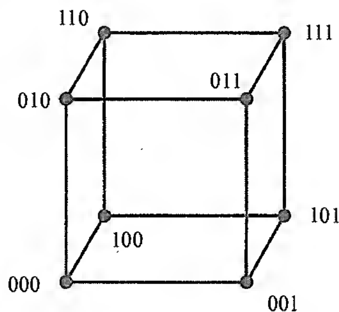


图 4-3

可以推广到任意的 n。单位 n-方体（一个 1-方体是一条线段，一个 2-方体是一个正方形，一个 3-方体就是通常的立方体）有 2^n 个角，它们的坐标是 0 和 1 的 2^n 个 n 元组。在一个 n-方体中，当两个角点的坐标只在一处不同时恰好有一条边连接这两个点。生成 0 和 1 的 n 元组的算法对应着沿 n-方体的边访问每一个角点恰好一次的路径，其中，这个 n-元组具有性质：n-元组的后继仅仅在一处与该 n 元组不同。这样，任意一条路径（或 n 元组的结果列表）称为 n 阶 Gray 码（葛莱码，二进制循环码）㊀。如果能够再穿过一条边从路径的终点回到起点，那么 Gray 码就叫做是循环的。在上面的例子中，对于 n=1，2 和 3 的那些列表就是循环 Gray 码。它们还有一个性质，这使得它们相当特殊，现在就来考察这个性质。



图 4-4

从单位 1-方体开始，始于 0 终于 1 的 Gray 码如图 4-4 所示。通过拷贝两个 1-方体并且连接对应的角点就可以建立一个单位 2-方体。把 0 附加在一个拷贝的两个坐标前，把 1 附加到另一个 1-方体的两个坐标前：首先沿着 1-方体

㊀ 1878 年，法国工程师 Émile Baudot 演示了 Gray 码在电报中的用法。不过，第一个获得专利的是贝尔实验室研究员 Frank Gray，时间是在 1953 年。

的一个拷贝的 Gray 码行进，穿行到另一个 1-方体，然后再沿着这个 1-方体的 Gray 码以相反的顺序行进，通过这种方式就得到该 2-方体的循环 Gray 码，如图 4-5 的左图所示。

可以用类似的方法从单位 2-方体建立一个单位 3-方体。取 2-方体的两个拷贝并将对应的角点连接起来。把 0 附加在一个拷贝的各个坐标前而把 1 附加到另一个拷贝的各个坐标前。首先，沿着 2-方体的一个拷贝的 Gray 码行进，穿行到另一个 2-方体，然后再沿着这个 2-方体的 Gray 码以相反的顺序行进，就得到 3-方体的循环 Gray 码，如图 4-5 的右图所示。

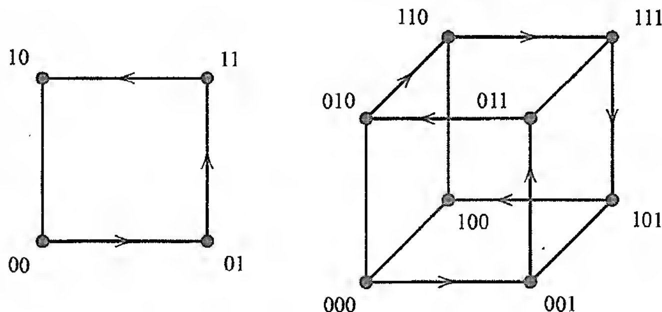


图　4-5

可以继续用这种方式对任意的整数 $n \geqslant 1$ 归纳地构建 n 阶 Gray 码。用这种方式构建的 Gray 码称为反射 Gray 码。为了得到 n 阶反射 Gray 码，n-方体是唯一的可视图形从而不必介绍。当然，对于 $n>3$，只能得到 n-方体的角和边的形象化的图形。$n=4$时的反射 Gray 码表示如下：

0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 0 1 0
0 1 1 0
0 1 1 1
0 1 0 1
0 1 0 0
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 1
1 1 1 0
1 0 1 0
1 0 1 1
1 0 0 1
1 0 0 0

n 阶反射 Gray 码的一般归纳定义如下：

（ⅰ）1 阶反射 Gray 码是$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$。

（ⅱ）设 $n>1$ 且 $n-1$ 阶反射 Gray 码已经构建好。为了构建 n 阶反射 Gray 码，首先以 $n-1$阶反射 Gray 码所给出的顺序列出 0 和 1 的（$n-1$）元组，把 0 添加到每个（$n-1$)元组的开头，然后，以 $n-1$ 阶反射 Gray 码所给出顺序的相反顺序再列出（$n-1$）元组，并把 1 添加到各（$n-1$）元组的开始处。

由这个归纳定义可知，n 阶反射 Gray 码以 n-元组 $00\cdots0$ 开始并以 n 元组 $10\cdots0$ 结束。由于 $00\cdots0$ 和 $10\cdots0$ 只在一处不同，因此该码是循环的。

因为反射 Gray 码已被归纳定义，为了构建 n 阶反射 Gray 码，首先构建 $n-1$ 阶反射 Gray 码。例如，为了构建 6 阶反射 Gray 码，首先构建 5 阶反射 Gray 码。为此，又要构建 4 阶反射 Gray 码，等等。为了构建 6 阶反射 Gray 码，使用归纳定义就必须依次构建 1、2、3、4、5 阶反射 Gray 码。现在我们描述一种算法，该法能够直接构建 n 阶反射 Gray 码。为此，需要一个逐次性法则，它告诉我们，在反射 Gray 码中从一个 n 元组到下一个 n 元组时哪个地方需要改变（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。这个逐次性法则在下述的算法中给出。

如果 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ 是 0 和 1 的 n 元组，那么

$$\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$$

是它的 1 的个数（等于它所对应的组合的大小）。

以反射 Gray 码的顺序生成 0 和 1 的 n 元组的算法

以 n 元组 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0=00\cdots0$ 开始。当 n 元组 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\neq10\cdots0$ 时，做：

ⅰ）计算 $\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$。

ⅱ）如果 $\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)$ 是偶数，则改变 a_0（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。

ⅲ）否则，确定这样的 j，使得 $a_j=1$，对满足 $j>i$ 的所有的 i，$a_i=0$，然后，改变 a_{j+1}（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。

注意 如果在步骤ⅲ）中 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\neq10\cdots0$，那么 $j\leqslant n-2$，从而 $j+1\leqslant n-1$ 并确定 a_{j+1}。还要注意，在步骤ⅲ）中可能有 $j=0$，就是说，$a_0=1$；在这种情形下不存在满足 $i<j$ 的 i，我们则按ⅲ）中所指示的来改变 a_1。

读者可以检验该算法的确给出已经表示过的 4 阶 Gray 码。

定理 4.3.1 上面描述的生成 0 和 1 的 n 元组的算法对每个正整数 n 产生 n 阶反射 Gray 码。

证明：通过对 n 的归纳法来证明本定理。显然，算法用于 $n=1$ 时产生 1 阶反射 Gray 码。令 $n>1$ 并假设算法用于 $n-1$ 时产生 $n-1$ 阶反射 Gray 码。n 阶反射 Gray 码的前 2^{n-1} 个 n 元组由 $n-1$ 阶反射 Gray 码的（$n-1$）元组通过在每一个（$n-1$）元组的开头添加一个 0 组成。由于（$n-1$）元组 $10\cdots0$ 出现在 $n-1$ 阶反射 Gray 码的最后，于是，将逐次性法则用到 n 阶反射 Gray 码的前（$2^{n-1}-1$）个 n 元组，与将该法则用到 $n-1$ 阶反射 Gray 码除最后的（$n-1$）元组外的所有（$n-1$）元组，然后再附加一个 0 有相同的效果。因此，归纳假设导致逐次性法则产生前一半的 n 阶反射 Gray 码。n 阶反射 Gray 码的第 2^{n-1} 个 n 元组是 $010\cdots0$。由于 σ（$010\cdots0$）$=1$ 是一个奇数，逐次性法则用于 $010\cdots0$ 并给出 $110\cdots0$，它就是 n 阶反射 Gray 码的第（$2^{n-1}+1$）个 n 元组。

现在考虑 n 阶反射 Gray 码后一半的前后连贯的两个 n 元组：

$$1\ a_{n-2}\cdots a_0$$

$$1\ b_{n-2}\cdots b_0$$

此时，在 $n-1$ 阶反射 Gray 码中，$a_{n-2}\cdots a_0$ 紧跟在 $b_{n-2}\cdots b_0$ 之后：

$$b_{n-2}\cdots b_0$$

$$a_{n-2}\cdots a_0$$

现在$\sigma(a_{n-2}\cdots a_0)$与$\sigma(b_{n-2}\cdots b_0)$奇偶性相反（一个是偶数而另一个是奇数）。$\sigma(1a_{n-2}\cdots a_0)$与$\sigma(a_{n-2}\cdots a_0)$奇偶性也相反，而且，$\sigma(1b_{n-2}\cdots b_0)$与$\sigma(b_{n-2}\cdots b_0)$也是奇偶性相反。设$\sigma(b_{n-2}\cdots b_0)$是偶数，于是$\sigma(a_{n-2}\cdots a_0)$是奇数且$\sigma(1a_{n-2}\cdots a_0)$是偶数。根据归纳假设，$a_{n-2}\cdots a_0$是由$b_{n-2}\cdots b_0$改变$b_0$后得到的。用于$1a_{n-2}\cdots a_0$的逐次性法则指示我们改变$a_0$，这就给出了所期望的$1b_{n-2}\cdots b_0$。现在假设$\sigma(b_{n-2}\cdots b_0)$是奇数。于是$\sigma(a_{n-2}\cdots a_0)$是偶数而$\sigma(1a_{n-2}\cdots a_0)$是奇数。将逐次性法则用于$1a_{n-2}\cdots a_0$与将逐次性法则用于$b_{n-2}\cdots b_0$的效果正好相反。因此，由归纳假设也推出，将逐次性法则用于$1a_{n-2}\cdots a_0$也给出了所期望的$1b_{n-2}\cdots b_0$。因此，由归纳法可知定理成立。 □

例 在8阶反射Gray码中，确定10100110、00011111和01010100的后继8元组。

由于$\sigma(10100110)=4$是偶数，故10100111紧跟在10100110之后。由于$\sigma(00011111)=5$是一个奇数，因而，在算法的步骤（3）中，$j=1$，所以在00011111之后应该是00011101。由于$\sigma(01010100)=3$，所以01011100紧随01010100之后。 □

我们已经描述了2^n个二进制n元组的两种排序：通过从00…0开始使用基为2的运算所得到的字典序，以及同样从00…0开始的反射Gray码序。字典序对应从0到2^n-1的基为2的整数，而反射Gray码序可以看成是以特殊的顺序从0到2^n-1列出的二进制n元组。我们可以明确地说出二进制n元组出现在Gray码序的表的准确位置。对于$i=0, 1, \cdots, n-1$，令

$$b_i=\begin{cases}0, & \text{若 } a_{n-1}+\cdots+a_i \text{ 是偶数}\\ 1, & \text{若 } a_{n-1}+\cdots+a_i \text{ 是奇数}\end{cases}$$

此时，$a_{n-1}\cdots a_1a_0$在Gray码序表的位置和$b_{n-1}\cdots b_1b_0$在字典序表上的位置相同。换句话说，$a_{n-1}\cdots a_1a_0$在Gray码序表的位置

$$k=b_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+b_1\times 2+b_0\times 2^0$$

上。我们把验证它的工作留作练习。

4.4 生成 r-组合

在4.3节我们已经描述了n个元素集合的两种排序方法以及基于逐次性法则生成组合的相应算法。现在我们只考虑固定大小r的组合并寻找生成这些组合的方法。一种方式就是生成所有的组合，然后查看所得列表并选择那些恰好含有r个元素的组合。但是，这显然不是一种有效的方法。

例 在4.3节以压缩排序列出了{1,2,3,4}的所有的4-组合。从其中选出2-组合，得到{1,2,3,4}的2-组合的压缩排序：

1，2

1，3
2，3
1，4
2，4
3，4
□

本节，我们将发展 n 个元素集的 r-组合的字典排序算法，r 是一个固定的整数且满足 $1\leqslant r\leqslant n$。现在把集合取为

$$S=\{1,2,\cdots,n\}$$

它由前 n 个正数组成。这给出 S 的元素的一个自然顺序

$$1<2<\cdots<n$$

令 A 和 B 是集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的两个 r-组合。如果在并集 $A\cup B$ 中但不在交集 $A\cap B$ 中（即，在一个集合中，但不同时存在于两个集合中）的最小整数在 A 中，就说 A 以字典序先于 B。□

例　令 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 的 5-组合 A 和 B 由

$$A=\{2,3,4,7,8\},\qquad B=\{2,3,5,6,7\}$$

给出。则在一个集合但不同时在两个集合的最小元素是 4（它属于 A）。因此，A 以字典序先于 B。□

用前一节意义下的字典序和用字典意义下的字典序都有什么特点呢？我们把 S 的元素看成是一个字母表中的字母，其中 1 是第一个字母，2 是第二个字母等等。把 r-组合看成是字母表 S 中长为 r 的"单词"，并给这个"单词"一个字典类型的顺序。但是，一个单词中的字母形成一个有序的序列（例如，part 与 trap 就是不同的词），对组合来说，如我们已经知道的，顺序是无关紧要的。既然顺序在组合中无关紧要，就让我们约定，无论何时只要写 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的组合，就将其中的整数以从最小到最大的顺序书写。因此，$S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 r-组合写成形式

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\qquad 其中\ 1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_r\leqslant n$$

为了方便起见，也约定把 r-组合写成没有逗号的形式

$$a_1a_2\cdots a_r$$

即写成长度为 r 的单词。现在我们已经建立了书写组合的约定，它使我们把一个组合看成一个单词。但要注意，并不是所有的单词都是允许的。在我们这里的字典中，将只有那些取自我们的字母表中、有 r 个字母且其字母是以严格递增的顺序排列的单词（特别是，在我们的单词中不存在重复的字母）。

例　回到前面的例子，用我们建立的约定，写出 $A=23478$ 和 $B=23567$。我们看到，A 和 B 的前两个字母是一样的，在第三个字母上出现了不一致。既然 $4<5$（在我们的字母表中 4 在 5 的前头），那么 A 在字典序中就先于 B。□

例　考虑{1,2,3,4,5,6,7,8,9}的 5-组合的字典序。显然第一个 5-组合是 12345；最后的一个 5-组合是 56789。在我们的字典中，12389 的直接后继 5-组合是什么呢？在 123 开始的 5-组合中，12389 是最后的一个。在以 12 开始并且第三个位置不是 3 的 5-组合中，12456 是第一个。因此 12456 是 12389 的直接后继。□

在下面的定理中推广了这个例子，在我们的字典中，确定了除最后那个单词外的所有单词的直接后继。

定理 4.4.1　令 $a_1a_2\cdots a_r$ 是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个 r-组合。在字典排序中，第一个 r-组合是 $12\cdots r$，最后一个 r-组合是 $(n-r+1)\ (n-r+2)\cdots n$。设 $a_1a_2\cdots a_r\neq(n-r+1)\ (n-r+2)\ \cdots n$。令 k 是满足 $a_k<n$ 且使得 a_k+1 不同于 a_1，a_2，…，a_r 中的任一个数的最大整数。那么，在字典排序中，$a_1a_2\cdots a_r$ 的直接后继 r-组合是

$$a_1\cdots a_{k-1}\ (a_k+1)\ (a_k+2)\ \cdots\ (a_k+r-k+1)$$

证明：从字典序的定义可知，$12\cdots r$ 是在字典排序下的第一个而 $(n-r+1)\ (n-r+2)\cdots n$ 是最后一个 r-组合。现在，令 $a_1a_2\cdots a_r$ 是任意一个但不是最后的 r-组合，确定 k 就是定理中所指出的 k。于是

$$a_1a_2\cdots a_r=a_1\cdots a_{k-1}a_k\ (n-r+k+1)\ (n-r+k+2)\ \cdots\ (n)$$

其中

$$a_k+1<n-r+k+1$$

因此，$a_1a_2\cdots a_r$ 是以 $a_1\cdots a_{k-1}a_k$ 开始的最后的 r-组合。r-组合

$$a_1\cdots a_{k-1}\ (a_k+1)\ (a_k+2)\ \cdots\ (a_k+r-k+1)$$

是以 $a_1\cdots a_{k-1}a_k+1$ 开始的第一个 r-组合；从而是 $a_1a_2\cdots a_r$ 的直接后继。□

从定理 4.4.1 我们断言，下列算法生成$\{1,2,\cdots,n\}$的字典序的所有 r-组合。

生成$\{1,2,\cdots,n\}$的字典序 r-组合的算法

从 r-组合 $a_1a_2\cdots a_r=12\cdots r$ 开始。

当 $a_1a_2\cdots a_r\neq(n-r+1)\ (n-r+2)\ \cdots n$ 时，做：

ⅰ）确定最大的整数 k，使 $a_k+1\leqslant n$ 且 a_k+1 不是 a_1，a_2，…，a_r。

ⅱ）用 r-组合

$$a_1\cdots a_{k-1}\ (a_k+1)\ (a_k+2)\ \cdots\ (a_k+r-k+1)$$

替换 $a_1a_2\cdots a_r$。

例　应用生成$S=\{1,2,3,4,5,6\}$的 4-组合算法，得到下列结果。

1234	1256	2345
1235	1345	2346
1236	1346	2356
1245	1356	2456
1246	1456	3456

1245 1356 2456

1246 1456 3456 □

如果将生成一个集合的排列的算法与生成一个 n-元素集合的 r-组合的算法结合起来，就得到生成 n-元素集合的 r-排列的算法。

例 生成{1,2,3,4}的 3-排列。首先生成字典序的 3-组合：123，124，134，234。对于每一个 3-组合，再生成其所有的排列：

123	124	134	234
132	142	143	243
312	412	413	423
321	421	431	432
231	241	341	342
312	214	314	324

□

我们通过确定在$\{1,2,\cdots,n\}$的 r-组合的字典序中的每一个 r-组合的位置结束本段。

定理 4.4.2 $\{1,2,\cdots,n\}$的 r-组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 出现在$\{1,2,\cdots,n\}$的 r-组合的字典序中的位置号如下：

$$\binom{n}{r}-\binom{n-a_1}{r}-\binom{n-a_2}{r-1}-\cdots-\binom{n-a_{r-1}}{2}-\binom{n-a_r}{1}$$

证明： 首先计算出现在 $a_1a_2\cdots a_r$ 后面的 r-组合的个数：

i）在 $a_1a_2\cdots a_r$ 后面存在$\binom{n-a_1}{r}$个 r-组合，其第一个元素大于 a_1。

ii）在 $a_1a_2\cdots a_r$ 后面存在$\binom{n-a_2}{r-1}$个 r-组合，其第一个元素是 a_1，但是第二个元素大于 a_2。

r−1）在 $a_1a_2\cdots a_r$ 后面存在$\binom{n-a_{r-1}}{2}$个 r-组合，它们都从 $a_1\cdots a_{r-2}$开始，但第（$r-1$）个元素大于 a_{r-1}。

r）在 $a_1a_2\cdots a_r$ 后面存在$\binom{n-a_r}{1}$个 r-组合，它们都从 $a_1\cdots a_{r-1}$开始，但第 r 个元素大于 a_r。

从总数$\binom{n}{r}$个 r-组合减去$a_1a_2\cdots a_r$ 后面的 r-组合，我们发现 $a_1a_2\cdots a_r$ 的位置正是定理中所给出的位置。 □

例 在{1,2,3,4,5,6,7,8}的 4-组合中，组合 1258 在字典序中的哪个位置？应用定理 4.4.2 发现 1258 的位置是

$$\binom{8}{4}-\binom{7}{4}-\binom{6}{3}-\binom{3}{2}-\binom{0}{1}=12$$

4.5 偏序和等价关系

在本章前面各节，我们定义了对于一个有限集的排列、组合以及 r-组合等集合上的各种“自然”序，即通过生成算法确定的那些序。这些序就是在存在第一个物体、第二个物体、第三个物体…最后一个物体的意义下的“全序”。有一种更一般的序的概念，叫做“偏序”，它非常重要而且在数学中很有用。由一个集合含于另一个集合以及由一个整数被另一个整数整除来定义的两种偏序或许更为人们所熟知，但它们不是全序。它们是在给定两个集合互相都不是对方的子集以及给定两个整数彼此都不能整除意义下的偏序。

为了给出偏序的精确定义，重要的是要知道数学中关系指的是什么。令 X 是一个集合。X 上的关系R是一个“性质”，在 X 的任意两个给定的元素之间，这个性质可能成立也可能不成立。说得更正式一些，X 上的一个关系是 $X\times X$ 的一个子集R，而 $X\times X$ 是X 的元素的序偶的集合。若序偶(a,b)属于R，则写成 $a\ R\ b$；若(a,b)不在R中，就写成$a \not R\ b$。

例 令 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$。记号 $a \mid b$ 表示a 是b 的因子（等价地，b 可被a 整除）。这定义了 X 上的一个偏序，例如，有 $2 \mid 6$ 和$3\nmid 5$。

现在考虑 X 所有子集（即所有组合）的集合$\mathcal{P}(X)$。对于$\mathcal{P}(X)$ 中的 A 和B，如果 A 的每一个元素也是B 的元素，那么写成 $A\subseteq B$，读作 A 含于B。这定义了$\mathcal{P}(X)$ 上的一个关系，例如，有$\{1\}\subseteq\{1,3\}$和$\{1,2\}\not\subseteq\{2,3\}$。 □

下面是集合 X 上的关系R可能具有的一些特性：

ⅰ）如果对于 X 中的所有的x，有 $x\ R\ x$，则R是自反的。

ⅱ）如果对于 X 中的所有的x，有 $x \not R\ x$，则R是反自反的。

ⅲ）如果对于 X 中的所有的x 和y，只要 $x\ R\ y$ 就有$y\ R\ x$，则R是对称的。

ⅳ）如果对于 X 中的所有满足$x\neq y$ 的x 和y，只要 $x\ R\ y$，就有 $y \not R\ x$（等价地，对于 X 中的所有的x 和y，$x\ R\ y$ 同时$y\ R\ x$ 就意味着$x=y$），则R是反对称的。

ⅴ）对于 X 中的所有的 x，y 和 z，只要有 $x\ R\ y$ 和 $y\ R\ z$，就有 $x\ R\ z$，则R是传递的。

例 正如前面例子所用到的，子集的关系$\subseteq$和可整除性关系$\mid$是自反的和传递的。子集的关系也是反对称的，如果我们只考虑正整数，则整除的关系也是反对称的。

如果 A 的每一个元素也是B 的元素，但 $A\neq B$，则由 $A\subset B$ 定义的真子集的关系（$\subset$）是反自反的、反对称的和传递的。数集上的小于或等于关系$\leqslant$是自反的、反对称的和传递的，而小于关系$<$则是反自反的、反对称的和传递的。 □

集合 X 上的偏序是一个自反的、反对称的和传递的关系R。集合 X 上的严格偏序是一个反自反、反对称以及传递的关系。于是，$\subseteq$，$\leqslant$和$\mid$均是偏序，$\subset$和$<$则是严格偏序[⊖]。如果一个关系R是一个偏序，则通常用$\leqslant$标记R[⊜]；由 $a<b$ 当且仅当 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$ 定义的关系$<$是一个严格偏序（反过来，从 X 上严格偏序$<$出发，由 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a<b$ 或 $a=b$ 定义的关系$\leqslant$是一个偏序）。在其上定义偏序$\leqslant$的集合 X 有时也叫做偏序集，并用（X，$\leqslant$）表示。

如果R是集合 X 上的一个关系，那么对于 X 上的 x 和 y，若有 $x\ R\ y$ 或 $y\ R\ x$，就说 x

---

⊖ 可整除但不相等的关系也是一个严格偏序。

⊜ 意识到 $a\leqslant b$ 并不意味着 a 和 b 是数且 a 不大于 b 很重要。对偏序集而言，符号“$\leqslant$”已成为一种抽象的符号。

和 y 是可比的，否则就说 x 和 y 是不可比的[㊀]。集合 X 上的一个偏序 R 如果使 X 上的每一对元素都是可比的，则该偏序 R 就是一个全序。数集上标准的关系 $\leqslant$ 是一个全序[㊁]。

如果 X 是一个有限集，而我们以某种线性顺序列出 X 的元素（X 的一个排列）a_1，a_2，…，a_n，那么通过 $i \leqslant j$ 确定 $a_i \leqslant a_j$（在该排列中 a_i 先于 a_j）可以验证，我们得到集合 X 上的一个全序。现在证明，X 上的每一个全序均可用这种方法产生。

定理 4.5.1 令 X 是 n 个元素的有限集。于是，在 X 的全序和排列之间存在一个一一对应。特别地，X 上的不同的全序的个数是 $n!$。

证明： 对 n 使用归纳法，证明 X 上的每一个全序 $\leqslant$ 对应 X 的一个排列 a_1，a_2，…，a_n，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。如果 $n=1$，显然成立。令 $n>1$。首先证明 X 存在一个极小元；即一个元素 a_1 使得由 $b \leqslant a_1$ 导致 $b = a_1$（等价地，不存在使得 $x < a_1$ 的元素 x）。令 a 为 X 的任一元。如果 a 不是极小元，那么就存在一个元素 b 使得 $b < a$。如果 b 不是极小元，就存在一个元素 c，使得 $c < b$ 从而 $c < b < a$。继续这样做下去，并用到 X 是有限集的事实，最后确定极小元 a_1 的位置。设存在 X 的一个元素 $x \neq a_1$ 但 $a_1 \not< x$。由于有一个全序，就必然有 $x < a_1$，与 a_1 是极小元矛盾。因此，对于 X 中所有异于 a_1 的 x，$a_1 < x$。将归纳法应用到 X 的异于 a_1 的 $n-1$ 个元素的集合，得到结论：这些元素可以被排序成 a_2，a_3，…，a_n，其中 $a_2 < a_3 < \cdots < a_n$。因此，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 是 X 的元素的一个排列，且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$。 □

作为定理 4.5.1 的一个结果，一个有限的线性有序集常常被表示为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 或简单地表示为 a_1，a_2，…，a_n。

偏序集可以用几何的方法表示。为了叙述几何表示方法，需要定义偏序集 $(X, \leqslant)$ 的覆盖关系。令 a 和 b 是 X 中的元素。如果 $a < b$ 并且没有元素 c 能够夹在 a 和 b 之间，那么 a 就被 b *覆盖*（也说成 b *覆盖* a），记为 $a <_c b$；就是说，不存在元素 c，使得 $a < c$ 和 $c < b$ 同时成立。如果 X 是一个有限集，则由传递性可知，偏序 $\leqslant$ 被它的覆盖关系唯一确定。因此，覆盖关系是描述偏序的有效方法。由定理 4.5.1 可知，如果 $(X, \leqslant)$ 是全序集，则 X 的元素可以列成 x_1，x_2，…，x_n，使得 $x_1 <_c x_2 <_c \cdots <_c x_n$。正是由于这种原因，全序集也叫做*线性有序集*。

有限偏序集 $(X, \leqslant)$ 的图（diagram）通过对于 X 的每一个元素取平面上的一点而得到，若 $x <_c y$，则要仔细地把关于 x 的点放在关于 y 的点的下方，并当且仅当 x 被 y 覆盖时用一条线段连接 x 和 y（把 x 放在 y 的下方为的是知道 x 被 y 覆盖，而不是 y 被 x 覆盖）。

例 5 个元素的全序集用 5 个顶点的图来表示，如图 4-6 所示，这些点用 4 条竖直线段所连接。 □

例 集 $\{1,2,3\}$ 的子集的偏序集由在一个角点“坐着”的立方体图表示，见图 4-7。 □

例 由“是…的因子”确定的前 8 个整数的集合的偏序由图 4-8 所示。 □

㊀ 把短语“x 和 y 是不可比的”当成是“不能比较苹果和橘子”从而苹果和橘子是不可比的这种普通短语的抽象。

㊁ 这就是为什么要仔细区分偏序的抽象符号“$\leqslant$”和数的标准关系“$\leqslant$”；后者是个全序，其中任何两个数 a 和 b 都是可比较的（或者 $a \leqslant b$，或者 $b \leqslant a$），但是这个性质对一般的偏序集是不成立的。

令$\leqslant_1$和$\leqslant_2$是某个集合 X 上的两个偏序。如果只要 $a\leqslant_1 b$ 成立就有 $a\leqslant_2 b$ 成立，那么偏序集$(X,\leqslant_2)$是偏序集$(X,\leqslant_1)$的一个扩展。特别地，偏序集的扩展有更多可比较的对。我们证明，每一个有限偏序集有一个线性扩展，即该扩展是一个线性有序集。



图　4-6

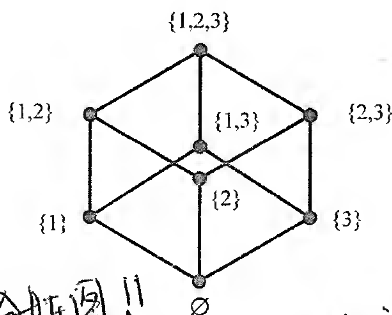


图　4-7

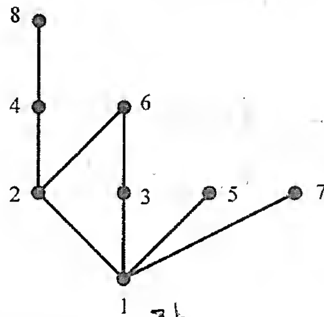


图　4-8

定理 4.5.2　令$(X,\leqslant)$是一个有限偏序集，则存在$(X,\leqslant)$的一个线性扩展。

证明：我们需要证明，能够用下面的方法以某种顺序 x_1，x_2，…，x_n 将 X 的元素列出：如果 $x_i\leqslant x_j$，则在表中 x_i 先于 x_j，即 $i\leqslant j$。有一个非常简单的算法完成上述工作：

求偏序集的线性扩展的算法

ⅰ）选出 X 中（关于偏序$\leqslant$的）一个极小元 x_1。

ⅱ）从 X 中删除 x_1，并从剩下的 $n-1$ 个元素中选择一个极小元 x_2。

ⅲ）再从 X 中删除 x_2，并从剩下的 $n-2$ 个元素中选择一个极小元 x_3。

ⅳ）再从 X 中删除 x_3，并从剩下的 $n-3$ 个元素中选择一个极小元 x_4。

⋮

n）从 X 中删除 x_{n-1}，恰好留下一个元素 x_n。

通过反证找出矛盾来证明 x_1，x_2，…，x_n 是$(X,\leqslant)$的一个线性扩展。设存在 x_i 和 x_j，使得 $x_i< x_j$ 但 $j< i$。于是，在上面的步骤 j）中，当我们在剩下的元素中选择 x_j 时 x_i 就在剩余的元素中，由于 $x_i< x_j$，x_j 就不是算法所需要的极小元。因此，x_1，x_2，…，x_n 是$(x,\leqslant)$的一个线性扩展。□

例　令$X=\{1,2,\cdots,n\}$是由前 n 个正整数组成的集合，考虑偏序集$(X,|)$，其中$|$和前面一样意为“是…的因子”。若 $i|j$，则 i 小于 j，这就推出 1，2，…，n 是$(X,\leqslant)$的一个线性扩展。□

例　令 X 是 n 个元素的集合，考虑由包含关系所形成的 X 的所有子集构成的偏序集$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$。如果 $A\subseteq B$，就意味着$|A|\leqslant|B|$，由此推出如果从空集开始以某种顺序列出所有的单元素子集，再以某种顺序列出所有的二元素子集，然后再以某种顺序列出所有的三元子素集等等，那么得到$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$的一个线性扩展。例如，若 $n=3$ 且$X=\{1,2,3\}$，则

$$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

是$(\mathcal{P}(X),\subseteq)$的一个线性扩展。□

现在我们定义关系的另一个特殊的类。令 X 是一个集合。如果 X 上的一个关系 R 是自

反的、对称的和传递的，则 R 是一个等价关系（因此，等价关系和偏序的区别仅仅在于等价关系是对称的，而偏序是反对称的）。等价关系通常用～表示。如果 $a \sim b$，就说 a 等价于 b。正如偏序可以看成数的通常的序≤的推广一样，等价关系可以看成是数的相等关系＝的推广。现在我们证明，X 上的等价关系自然地对应将 X 分成一些非空的集合的划分。

令～是集合 X 上的一个等价关系。对于 X 的每一个 a，a 的等价类是所有与 a 等价的集合

$$[a]=\{x:x\sim a\}$$

由于 $a \sim a$，故 a 的等价类包含 a，从而是非空的。

定理 4.5.3 令～是集合 X 上的一个等价关系。于是，一些不同的等价类把 X 划分成一些非空的部分。反之，将 X 分割成非空部分的任一划分，则存在 X 上的一个等价关系，它的等价类就是划分的这些部分。

证明： 首先令～是集合 X 上的一个等价关系。每个等价类是非空的，而 X 的每个元素包含在一个等价类中（a 的等价类包含 a）。剩下还要证明不同的等价类是两两不相交的，也就是说，如果两个等价类有非空的交，那么它们就是两个恒等的集合。设 $[a] \cap [b] \neq \varnothing$，并令 c 是 $[a]$ 和 $[b]$ 的一个公共元素。则 $c \sim a$（从而 $a \sim c$）和 $c \sim b$（从而 $b \sim c$）。令 x 含于 $[a]$。于是 $x \sim a$。由于 $a \sim c$ 以及 $c \sim b$，由传递性得出 $x \sim b$，并因此 x 含于 $[b]$。得到 $[a] \subseteq [b]$。用类似的方法我们得到 $[b] \subseteq [a]$，从而 $[a]=[b]$。

反之，令 A_1，A_2，…，A_s 是将 X 分成一些非空集合的划分。对于 X 中的 x 和 y，定义 $x \sim y$ 当且仅当 x 和 y 在该划分的同一部分中。于是，通过直接验证可知～是 X 上的一个等价关系，其不同的等价类就是 A_1，A_2，…，A_s（见练习题 44）。 □

4.6　练习题

1. 在使用 4.1 节的算法时，$\{1,2,3,4,5\}$ 的紧跟在 31524 之后的排列是哪个？哪个排列先于 31524？
2. 确定在

$$\overleftarrow{4}\,\overleftarrow{8}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{6}\,\overleftarrow{7}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{5}$$

　中的活动整数。

3. 使用 4.1 节的算法，从 $\overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,\overleftarrow{3}\,\overleftarrow{4}\,\overleftarrow{5}$ 开始生成 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有排列。
4. 证明，在 4.1 节直接生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列的算法中，1 和 2 的方向从不变化。
5. 令 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，具有逆序列 b_1，b_2，…，b_n，并令 $k=b_1+b_2+\cdots+b_n$。用归纳法证明不能通过少于 k 次逐次交换相邻二数的方法将 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 变为 $1\,2 \cdots n$。
6. 确定 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的下列排列的逆序列。
　ⅰ）　35168274
　ⅱ）　83476215

7. 构造$\{1,2,\cdots,8\}$的排列，其逆序列是
 ⅰ） 2，5，5，0，2，1，1，0
 ⅱ） 6，6，1，4，2，1，0，0
8. $\{1,2,3,4,5,6\}$有多少排列具有
 ⅰ）恰好 15 个逆序？
 ⅱ）恰好 14 个逆序？
 ⅲ）恰好 13 个逆序？
9. 证明，$\{1,2,\cdots,n\}$的排列的逆序的最大个数等于$n(n-1)/2$。确定具有$n(n-1)/2$个逆序的唯一的排列。再确定所有那些具有$n(n-1)/2-1$个逆序的排列。
10. 通过逐次交换相邻的数把排列 256143 和 436251 变成 123456。
11. 令$S=\{x_7,x_6,\cdots,x_1,x_0\}$。确定对应 S 的下列组合的 0 和 1 的 8-元组：
 ⅰ）$\{x_5,x_4,x_3\}$
 ⅱ）$\{x_7,x_5,x_3,x_1\}$
 ⅲ）$\{x_6\}$
12. 令$S=\{x_7,x_6,\cdots,x_1,x_0\}$。确定 S 的对应下列 8-元组的组合：
 ⅰ）00011011
 ⅱ）01010101
 ⅲ）00001111
13. 通过基为 2 的生成算法生成 0 和 1 的 5-元组并用集合$\{x_4,x_3,x_2,x_1,x_0\}$的组合标示之。
14. 对 0 和 1 的 6-元组重做练习 13。
15. 对于$\{x_7,x_6,\cdots,x_1,x_0\}$的下列每一个组合，通过使用基为 2 的生成算法确定其直接后继组合：
 ⅰ）$\{x_4, x_1, x_0\}$
 ⅱ）$\{x_7, x_5, x_3\}$
 ⅲ）$\{x_7, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$
 ⅳ）$\{x_0\}$
16. 对于上题中的每一组合ⅰ）、ⅱ）、ⅲ）和ⅳ），确定其在基为 2 的生成算法中的直接前趋组合。
17. 当使用基为 2 的生成算法时，$\{x_7,x_6,\cdots,x_1,x_0\}$的哪个组合是 S 的组合列表中的第 150 个组合？第 200 个组合？第 250 个组合？（如 4.3 节所示，表中的这些位置是从 0 开始计数的。）
18. 建立 4-方体（的顶点和边），并指出其上的反射 Gray 码。
19. 举出一个 3 阶非循环 Gray 码的例子。
20. 举出一个 3 阶循环 Gray 码但却不是反射 Gray 码的例子。
21. 构造 5 阶反射 Gray 码，通过
 ⅰ）使用归纳定义，以及
 ⅱ）使用 Gray 码算法。
22. 确定 6 阶反射 Gray 码。
23. 确定下列 9 阶反射 Gray 码中 9-元组的直接后继。

ⅰ）010100110

ⅱ）110001100

ⅲ）111111111

24. 确定前面练习 23 中的每一个 9-元组在 9 阶反射 Gray 码中的前趋元。

*25. 严格地说，n 阶反射 Gray 码叫做二进制反射 Gray 码，因为它是 0 和 1 的一系列 n-元组。它可以推广到任意基的系统，特别是三进制系统和十进制系统。于是，n 阶十进制反射 Gray 码是所有的 n 位十进制数的一个列表，表中顺序列出的相邻的数只在一处不同，而且它们的差的绝对值是 1。确定 1 阶和 2 阶十进制反射 Gray 码（注意，我们尚未精确地说十进制反射 Gray 码是什么。部分问题是要发现它是什么）。再确定 1 阶、2 阶和 3 阶三进制反射 Gray 码。

26. 使用在 4.4 节中描述的算法，以字典序生成{1,2,3,4,5}的 2-组合。

27. 使用在 4.4 节中描述的算法，以字典序生成{1,2,3,4,5,6}的 3-组合。

28. 确定{1,2,…,10}的以字典序直接跟在 2，3，4，6，9，10 之后的 6-组合。再确定直接前趋于 2，3，4，6，9，10 的 6-组合。

29. 确定{1,2,…,15}的以字典序直接跟在 1，2，4，6，8，14，15 之后的 7-组合。哪个 7-组合直接前驱于 1，2，4，6，8，14，15?

30. 以字典序生成{1,2,3}的各排列的逆序列，并写出对应的排列。对 {1，2，3，4} 的排列的逆序列重做本题。

31. 生成{1,2,3,4,5}的 3-排列。

32. 生成{1,2,3,4,5,6}的 4-排列。

33. 组合 2489 出现在{1,2,3,4,5,6,7,8,9}的 4-组合的字典序的哪个位置?

34. 考虑{1,2,…,n}在字典序中的 r-组合。

ⅰ）前（$n-r+1$）个 r-组合是什么?

ⅱ）最后的（$r+1$）个 r-组合是什么?

35. {1,2,…,n}的 r-组合 A 的补是{1,2,…,n}的（$n-r$）-组合 $\overline{A}$，它由所有不属于 A 的元素组成。令 $M=\binom{n}{r}$为{1,2,…,n}的 r-组合的个数和 $n-r$-组合的个数。证明：如果

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_M$$

是字典序中的 r-组合，那么

$$\overline{A}_M,\ \cdots,\ \overline{A}_3,\ \overline{A}_2,\ \overline{A}_1$$

是字典序中的（$n-r$）-组合。

36. 令 X 是 n 个元素的集合。在 X 上有多少不同的关系? 这些关系中有多少是自反的? 对称的? 反对称的? 自反的和对称的? 自反的和反对称的?

37. 令 R'和 R''是 X 上的两个偏序。定义 X 上一个新的关系 R：xRy 当且仅当 $xR'y$ 和 $xR''y$ 同时成立。证明，R 也是 X 上的偏序（R 称为是 R′和 R″的交）。

38. 令（X_1，$\leqslant_1$）和（x_2，$\leqslant_2$）是两个偏序集。在集合

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2):x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$$

上定义关系 T

$$(x_1, x_2)\ T\ (x_1', x_2') \text{ 当且仅当 } x_1 \leqslant_1 x'_1 \text{ 和 } x_2 \leqslant_2 x'_2$$

证明，$(X_1 \times X_2, T)$ 是偏序集。$(X_1 \times X_2, T)$叫做$(X_1, \leqslant_1)$和$(X_2, \leqslant_2)$的*直积*并表示为$(X_1, \leqslant_1) \times (X_2, \leqslant_2)$。更一般地，证明偏序集的直积$(X_1, \leqslant_1) \times (X_2, \leqslant_2) \times \cdots \times (X_m, \leqslant_m)$也是偏序集。

39. 令$(J, \leqslant)$为偏序集，其中$J=\{0,1\}$且$0<1$。通过用 0 和 1 的 n 元组标示 n 个元素的集合X 的组合，证明偏序集$(X, \subseteq)$能够用 n-垂直积$(J, \leqslant) \times (J, \leqslant) \times \cdots \times (J, \leqslant)$（$n$ 个因子）标示。
40. 将练习 39 推广到多重集$X=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_m \cdot a_m\}$的所有组合的多重集的情形（本练习的部分工作就是要确定这些多重集上的“自然的”偏序）。
41. 证明有限集上的偏序由它的覆盖关系唯一确定。
42. 描述关于集 X 的所有子集的集合$\mathcal{P}(X)$上的偏序$\subseteq$的覆盖关系。
43. 令$X=\{a,b,c,d,e,f\}$，并将 X 上的关系R 以aRb，bRc，cRd，aRe，eRf，fRd 定义。验证 R 是一个偏序集的覆盖关系，并确定这个偏序集的所有的线性扩展。
44. 令 A_1，A_2，…，A_s 是集 X 上的一个划分。定义 X 上的关系 R：xRy 当且仅当 x 和 y 均属于划分的同一部分。证明 R 是等价关系。
45. 定义所有整数的集 Z 上的关系R：aRb 当且仅当$a=\pm b$。R 是Z 上的等价关系吗？
46. 令 m 为正整数并定义所有非负整数的集X 上的关系R：aRb 当且仅当a 和b 除以m 有相同的余数。证明，R 是X 上的一个等价关系。这个等价关系有多少不同的等价类？
47. 令$\prod_n$ 表示集$\{1,2,\cdots,n\}$的所有划分的集合。给定在$\prod_n$ 内的两个划分 π 和 σ，如果 π 的每一部分都含在 σ 的一部分内，则定义 $\pi \leqslant \sigma$。因此，划分 π 可以通过划分 σ 的那些部分而得到。这个关系通常说成 π 是 σ 的一个*加细*。
    i ）证明这个关系是$\prod_n$ 上的一个偏序。
    ii ）根据定理 4.5.3，在$\prod_n$ 和$\{1,2,\cdots,n\}$上的所有等价关系的集 Λ_n 之间存在一一对应。对应于$\prod_n$ 上的偏序，Λ_n 上的偏序是什么？
    iii ）对于 $n=1$，2，3 和 4，构造（$\prod_n$，$\leqslant$）的图（diagram）。
48. 考虑由“是…的一个因子”给定的正整数集合 X 上的偏序$\leqslant$。令 a 和b 是两个整数，令 c 是使得$c \leqslant a$ 和$c \leqslant b$ 的最大的整数，并令 d 是使得$a \leqslant d$ 和$b \leqslant d$ 的最小的整数。c 和d 是什么？
49. 证明，集合 X 上的两个等价关系R 和S 的交$R \cap S$ 也是X 上的一个等价关系。X 上的两个等价关系的并总是一个等价关系吗？
50. 考虑三元素的集合 $X=\{a, b, c\}$ 的子集组成的偏序集（X，$\subseteq$）。存在多少线性扩展？
51. 令 n 是一个正整数，并令 X_n 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n!$ 个排列的集合。令 π 和σ 是X_n 中的两个排列，并在 π 的逆序的集合是σ 的逆序的集合的子集时定义 $\pi \leqslant \sigma$。验证这个定义是 X_n 上的一个偏序，叫做*逆序偏序集*（inversion poset）。描述该偏序的覆盖关系，然后画出这个逆序偏序集（H_4，$\leqslant$）的图。
52. 验证二进制 n 元组$a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ 位于 Gray 码序表的位置 k 处，其中 k 确定如下：对 $i=0, 1, \cdots, n-1$，令

$$b_i=\begin{cases}0, & 若\ a_{n-1}+\cdots+a_i\ 是偶数\\ 1, & 若\ a_{n-1}+\cdots+a_i\ 是奇数\end{cases}$$

则

$$k=b_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+b_1\times 2+b_0\times 2^0$$

于是，$a_{n-1}\cdots a_1a_0$ 在二进制 Gray 码序表的位置与 $b_{n-1}\cdots b_1b_0$ 在二进制字典序表中的位置相同。

53. 参考练习 52，证明，$a_{n-1}\cdots a_1a_0$ 可以通过 $a_{n-1}=b_{n-1}$ 被 $b_{n-1}\cdots b_1b_0$ 覆盖，并对于 $i=0, 1, \cdots, n-1$，有

$$a_i=\begin{cases}0, & 若\ b_i+b_{i+1}是偶数\\ 1, & 若\ b_i+b_{i+1}是奇数\end{cases}$$

54. 令 $(X, \leqslant)$ 为一有限偏序集。根据定理 4.5.2 我们知道，$(X, \leqslant)$ 有一个线性扩展。令 a 和 b 为 X 的不可比较的元素。修正定理 4.5.2 的证明以便得到 $(X, \leqslant)$ 的线性扩展，使得 $a<b$。提示：首先找出 X 上的偏序$\leqslant'$，使得只要 $x\leqslant y$ 就有 $x\leqslant' y$ 以及 $a\leqslant' b$。
55. 利用练习 54 证明：有限偏序集是它的所有线性扩展的交（见练习 37）。
56. 有限偏序集 $(X, \leqslant)$ 的维数是它的其交为 $(X, \leqslant)$ 的线性扩展的最小个数。根据练习 55，每个偏序集都有一个维数。维数是 1 的那些有限偏序集是线性序。令 n 是一个正整数，并令 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的异于1，2，⋯，n 的排列 σ。令 $X=\{(1, i_1), (2, i_2), \cdots, (n, i_n)\}$。现在定义 X 上的一个关系 R：$(k, i_k)\ R\ (l, i_l)$ 当且仅当 $k\leqslant l$（通常的整数不等式）和 $i_k\leqslant i_l$（还是通常的不等式）；也就是说 (i_k, i_l) 不是 σ 的逆序。因此，例如，如果 $n=3$ 且 $\sigma=2, 3, 1$，那么 $X=\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ 和 $(1, 2)\ R\ (2, 3)$，但是 $(1, 2)\ \not{R}\ (3, 1)$。证明，R 是 X 上的偏序并且偏序集 (X, R) 的维数是 2，假设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 不同于恒等排列 1，2，⋯，n。

第 5 章　二项式系数

数$\binom{n}{k}$对 n 个元素集合的 k-组合的个数作了计数。它有许多方便的性质并满足许多有趣的等式。由于它们出现在二项式定理中（见 5.2 节），因此它们也叫做二项式系数。在产生于计算机理论科学算法分析的公式中，二项式系数反复地出现，因此熟练掌握它们是很重要的。本章我们讨论它们的一些初等性质和一些等式。证明 Sperner 的一个有用的定理，然后继续对偏序集的研究并证明 Dilworth 的一个重要的定理。

5.1 Pascal 公式

二项式系数$\binom{n}{k}$已经在 3.3 节对于所有的非负整数 k 和 n 定义过。我们记得，若 $k>n$，则$\binom{n}{k}=0$，而对所有的 n，有$\binom{n}{0}=1$。如果 n 是正的，且 $1\leqslant k\leqslant n$，那么

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \tag{5-1}$$

在 3.3 节，我们已经注意到

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

这个关系对于满足 $0\leqslant k\leqslant n$ 的所有整数 k 和 n 都成立。

定理 5.1.1（Pascal 公式）　对于满足 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的所有整数 k 和 n，

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

证明：证明这个恒等式的一种方法是代入这些二项式系数的值，然后验证两边是否相等。我们把这种直接验证的方法留给读者去做。

组合证明可以通过如下得到。令 S 是 n 个元素的集合。任取 S 的一个元素并用 x 表示之。然后把 S 的 k-组合的集合 X 划分成两部分 A 和 B。在 A 中放入那些不含 x 的 k-组合，在 B 中放入那些含 x 的 k-组合。X 的大小是 $|X|=\binom{n}{k}$，因此，由加法原理可知

$$\binom{n}{k}=|A|+|B|$$

A 中的 k-组合恰好是 $n-1$ 个元素的集合 $S-\{x\}$ 的那些 k-组合，因此 A 的大小是

$$|A|=\binom{n-1}{k}$$

B 中的k-组合是通过把x 添加到 $S-\{x\}$的$(k-1)$-组合中而得到。因此，B 的大小满足

$$|B|=\binom{n-1}{k-1}$$

结合这些事实我们得到

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$ □

为了解释这个证明，令 $n=5$，$k=3$，$S=\{x, a, b, c, d\}$。于是 S 在A 中的 3-组合是

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$$

这些是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的 3-组合。S 在B 中的 3-组合是

$$\{x,a,b\},\{x,a,c\},\{x,a,d\},\{x,b,c\},\{x,b,d\},\{x,c,d\}$$

在这些 3-组合中删除元素x，得到

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$$

它们是 $\{a, b, c, d\}$ 的 2-组合。因此

$$\binom{5}{3}=10=4+6=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}$$

通过使用关系

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

以及初始的信息

$$\binom{n}{0}=1 \text{ 和} \binom{n}{n}=1 \quad (n\geqslant 0)$$

二项式系数不必求助于公式（5-1）就能够计算出来。当二项式系数用这种方法计算的时候，其结果常常以一个阵列的形式显示，这个阵列称为 Pascal 三角形（我国宋代数学家杨辉 1261 年在其著述《详解九章算术》中就已使用过 Pascal 三角形并称之为“开方作法本源”，此外德国学者 Pertrus Apianus 在 1527 年也曾论及。Pascal 三角形在我国也称作杨辉三角或乘方求廉图——译者注）。该数组于 1653 年出现在 Blaise Pascal 的著作 *Traité du triangle arithmétique* 中，它在图 5-1 中作了解释。该三角形中的每一项，但不是出现在左边和斜边上等于 1 的那些项，通过把上一行的两项加在一起而得到：一项在直接上方而另一项则位于其左边。这正好对应于定理 5.1.1 给出的 Pascal 公式。例如，在 $n=8$ 行时，有

$$\binom{8}{3}=56=35+21=\binom{7}{3}+\binom{7}{2}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

图 5-1　Pascal 三角形

涉及二项式系数的许多关系可以借助仔细考察 Pascal 三角形而发现。对称关系

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

在这个三角形中很容易找到。定理 3.3.2 的恒等式

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

通过把 Pascal 三角形一行中的数加在一起而发现。在 $k=1$ 列上的数 $\binom{n}{1}=n$ 是计数数。在 $k=2$ 列上的数 $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ 是所谓的三角形数，它们等于图 5-2 所描述的点的三角形阵列中的点数。

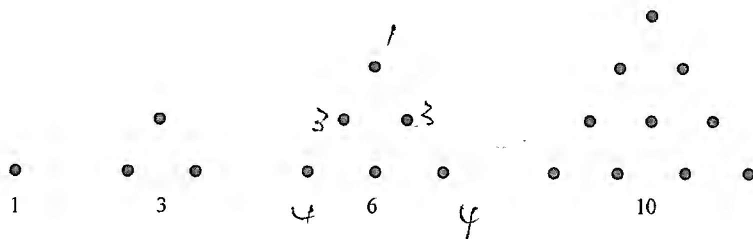


图　5-2

在 $k=3$ 列上的数 $\binom{n}{3}=n(n-1)(n-2)/3!$ 是所谓的四面体数，它们等于点的四面体阵列（想象堆起的加农炮弹）中的点数。我们鼓励读者现在就来考察 Pascal 三角形以发现涉及二项式系数的其他一些关系。

可以对 Pascal 三角形的元素给出另外的解释。令 n 是一个非负整数，并令 k 为满足 $0\leqslant k\leqslant n$ 的整数。定义

$$p(n,k)$$

为从左上顶点（项$\binom{0}{0}=1$）到项$\binom{n}{k}$的路径的条数，其中，在每一路径中，从一项移动到该项下一行在其直接下方的项或其直接右下方的项。从路径的一项到下一项所允许的两种类型的移动在图 5-3 中作了解释。

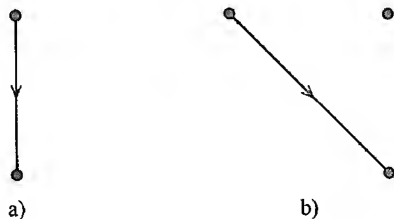


图 5-3

定义 $p(0,0)$是 1,且对于每个非负整数 n,有

$p(n,0)=1$（必须直接向下移动到$\binom{n}{0}$）

和

$p(n,n)=1$，（必须沿对角线移动到$\binom{n}{n}$）

注意，从$\binom{0}{0}$到$\binom{n}{k}$的每一条路径或者是

ⅰ）一条从$\binom{0}{0}$到$\binom{n-1}{k}$的路径,再接着一次垂直移动(a),或者

ⅱ）一条从$\binom{0}{0}$到$\binom{n-1}{k-1}$的路径,再接着一次对角移动(b)。

因此，由加法原理，有

$$p(n,k)=p(n-1,k)+p(n-1,k-1)$$

即数$p(n,k)$的 Pascal-型关系。可用与计算二项式系数$\binom{n}{k}$完全相同的方法来计算数$p(n,k)$，且以相同的初始值开始。因此，对所有的整数 n 和满足 $0\leqslant k\leqslant n$ 的k，

$$p(n,k)=\binom{n}{k}$$

于是，Pascal 三角形的项$\binom{n}{k}$的值代表从左上角到这项的路径的条数，不过只能使用类型a）和 b)的移动方式。这样，就有了数$\binom{n}{k}$的另外一种组合学解释。

5.2 二项式定理

二项式系数的名字来自它们在二项式定理中的使用。该定理最初的少数几种情形应该是一些熟悉的代数恒等式。

定理 5.2.1 令 n 是一个正整数。于是，对所有的 x 和y,

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+y^n$$

用求和记号写出，即

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

第一个证明：将$(x+y)^n$写成每一个因子都等于$x+y$的n个因子的乘积

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

用分配律将这个乘积完全展开，然后再合并同类项。由于在将$(x+y)^n$用乘法展开时对于每一个因子都可以选择x或者y，故结果存在2^n项并且每一项都可以写成$x^{n-k}y^k$的形式，其中$k=0$，1，…，n。通过在n个因子中的k个选择y且在剩下的$n-k$个因子中（默认）选择x而得到项$x^{n-k}y^k$。这样，在展开的乘积中项$x^{n-k}y^k$出现的次数等于n个因子的集合的k-组合的个数$\binom{n}{k}$。因此，

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

第二个证明：通过对n用归纳法证明。如果$n=1$，则公式变成

$$(x+y)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1=x+y$$

显然这是成立的。现在假设该公式对于正整数n成立，证明用$n+1$代替n时公式仍然成立。我们写成

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n$$

根据归纳假设，它变为

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1}&=(x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\&=x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)+y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\\&=\binom{n}{0}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+\binom{n}{n}y^{n+1}\end{aligned}$$

在最后的一个求和中，用k-1 代替k，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k$$

因此，

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}$$

用 Pascal 恒等式将上式变为

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}$$

由于$\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$，重写上式得到

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$$

这就是用 $n+1$ 代替 n 后的二项式定理，由归纳法该定理成立。 □

二项式定理可以写成几种另外的等价形式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{k}y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$$

其中的第一个公式由定理 5.2.1 和下述事实推出

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad(k=0,1\cdots,n)$$

其他两个公式则通过交换 x 和 y 得到。

$y=1$ 的情形经常出现，现在可以把它作为一个特殊情形记述如下。

定理 5.2.2 令 n 为一正整数。则对所有的 x，

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k$$

二项式定理在 $n=2$，3，4 时的特殊情况为

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

注意 在这些展开式中出现的系数就是 Pascal 三角形的行上的数。从定理 5.2.1 和 Pascal 三角形的构造可知，情况正是如此。

5.3 一些恒等式

现在考虑二项式系数所满足的某些另外的恒等式。恒等式

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}\quad(n\text{ 和 }k\text{ 为正整数})\tag{5-2}$$

由若 $k>n$，则$\binom{n}{k}=0$ 的事实和

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots1}(1\leqslant k\leqslant n)$$

直接导出。恒等式

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (n\geqslant 0) \tag{5-3}$$

已经在定理 3.3.2 中证明，但是它也可由二项式定理令 $x=y=1$ 推出。如果在二项式定理中，置 $x=1$，$y=-1$，就得到

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (n\geqslant 1) \tag{5-4}$$

也可以把它写成

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots \qquad (n\geqslant 1) \tag{5-5}$$

可以将这个等式解释如下。如果 S 是 n 个元素的集合，则 S 的具有偶数个元素的组合的个数等于 S 的具有奇数个元素的组合的个数。确实，二者都有值 2^{n-1}；就是说，

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=2^{n-1} \tag{5-6}$$

和

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1} \tag{5-7}$$

可以通过组合推理验证这些恒等式如下。令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 n 个元素的集合。可以把 S 的组合看作下面决策过程的结果：

ⅰ）考虑 x_1 并决定或者把它放入或者把它留在外面（两种选择）；

ⅱ）考虑 x_2 并决定或者把它放入或者把它留在外面（两种选择）；

⋮

n）考虑 x_n 并决定或者把它放入或者把它留在外面（两种选择）。

我们有 n 个决策要作，每个决策都有两个选择。这样，正如我们从式(5-3)得知的，共存在 2^n 个组合。

假设现在要选择具有偶数个元素的一个组合。此时对于 x_1，…，x_{n-1}的每一个都有两个选择。但是，当决定 x_n 时却只有一种选择。因为如果已经选择了 x_1，x_2，…，x_{n-1}中的偶数个，那么就必须把 x_n 留在外面不选；如果已经选择了 x_1，x_2，…，x_{n-1}中的奇数个，那么就必须再选择 x_n。因此，S 的具有偶数个元素的组合的个数等于 2^{n-1}。由于式(5-6)的左边也是对 S 的具有偶数个元素的组合个数的计数，故式(5-6)成立。以类似的方法可以验证式(5-7)（不过，现在我们知道，式(5-3)和式(5-6)都成立，当然式(5-7)也成立）。

使用式(5-2)和式(5-3)，可以得到下列的恒等式：

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1} \qquad (n\geqslant 1) \tag{5-8}$$

为了看出这一点，首先注意由式(5-2)可知，式(5-8)等价于

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}=n2^{n-1}\qquad(n\geqslant 1)\qquad(5\text{-}9)$$

但是现在通过式（5-3），用 $n-1$ 代替 n，

$$\begin{aligned}&n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}\\&=n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right)\\&=n2^{n-1}\end{aligned}$$

于是式(5-9)，从而式(5-8)成立。验证式(5-8)的另一种方法如下。由二项式定理，

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

在两边对 x 微分，得到

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1},$$

代入 $x=1$，也得到式（5-8）。

许多有趣的恒等式可以通过对二项式表达式的逐次微分和乘法得到。为了简便，使用求和记号。从

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

开始。两边对 x 微分，得到

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

用 x 乘两边，得到

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k$$

两边再对 x 微分，又有

$$n[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

代入 $x=1$，得到

$$n[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

从而

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}\quad(n\geqslant 1)\tag{5-10}$$

通过逐次用 x 去乘，并对 x 微分，可以得到关于

$$\sum_{k=1}^{n}k^p\binom{n}{k}$$

对于任意正整数 p 的一个恒等式。

关于 Pascal 三角形一行上各数的平方和的恒等式为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\quad(n\geqslant 0)\tag{5-11}$$

等式(5-11)可以通过组合学推理验证。令 S 为 $2n$ 个元素的集合。式(5-11)的右边为 S 的 n-组合的个数。把 S 划分成两个子集 A 和 B，每个子集都有 n 个元素。用 S 的这个划分来划分 S 的 n-组合。S 的每个 n-组合含有 A 的 k 个元素，而其余的 $n-k$ 个元素则来自 B。这里 k 可以是 0 和 n 之间的任意整数。我们把 S 的 n-组合划分为 $n+1$ 个部分：

$$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$$

其中 C_k 由那些包含 A 的 k 个元素和 B 的 $n-k$ 个元素的 n-组合组成。根据加法原理，

$$\binom{2n}{n}=|C_0|+|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_n|\tag{5-12}$$

C_k 的一个 n-组合通过从 A 中选择 k 个元素(存在 $\binom{n}{k}$ 个选择)，然后从 B 中再选（$n-k$）个元素(存在 $\binom{n}{n-k}$ 个选择）得到。因此，由乘法原理，

$$|C_k|=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

把它代入到式(5-12)中，得到

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

这就证明了式(5-11)(该等式的一个推广在练习 25 中给出，叫做 Vandermonde 卷积)。

现在我们把数 $\binom{n}{k}$ 定义域扩展到允许 n 为任意实数而 k 为任意正整数(正数、负数或零)。

令 r 为实数且 k 为整数。然后定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 如下：

$$\binom{r}{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} & \text{若 } k\geqslant 1\\ 1 & \text{若 } k=0\\ 0 & \text{若 } k\leqslant -1\end{cases}$$

例如，

$$\binom{5/2}{4}=\frac{(5/2)(3/2)(1/2)(-1/2)}{4!}=\frac{-5}{128}$$

$$\binom{-8}{2}=\frac{(-8)(-9)}{2}=36$$

$$\binom{3.2}{0}=1 \quad 和$$

$$\binom{3}{-2}=0$$

Pascal 公式和式(5-2)即

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1} 和 \quad k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1}$$

现在对于所有的 r 和 k 都是有效的。这些公式中的每一个都可以通过直接代入来验证。通过重复使用 Pascal 公式，可以得到二项式系数的两个求和公式。

考虑 Pascal 公式：

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

这里 k 等于一个正整数。我们可以将 Pascal 公式应用到右边两个系数中的任一个，并得到 $\binom{r}{k}$ 作为三个二项式系数的和的表达式。假设我们反复把 Pascal 公式应用到出现在其中的第二个二项式系数（即具有较低变量的那一个）。然后我们得到

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-2}{k-2}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-3}{k-2}+\binom{r-3}{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-3}{k-2}+\cdots+\binom{r-k}{1}+\binom{r-k-1}{0}+\binom{r-k-1}{-1}$$

最后一项 $\binom{r-k-1}{-1}$ 为 0 可以去掉。如果我们在上面的和中用 $r+k+1$ 代替 r 并交换等号的两边，则得到

$$\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{r+k}{k}=\binom{r+k+1}{k} \tag{5-13}$$

等式(5-13)对所有的实数 r 和所有的整数 k 均成立。注意，在式(5-13)中上面的变量从 r

开始，下面的变量从0开始，而这些变量是逐次增1的。

现在反复把Pascal公式应用到出现在其中的第一个二项式系数上。令 k 是一个正整数。此时得到

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-2}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-3}{k}+\binom{r-3}{k-1}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-t}{k}+\binom{r-t}{k-1}+\binom{r-t+1}{k-1}+\cdots+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

这里，t 表示等于Pascal公式应用次数的一个整数。现在让我们假设 $r=n$ 是一个正整数。于是，在使用 $t=n$ 次Pascal公式后，得到一个二项式系数，它上面的变量为0。由于 $\binom{0}{k}=0$，得到

$$\binom{n}{k}=\binom{0}{k-1}+\binom{1}{k-1}+\cdots+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}$$

现在用 $k+1$ 代替 k 且用 $n+1$ 代替 n 并交换等号两边的项得到

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\cdots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \tag{5-14}$$

恒等式(5-14)对于所有的非负整数 k 和 n 均成立。重要的是要理解该等式正是Pascal公式的迭代形式。

如果在式(5-14)中取 $k=1$，就得到前 n 个正整数求和的公式：

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

恒等式(5-13)和式(5-14)可以用数学归纳法和Pascal公式证明。这些留作练习。二项式系数的一些其他恒等式也在练习题中给出。

5.4　二项式系数的单峰性

如果考察Pascal三角形一行上的二项式系数，就会发现这些系数先是递增然后又递减。具有这种性质的数值序列称作是单峰的。因此，如果存在一个整数 t，$0\leqslant t\leqslant n$，使得

$$s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_t \qquad s_t\geqslant s_{t+1}\geqslant\cdots\geqslant s_n$$

那么序列 s_0，s_1，s_2，…，s_n 就是单峰的。数 s_t 为序列中的最大数。整数 t 不必是唯一的，

因为最大数可以在序列中出现多于一次。例如，如果 $s_0=1$，$s_1=3$，$s_2=3$ 和 $s_3=2$，那么

$$s_0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \qquad s_2 \geqslant s_3 \qquad (t=2)$$

但也有

$$s_0 \leqslant s_1 \qquad s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \qquad (t=1)$$

定理 5.4.1　令 n 为正整数。二项式序列

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}$$

是单峰序列。更精确地说，如果 n 是偶数，

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}$$

而如果 n 是奇数，则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{(n-1)/2}=\binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}$$

证明：考虑序列中连续两个二项式系数的商。令 k 为一整数且满足 $1\leqslant k\leqslant n$。于是

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!\ (n-k+1)!}}=\frac{n-k+1}{k}$$

因此

$$\binom{n}{k-1}<\binom{n}{k},\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k}\text{或者}\binom{n}{k-1}>\binom{n}{k}$$

要依照

$$k<n-k+1,\quad k=n-k+1\quad \text{或者}\quad k>n-k+1$$

而定。现知 $k<n-k+1$ 当且仅当 $k<(n+1)/2$。如果 n 是偶数，那么$k<(n+1)/2$ 等价于 $k\leqslant n/2$。如果 n 是奇数，那么$k<(n+1)/2$ 等价于$k\leqslant(n-1)/2$ 。因此，二项式系数按照定理叙述中所指出的增加。现在观察，$k=n-k+1$ 当且仅当 $2k=n+1$。如果 n 是偶数，则对任何的 k 都有 $2k\neq n+1$。如果 n 是奇数，则对$k=(n+1)/2$ ，有 $2k=n+1$。因此，对于偶数 n，序列中没有两个相邻的二项式系数相等。对于奇数 n，具有相等值的唯一两个相邻二项式系数是

$$\binom{n}{(n-1)/2} \text{和} \binom{n}{(n+1)/2}$$

二项式系数以相似的方式按照定理叙述中所指出的递减。 □

对任意实数 x，令 $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。整数 $\lfloor x \rfloor$ 称为 x 弱取整(floor)。类似地，x 的强取整（ceiling）为大于或等于 x 的最小整数 $\lceil x \rceil$。例如，

$$\left\lfloor 2\frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \qquad \lfloor 3 \rfloor = 3 \qquad \left\lfloor -1\frac{1}{2} \right\rfloor = -2$$

和

$$\left\lceil 2\frac{1}{2} \right\rceil = 3 \qquad \lceil 3 \rceil = 3 \qquad \left\lceil -1\frac{1}{2} \right\rceil = -1$$

还有

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}, \text{若 } n \text{ 是偶数}$$

及

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \text{和} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}, \text{若 } n \text{ 是奇数}$$

推论 5.4.2　对于正整数 n，二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$$

的最大者为

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$$

证明：该推论由定理 5.4.1 以及前面对于弱取整和强取整函数的观察导出。 □

为结束本节我们来讨论定理 5.4.1 的一个推广，叫做 Sperner 定理[⊖]。令 S 是 n 个元素的集合。S 的一个杂置（clutter，在偏序集的更一般的叙述中称为反链）是 S 的组合的集合 C，具有这样的性质：C 中没有组合含于另一个组合。例如，若 $S=\{a,b,c,d\}$，则

$$C = \{\{a,b\},\{b,c,d\},\{a,d\},\{a,c\}\}$$

就是一个杂置。得到集 S 的杂置的一种方法是选择一个整数 $k \leqslant n$，然后取 C_k 为 S 的所有的 k-组合。由于 C_k 中的每一个组合都有 k 个元素，因此在 C_k 中没有组合能够包含另外的组合，从而 C_k 是一个杂置。由前面的推论得出，用这种方法构造的杂置至多含有

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

⊖ E. Sperner：Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menger［关于有限集子集的一个定理］，*Math. Zeitschrift*，27（1928），544-548。

个集合。例如，若 $n=4$ 和 $S=\{a,b,c,d\}$，则 S 的 2-组合给出大小为 6 的杂置。

$$C_2=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$$

那么，我们能否通过选取不止一种大小的组合来得到更大的杂置呢？这个问题的答案是否定的，这就是 Sperner 定理的结论。

定理 5.4.3 令 S 为 n 个元素的集合。则 S 的杂置最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ 个集合。

证明： 定理的证明并不难，但是由于我们要引入和解释某些新概念，因此证明看起来有些长。取集合 S 为前 n 个正整数的集合，并通过对 n 的归纳法证明该定理。实际上，对 n 用归纳法证明下述更强的结果：

S 的所有 2^n 个组合的集合可以被划分成 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ 部分，使得任意杂置最多含有每一部分中的一个组合。

怎么能够保证一个杂置最多含有每个部分的一个组合呢？这太容易了！只要让这些部分始终保持这样的性质：对于一个部分中的任意两个组合，一个含在另一个中。具有这种性质的组合的集合叫做链。这里是对于 $n=1$，2，3 分割成链的划分：

$n=1$：

$$\varnothing\subset\{1\}$$

$n=2$：

$$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}$$
$$\{2\}$$

$n=3$：

$$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$$
$$\{2\}\subset\{2,3\}$$
$$\{3\}\subset\{1,3\}$$

于是，例如，$n=3$，由于一个杂置最多只能包含所示的 3 个链中每一个链的一个组合，因此该杂置最多包含 3 个组合。通过对 $\{1, 2, 3\}$ 所示的链划分得出对 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的组合的链划分如下。取多于一个组合的每一个链（对于 $n=3$，所示的链都具有这个性质），做成 $n=4$ 的两个链：其一是通过把 4 添加到原链的最后一个组合中得到一个新的组合，再把这个新组合添到链的末尾得到，另一个则是通过把 4 添加到原链除最后一个组合外的所有的组合中得到。于是，链

$$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$$

变成

$$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}\text{和}$$
$$\{4\}\subset\{1,4\}\subset\{1,2,4\}$$

链

$$\{2\}\subset\{2,3\}$$

变成

$$\{2\}\subset\{2,3\}\subset\{2,3,4\}\text{和}$$
$$\{2,4\}$$

而链

$$\{3\}\subset\{1,3\}$$

变成

$$\{3\}\subset\{1,3\}\subset\{1,3,4\}\text{和}$$
$$\{3,4\}$$

这样得到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的组合的$6=\binom{4}{2}$个链的一个链划分。在 $n=4$ 的这个划分中，这些链有两个特殊的性质。链中的每个组合都比它在链中的前趋组合多一个元素（当存在前趋组合时）。链中的第一个组合的大小加上该链的最后一个组合的大小是 $n=4$。类似性质对于 $n=1$，2 和 3 时的链划分也是成立的。集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的组合的链划分如果

ⅰ）链中的每个组合都比它在链中的前趋组合多一个元素；

ⅱ）链中的第一个组合的大小加上该链的最后一个组合的大小是 n。

则该链划分就是对称的链划分。在对称链划分中的每一个链都恰好含有一个$\lfloor n/2\rfloor$-组合（以及恰好一个$\lceil n/2\rceil$-组合），因此在对称链划分中链的个数是

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}$$

正如上面对于 $n=3$ 所述的那样，对于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的对称的链分解可以从$\{1,2,\cdots,n-1\}$的对称的链分解归纳得到。在$\{1,2,\cdots,n-1\}$的对称的链划分中，取每一个链

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\ \text{其中}\ |A_1|+|A_k|=n-1$$

并按照 $k=1$ 还是 $k>1$ 得到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个或是两个链：

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset A_k\cup\{n\}\quad\text{其中}\ |A_1|+|A_k\cup\{n\}|=n$$

和

$$A_1\cup\{n\}\subset\cdots\subset A_{k-1}\cup\{n\}\quad\text{其中}\ |A_1\cup\{n\}|+|A_{k-1}\cup\{n\}|=n$$

（如果 $k=1$，则第二个链不出现）。$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的每一个组合恰好出现在用这种方法构造的一个链中，因此链的最后结果的集合形成对于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个对称的链划分。

在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的对称的链划分中链的个数是

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

因此，在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的杂置中的组合的个数最多等于

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

□

如果 n 是偶数,可以证明,只有大小为$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$的杂置才是 S 的所有的$\frac{n}{2}$-组合的杂置。如果 n 是奇数，只有那些这样大小的杂置才是 S 的所有的$\frac{n-1}{2}$-组合的杂置和所有的$\frac{n+1}{2}$-组合的杂置。见练习题 29。

5.5 多项式定理

二项式定理给出对每一个正整数 n 的$(x+y)^n$ 的公式。它可以被推广到$(x+y+z)^n$，或更一般地 t 个实数的和的n 次幂（$x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 的公式。在一般的公式中，二项式系数的角色被所谓的多项式系数代替，后者被定义为

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_t}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_t!} \tag{5-15}$$

此处，n_1，n_2，…，n_t 是非负整数且

$$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$$

由 3.4 节可知，式（5-15）表示重数分别为 n_1，n_2，…，n_t 的 t 种不同类型物体的多重集的排列个数。对于非负的 n 和k，具有值

$$\frac{n!}{k!\ (n-k)!} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

的二项式系数$\binom{n}{k}$在上述记号中变成了

$$\binom{n}{k \quad n-k}$$

并表示重数分别为 k 和$n-k$ 的两种不同类型物体多重集的排列个数。

在这个记号中，对于 n 和k 为正的二项式系数的 Pascal 公式为

$$\binom{n}{k \quad n-k}=\binom{n-1}{k \quad n-k-1}+\binom{n-1}{k-1 \quad n-k}$$

取元素 x.

多项式系数的 Pascal 公式为

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \cdots\ n_t}$$
$$=\binom{n-1}{n_1-1\ n_2\cdots\ n_t}+\binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_t}+\cdots+\binom{n-1}{n_1\ n_2\cdots\ n_t-1} \tag{5-16}$$

式（5-16）可以通过将式（5-15）中多项式系数的值直接代入来验证。例如，令 $t=3$，并令 n_1，n_2 和 n_3 是正整数且 $n_1+n_2+n_3=n$。于是

$$\binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ n_3}+\binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ n_3}+\binom{n-1}{n_1\ n_2\ n_3-1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!\ n_2!\ n_3!}+\frac{(n-1)!}{n_1!\ (n_2-1)!\ n_3!}+\frac{(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ (n_3-1)!}$$
$$=\frac{n_1\times(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}+\frac{n_2\times(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}+\frac{n_3\times(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$
$$=(n_1+n_2+n_3)\times\frac{(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}=n\times\frac{(n-1)!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}=\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3}$$

式(5-16)的组合学验证在练习中将给出提示。

在开始讨论一般性的定理之前，首先考虑一种特殊的情况。令 x_1，x_2 和 x_3 为实数。将

$$(x_1+x_2+x_3)^3$$

完全乘开并合并同类项（要求读者必须动手练一练），得到和

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+3x_1^2x_3+3x_1x_3^2+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+6x_1x_2x_3$$

在上式中出现的项都是形如 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ 的项，其中 n_1, n_2, n_3 是非负整数，且 $n_1+n_2+n_3=3$。在该表达式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ 的系数等于

$$\binom{3}{n_1\ n_2\ n_3}=\frac{3!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$

更一般地，有下列恒等式。

定理 5.5.1 令 n 为一正整数。对所有的 x_1，x_2，$\cdots$，x_t，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

其中求和对 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ 的所有的非负整数解 n_1，n_2，$\cdots$，n_t 进行。

证明：将二项式定理的第一个证明推广。把 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 写成 n 个因子的乘积，每个因子等于 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)$。用分配律及合并同类项将这个乘积完全展开。对于 n 个因子中的每一个，选取 t 个数 x_1，x_2，$\cdots$，x_t 中的一个并形成乘积。用这种方法所得结果共有 t^n 项，而且每一项都可以写成 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ 的形式，其中 n_1，n_2，$\cdots$，n_t 是非负整数，且其和为 n。通过选择 n 个因子中的 n_1 个为 x_1，剩下的 $n-n_1$ 个因子中的 n_2 个为 x_2，$\cdots$，剩下的 $n-n_1-\cdots-n_{t-1}$ 个因子中的 n_t 个为 x_t，得到 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ 项。由乘法原理，项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ 出现的次数由

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

给出。由 3.4 节得知，这个数等于多项式系数

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_t!}$$

这就证明了本定理。 □

例 当 $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$ 被展开时，$x_1^2x_3x_4^3x_5$ 的系数等于

$$\binom{7}{2\ 0\ 1\ 3\ 1}=\frac{7!}{2!\ 0!\ 1!\ 3!\ 1!}=420$$ □

例 当 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 被展开时，$x_1^3x_2x_3^2$ 的系数等于

$$\binom{6}{3\ 1\ 2}2^3(-3)(5)^2=-36\ 000$$ □

出现在 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 的多项式展开式中的不同的项的数目等于

$$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$$

的非负整数解的数目。从 3.5 节可以推出，这些解的个数等于

$$\binom{n+t-1}{n}$$

因此，例如，若将 $(x_1+x_2+x_3+x_4)^6$ 完全乘开，则它含有

$$\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}=84$$

个不同的项。

5.6 牛顿二项式定理

1676 年，牛顿推广了 5.2 节给出的二项式定理并得到 $(x+y)^\alpha$ 的展开式，其中；α 是任意实数。然而，对于一般的指数，这种展开式将变成一个无穷级数，需要考虑收敛性问题。我们将只局限于叙述定理和考虑某些特殊的情况。这个定理的证明可以在大多数的高等微积分书中找到。

定理 5.6.1 *令 α 是一个实数。则对于所有满足 $0\leqslant|x|<|y|$ 的 x 和 y，*

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^ky^{\alpha-k}$$

其中

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

如果 α 是正整数 n，那么对 $k>n$，$\binom{n}{k}=0$，上述展开式变成

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

这与5.2节的二项式定理一致。

如果置 $z=x/y$，则 $(x+y)^{\alpha}=y^{\alpha}(z+1)^{\alpha}$。于是定理5.6.1可以用等价的形式叙述为：对满足 $|z|<1$ 的任意 z，

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k}$$

设 n 是一个正整数，选择 α 为负整数 $-n$，则

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{-n}{k}=\frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$
$$=(-1)^{k}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$
$$=(-1)^{k}\binom{n+k-1}{k}$$

因此，对 $|z|<1$，

$$(1+z)^{-n}=\frac{1}{(1+z)^{n}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{n+k-1}{k}z^{k}$$

用 $-z$ 代替 z，得到

$$(1-z)^{-n}=\frac{1}{(1-z)^{n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^{k} \tag{5-17}$$

如果 $n=1$，则 $\binom{n+k-1}{k}=\binom{k}{k}=1$，我们得到

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}z^{k}\qquad(|z|<1)$$

和

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\qquad(|z|<1) \tag{5-18}$$

在展开式(5-17)中出现的二项式系数 $\binom{n+k-1}{k}$ 是在前面计数问题中已经出现的类型，而这就提出对式(5-17)的一个可能的组合学推导。我们从无穷几何级数式(5-18)开始。此时

$$\frac{1}{(1-z)^{n}}=(1+z+z^{2}+\cdots)\cdots(1+z+z^{2}+\cdots)\quad(n\text{ 个因子}) \tag{5-19}$$

通过从第一个因子选取 z^{k_1}，从第二个因子选取 z^{k_2}，…，从第 n 个因子选取 z^{k_n}，得到这个乘积中的一项 z^{k}，其中诸 k_1，k_2，…，k_n 为非负整数，其和为 k：

$$z^{k_1}z^{k_2}\cdots z^{k_n}=z^{k_1+k_2+\cdots+k_n}=z^{k}$$

因此，得到 z^{k} 的不同方法数，即式(5-19)中 z^{k} 的系数，等于

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k$$

的非负整数解的个数，而我们知道它就是

$$\binom{n+k-1}{k}$$

二项式定理可以用来得到任意精度的平方根。如果取 $\alpha=\frac{1}{2}$，那么

$$\binom{\alpha}{0}=1$$

而对于 $k>0$

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{1/2}{k}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\ \frac{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2k-3)\times(2k-2)}{2\times4\times\cdots\times(2k-2)\times(k!)}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

因此，对 $|z|<1$，

$$\sqrt{1+z}=(1+z)^{1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\times2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k$$

$$=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2\times2^3}\binom{2}{1}z^2+\frac{1}{3\times2^5}\binom{4}{2}z^3-\cdots$$

例如，

$$\sqrt{20}=\sqrt{16+4}=4\sqrt{1+0.25}$$

$$=4(1+\frac{1}{2}(0.25)-\frac{1}{8}(0.25)^2+\frac{1}{16}(0.25)^3-\cdots)$$

$$=4.472\cdots$$

在第 7 章，我们将一般的二项式定理用在由生成函数得到的某些递推关系的解中。

5.7 再论偏序集

在 5.4 节我们讨论了集 X 的所有子集的偏序集 $\mathcal{P}(X)$ 上的反链（或称杂置）和链的概念。本节我们把这些概念扩展到一般意义下的偏序集并证明某些基本的定理。

令 $(X,\leqslant)$ 是一个有限偏序集。**反链**是 X 的一个子集 A，它的任意两个元素都不能进行比较。相比之下，**链**是 X 的一个子集 C，它的每一对元素都是可比较的。于是，链是 X 的一个全序子集，由定理 4.5.2，链的元素可以被线性地排序：$x_1<x_2<\cdots<x_t$。通常，我们表示一个链是以这种方式将其写成线性序的形式。从定义立刻得知，链的子集也是链，反链的子集还是反链。反链和链之间的重要联系为：

如果 A 是一个反链而 C 是一个链，则 $|A\cap C|\leqslant1$。

例　令 $X=\{1,2,\cdots,10\}$，并考虑偏序集 $(X,|)$，它的偏序 $|$ 即“可被…整除”。于是，$\{4,6,7,9,10\}$ 是大小为 5 的反链，而 $1|2|4|8$ 是大小为 4 的链。不存在大小为 6 的反链，也不存在大小为 5 的链。 □

令 $(X,\leqslant)$ 是一个有限偏序集。考虑将 X 分成链的划分以及分成反链的划分。如果存在大小为 r 的链 C，则由于 C 中没有两个元素能够同属于一个反链，X 不能划分成少于 r 个反链。类似地，如果存在大小为 s 的反链 A，则由于 A 中没有两个元素能够同属于一个链，X 不能划分成少于 s 个链。本节的主要目的就是要证明两个定理，这两个定理把反链和链之间的这种联系更加精确化。虽然在链和反链之间有这种“对偶性”[1]，但其中一个定理的证明相当简短，而另一个的证明则要复杂一些。

回忆：偏序集的极小元是一个元素 a，使得没有异于 a 的元素 x 满足 $x\leqslant a$。一个极大元是一个元素 b，使得没有异于 b 的元素 y 满足 $b\leqslant y$。偏序集的所有极小元的集合形成一个反链，所有极大元的集合也是如此。

定理 5.7.1　令 $(X,\leqslant)$ 是一个有限偏序集，并令 r 是链的最大的大小。则 X 可以被划分成 r 个但不能再少的反链。

证明： 正如上面已经提到的，X 不能划分成少于 r 个的反链。这样，只要证明 X 可以被划分成 r 个反链即可。令 $X_1=X$，并令 A_1 是 X 的极小元的集合。从 X_1 中删除 A_1 的元素得到 X_2，并令 A_2 是 X_2 的极小元的集合。应当指出，对 A_2 的每个元素，存在 A_1 的元素 a_1 使得 $a_1<a_2$。从 X_2 中删除 A_2 的元素得到 X_3，并令 A_3 是 X_3 的极小元的集合。继续这样做下去，直到使得 $X_p\neq\varnothing$ 但 $X_{p+1}=\varnothing$ 的第一个整数 p。于是 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 即为将 X 分成反链的划分。此外，存在一个链

$$a_1<a_2<\cdots<a_p$$

其中，a_1 在 A_1 内，a_2 在 A_2 内，…，a_p 在 A_p 内。既然 r 是链的最大的大小，则 $r\geqslant p$。由于 X 被划分为 p 个反链，又有 $r\leqslant p$。因此 $r=p$，定理得证。 □

其“对偶”定理一般叫做 Dilworth 定理。

定理 5.7.2　令 $(X,\leqslant)$ 是一个有限偏序集，并令 m 是反链的最大的大小。则 X 可以被划分成 m 个但不能再少的链。

证明[2]**：** 正如上面已经注释的，X 不能划分成少于 s 个的链。这样，只要证明 X 可以被划分成 s 个链即可。通过对 X 中的元素个数 n 的归纳法来证明之。如果 $n=1$，则结论显然成立。设 $n>1$。

我们考虑两种情形：

情形 1. 存在大小为 m 的反链 A，它既不是 X 的所有极大元的集合，也不是 X 的所有极小元的集合。

在这种情况下，令

[1] 在链中每一对元素是可比较的；在反链中每一对元素是不可比较的。

[2] 这个特别简单的证明取自：M. A. Perles: A Proof of Dilworth's decomposition theorem for Partially ordered sets（关于偏序集 Dilworth 分解定理的一个证明），*Israel J. Math.*, 1(1963), 105-107。

$$A^+=\{x: x \text{ 在} X \text{ 内且对} A \text{ 中某个} a, a \leqslant x\}$$
$$A^-=\{x: x \text{ 在} X \text{ 内且对} A \text{ 中某个} a, x \leqslant a\}$$

这样,A^+由所有A"上方"的元素组成,而A^-由所有A"下方"的元素组成。下述性质成立:

ⅰ)由于存在一个不在A中的极小元,故$A^+ \neq X$(从而$|A^+|<|X|$);

ⅱ)由于存在一个不在A中的极大元,故$A^- \neq X$(从而$|A^-|<|X|$);

ⅲ)$A^+ \cap A^-=A$,这是因为假如存在一个元素x,在$A^+ \cap A^-$中但不在A中,那么我们就会对A中的某元素a_1和a_2有$a_1<x<a_2$,这与A是反链矛盾;

ⅳ)$A^+ \cup A^-=X$,这是因为假如存在一个元素x不在$A^+ \cup A^-$中,那么$A \cup \{x\}$就是一个大小比A还要大的反链。

我们应用归纳假设于更小的偏序集A^+和A^-上,并断定A^+可以被划分成m个链E_1,E_2,…,E_m,A^-可以被划分成m个链F_1,F_2,…,F_m。A的元素都是A^-的极大元,从而是链F_1,F_2,…,F_m的最后的那些元素;A的元素都是A^+的极小元,从而是链E_1,E_2,…,E_m的最开始的那些元素。把这些链成对"粘"在一起形成m个链,它们是X的一个划分。

情形2. 最多存在两个大小为m的反链,即所有极大元的集合和所有极小元的集合,或它们之中的一个。令x是极小元而y是极大元且$x \leqslant y$(x可以等于y),此时,$X-\{x,y\}$的一个反链的最大的大小为$m-1$。根据归纳假设,$X-\{x,y\}$可以被划分成$m-1$个链。这些链和链$x \leqslant y$一起给出了将X分成m个链的一个划分。 □

5.8 练习题

1. 通过代入由方程(5-1)给出的二项式系数的值,证明Pascal公式。
2. 填写Pascal三角形对应$n=9$和10的两行。
3. 考虑沿Pascal三角形从左向右上的那些对角线上的二项式系数的和。其前几个为:1,1,$1+1=2$,$1+2=3$,$1+3+1=5$,$1+4+3=8$。再多计算几个这样的对角线的和,并确定这些和的关系(将这些值与第1章练习4中计数函数f的值进行比较)。
4. 用二项式定理展开$(x+y)^5$和$(x+y)^6$。
5. 用二项式定理展开$(2x-y)^7$。
6. 在$(3x-2y)^{18}$的展开式中,x^5y^{13}的系数是什么?x^8y^9的系数是什么?(后一问并非排印的错误)
7. 用二项式定理证明

$$3^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

对任意实数r推广求和

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k$$

8. 用二项式定理证明

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}$$

9. 计算和

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}10^k$$

的值。

10. 使用组合学推理证明恒等式(5-2)(提示:考虑选择一队人,并指定其中一人为队长)。

11. 用组合学推理证明（以下面形式给出的）恒等式

$$\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}$$

（提示：令 S 是三个互异元素 a，b 和 c 的集合，并计算 S 的某些 k-组合。）

12. 令 n 是一个正整数。证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2=\begin{cases}0,\text{若 } n \text{ 是奇数}\\(-1)^m\binom{2m}{m},\text{若 } n=2m\end{cases}$$

（提示：对 $n=2m$，考虑 x^n 在 $(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n$ 的系数。）

13. 求出等于下列表达式的一个二项式系数

$$\binom{n}{k}+3\binom{n}{k-1}+3\binom{n}{k-2}+\binom{n}{k-3}$$

14. 证明

$$\binom{r}{k}=\frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}$$

其中 r 为实数，k 是一个整数且 $r\neq k$。

15. 证明对于每一个整数 $n>1$

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

16. 通过积分二项式的表达式，证明对正整数 n 有

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

17. 通过使用式(5-2)和式(5-3)，证明上一题的恒等式。

18. 求和

$$1-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

19. 通过观察

$$m^2=2\binom{m}{2}+\binom{m}{1}$$

并使用恒等式(5-14)，求级数 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和。

20. 求整数 a，b 和 c，使得对所有的 m

$$m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$$

然后求级数 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的和。

21. 证明对所有的实数 r 和所有的整数 k，

$$\binom{-r}{k}=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}$$

22. 证明对所有的实数 r 和所有的整数 k 和 m，

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

23. 一名学生每天都从家走到学校，学校位于其家以东 10 个街区及以北 14 个街区处。她总是选择最短的 24 个街区的途径。
    ⅰ）有多少可能的不同的途径？
    ⅱ）设在她家以东 4 个街区及以北 5 个街区处住着她最好的朋友，她每天都在去学校的路上遇见这位朋友。此时，又有多少可能的不同的途径？
    ⅲ）此外，再设在她的朋友家以东 3 个街区和以北 6 个街区处有一个公园，这两个女孩每天都停在那里休息和游戏。此时，又有多少可能的不同的途径？
    ⅳ）由于在公园休息和游戏，这两个学生常常上学迟到。为避免公园的诱惑，这两个学生决定再不过公园所在的那个街口。现在，又有多少不同的途径？

24. 考虑一个三维网格，它的维数是 $10\times15\times20$。你位于网格的前左下角，并想要到达后右上角 45 个“街区”处。存在多少不同的路径使你恰好走过 45 个街区？

25. 应用组合学论证方法，证明二项式系数的 *Vandermonde* 卷积：对所有的正整数 m_1，m_2 和 n，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}$$

作为特殊情形，推导恒等式(5-11)。

26. 令 n 为一正整数。通过代换验证

$$\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

然后给出组合学证明。

27. 令 n 和 k 为整数，且 $1\leqslant k\leqslant n$。证明

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}=\frac{1}{2}\binom{2n+1}{n+1}-\binom{2n}{n}$$

28. 令 n 和 k 为正整数。给出恒等式（5-10）

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

的组合学证明。

29. 令 n 和 k 为正整数。给出

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$$

的组合学证明。

30. 求出并证明关于

$$\sum_{\substack{r,s,t\geqslant 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}$$

的公式，其中求和扩展到对所有非负整数 r，s 和 t，且 $r+s+t=n$。

31. 证明，$S=\{1,2,3,4\}$ 的大小为 6 的唯一的杂置（clutter）是 S 的所有的 2-组合的杂置。

32. 证明，$S=\{1,2,3,4,5\}$ 的大小为 10 的杂置只有两个（由 Sperner 定理，10 是最大值），即 S 的所有 2-组合的杂置和所有 3-组合的杂置。

*33. 令 S 是 n 个元素的集合。证明，如果 n 是偶数，则大小为 $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$ 的唯一杂置是所有 $\frac{n}{2}$-组合的杂置；如果 n 是奇数，证明该大小仅有的两个杂置是所有 $\frac{n-1}{2}$-组合的杂置和所有 $\frac{n+1}{2}$-组合的杂置。

34. 构造一个将 $\{1,2,3,4,5\}$ 的组合分成对称链的划分。

35. 在将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的组合分成对称链的划分中，其中有多少链只有一个组合？两个组合？k 个组合？

36. 说笑话（talk show）节目主持人仅带了 10 个新笑话。每晚上他都讲一些笑话。使你能够收听到从未在此前的晚上至少全部播放过的笑话，这样的晚上的最大数目是多少？（例如，你在一个晚上收听了笑话 1、2 和 3，在另一个晚上收听了笑话 3 和 4，而在第三个晚上收听了笑话 1、2 和 4，这是本题可以接受的。但是如果你在一个晚上收听了笑话 1 和 2，而在另一个晚上收听了笑话 2，这就不是本题所指的那种晚上。）

37. 使用二项式定理和关系 $(1+x)^{m_1}(1+x)^{m_2}=(1+x)^{m_1+m_2}$，证明练习 25 中的恒等式。

38. 用多项式定理证明，对正整数 n 和 t

$$t^n=\sum\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}$$

其中求和是对 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ 的所有的非负整数解 n_1，n_2，$\cdots$，n_t 进行。

39. 应用多项式定理展开 $(x_1+x_2+x_3)^4$。

40. 确定在

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$$

的展开式中 $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$ 的系数。

41. 在

$$(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$$

的展开式中 $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ 的系数是什么？

42. 通过观察

$$(x_1+x_2+x_3)^n=((x_1+x_2)+x_3)^n$$

然后使用二项式定理展开 $(x_1+x_2+x_3)^n$。

43. 通过组合学论证，证明恒等式(5-16)(提示:考虑重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 的 t 种不同类型物体的多重集的排列。按照物体在最初位置上的类型来划分这些排列)。

44. 通过对 n 用归纳法证明，对 n 是正整数，

$$\frac{1}{(1-z)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k \qquad |z|<1$$

假设

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \qquad |z|<1$$

成立。

45. 用牛顿二项式定理近似计算$\sqrt{30}$。

46. 用牛顿二项式定理近似计算 $10^{1/3}$。

47. 用定理 5.7.1 证明，如果 m 和 n 是正整数，那么 $mn+1$ 个元素的偏序集有一个大小为 $m+1$ 的链或大小为 $n+1$ 的反链。

48. 用上题结果证明，一个 $mn+1$ 个实数的序列或者含有 $m+1$ 个数的递增子序列，或者含有 $n+1$ 个数的递减子序列（见 2.2 节的应用 9)。

49. 考虑由“可被…整除”确定偏序的前 12 个正整数的集合 $X=\{1, 2, \cdots, 12\}$ 上的偏序集 $(X, |)$。

  ⅰ）确定最大大小的链和将 X 分成最小数目的反链的划分。

  ⅱ）确定最大大小的反链和将 X 分成最小数目的链的划分。

50. 令 R 和 S 是同一集合 X 上的两个偏序。考虑 R 和 S 作为 $X\times X$ 的子集，我们假设 $R\subseteq S$ 但 $R\neq S$。证明存在一个序偶 (p, q)，其中 $(p, q)\in S$ 但 $(p, q)\notin R$，使得 $R'=R\cup\{(p, q)\}$ 也是集合 X 上的偏序。通过例子证明，不是每一个这样的 (p, q) 都有性质：R'是 X 上的偏序。

第 6 章　容斥原理及应用

在这一章，将得出并应用一个重要的计数公式，叫做容斥原理。回忆加法原理在集合间不相重叠的情况下，即在这些集合确定一个划分的情况下，给出了这些集合的并的成员的简单计数公式。容斥原理则给出最一般情形下的一个公式，此时集合间可以重叠而没有限制。这个公式应该更复杂，但是应用也更广泛。

6.1　容斥原理

在第 3 章，我们已经见到过几个例子，在那里对集合中成员的间接计数要比对这些成员的直接计数容易。下面又是两个例子。

例　对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 计数，其中 1 不在第一个位置（即 $i_1 \neq 1$）。

通过观察 1 不在第一个位置上，排列能够被分成 $n-1$ 部分进行直接计数，其中每一部分的排列的第一个位置上的整数 k 分别来自 $\{2, 3, \cdots, n\}$。k 在第一个位置上的排列由 k 后跟 $(n-1)$ - 元素集 $\{1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\}$ 的排列组成。因此，k 在第一个位置上的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列有 $(n-1)!$ 个。根据加法原理，1 不在第一个位置上的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列有 $(n-1)!(n-1)$ 个。

也可以通过 1 在第一个位置上排列的个数与 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 的排列个数 $(n-1)!$ 相同来进行间接计数。由于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列的总数是 $n!$，因此，1 不在第一个位置上的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列总数为 $n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$。 □

例　计算 1 到 600 中不能被 6 整除的整数个数。

也可以间接计数如下。由于每连续 6 个的第 6 号的整数都能被 6 整除，故 1 到 600 中能被 6 整除的整数个数为 $600/6=100$。因此，1 到 600 中有 $600-100=500$ 个整数不能被 6 整除。 □

在这些例子中用来得出直接计数的法则如下。如果 A 是集合 S 的子集，那么 A 中元素的个数等于 S 的元素个数减去不在 A 中的元素个数。令

$$\overline{A} = S - A = \{x: x \text{ 在 } S \text{ 中，但 } x \text{ 不在 } A \text{ 中}\}$$

为 A 在 S 中的补，即由 S 的所有不在 A 中的元素组成的集合。该法则可以写成

$$|A| = |S| - |\overline{A}| \text{ 或等价地 } |\overline{A}| = |S| - |A|$$

这个公式是容斥原理的最简单的例子。

我们将以便于使用的方式得出容斥原理的公式。作为上述法则的第一个推广，令 S 是物体的有限集，并令 P_1 和 P_2 是 S 的每个物体可能具有或不具有的两个“性质”。我们希望算出 S 中既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的物体的个数。通过下述过程完成这个计数：首先数出 S 的所有物体，然后排除所有具有性质 P_1 的物体，再排除具有性质 P_2 的物体，注意，同时具有性质 P_1 和 P_2 的物体我们排除了两次，故须再将它们数回一次。我们以符

号的形式记述如下。令 A_1 是 S 中具有性质 P_1 的物体组成的子集，A_2 是 S 中具有性质 P_2 的物体组成的子集。此时，$\overline{A}_1$ 则由 S 中不具有性质 P_1 的物体组成，而 $\overline{A}_2$ 由 S 中不具有性质 P_2 的物体组成。集合 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ 的成员为那些既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的物体。这时我们有

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

由于上式左边为那些既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的物体的个数，因此可以通过证明性质 P_1 和 P_2 都不具有的一个物体给等式右边净增 1 而每一个其他物体给等式右边净增 0 来建立上述等式合理性。如果 x 是性质 P_1 和 P_2 都不具有的一个物体，那么它算作 S 的一个物体，不算是 A_1 的物体也不算是 A_2 的物体，并且它还不算是 $A_1 \cap A_2$ 的物体。因此，它对等式右边的净增为

$$1-0-0+0=1$$

如果 x 只有性质 P_1，那么它对右边净增

$$1-1-0+0=0$$

而若它只有性质 P_2，则它对右边净增

$$1-0-1+0=0$$

最后，如果 x 同时具有性质 P_1 和 P_2，那么它对等式右边净增

$$1-1-1+1=0$$

这样，等式右边计算的也是 S 的那些既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的物体的个数。

更一般地，令 P_1，P_2，…，P_m 是 S 的物体所涉及到的 m 个性质，并令

$$A_i = \{x: x \text{ 在 } S \text{ 内且 } x \text{ 具有性质 } P_i\}, \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

是 S 的具有性质 P_i（也可能还具有其他一些性质）的物体构成的子集。此时，$A_i \cap A_j$ 是同时具有性质 P_i 和 P_j（可能还具有其他一些性质）的物体构成的子集，$A_i \cap A_j \cap A_k$ 是同时具有性质 P_i，P_j 和 P_k 的物体构成的子集等等。哪个性质都不具有的物体形成的子集则是 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$。容斥原理指出如何通过对确实具有这些性质的物体的计数来计算上述集合的物体的个数。因此，在这种意义下，容斥原理“颠倒”了计数过程。

定理 6.1.1 集 S 的不具有性质 P_1，P_2，…，P_m 的物体的个数由下式给出：

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \tag{6-1}$$

其中，第一个和对 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的所有 1-组合 $\{i\}$ 进行，第二个和对 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的所有 2-组合 $\{i, j\}$ 进行，第三个和对 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的所有 3-组合 $\{i, j, k\}$ 进行等等。

如果 $m=3$，式（6-1）变为

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap$$

$A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

注意，上式右边有 1+3+3+1=8 项。如果 $m=4$，式（6-1）变为

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4| = |S| - (&|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\
&+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| \\
&+ |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$

在这种情况下，右边共有 1+4+6+4+1=16 项。在一般情形下，等式（6-1）右边的项数为

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m$$

定理 6.1.1 的证明：等式（6-1）左边是对 S 的这些性质都不具有的物体的计数。通过证明性质 P_1，P_2，…，P_m 都不具有的一个物体使右边净增 1，至少具有一个性质的物体使右边净增 0 来建立公式的合理性。首先，考虑物体 x 这些性质都不具有。它对等式（6-1）右边的净增为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^m 0 = 1$$

因为它在 S 中但不在其他的集合中。考虑恰有 $n \geqslant 1$ 个性质的物体 y。y 对 $|S|$ 所占份额为 $1 = \binom{n}{0}$。由于 y 恰有 n 个性质，因此，它为 A_1，A_2，…，A_m 中恰好 n 个的成员，它对 $\sum |A_i|$ 提供的值为 $n = \binom{n}{1}$。由于我们可以以 $\binom{n}{2}$ 种方式选择 y 具有一对性质，而 y 恰好是形式为 $A_i \cap A_j$ 那些集合中的 $\binom{n}{2}$ 个的成员，因此，y 给 $\sum |A_i \cap A_j|$ 提供的份额是 $\binom{n}{2}$。同理，y 对 $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ 提供的份额是 $\binom{n}{3}$ 等等。于是，y 对式（6-1）右边的净增为

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^m \binom{n}{m}$$

它等于

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

因为 $n \leqslant m$，若 $k > n$，则 $\binom{n}{k} = 0$。根据恒等式（5-4）最后的表达式等于 0，因此，如果 y 至少具有一个性质，那么它对式（6-1）右边的净增就是 0，定理得证。 □

定理 6.1.1 意味着求集合的并中物体的个数公式，这些集合可以任意重叠。

推论 6.1.2　至少具有性质 P_1，P_2，…，P_m 之一的集合 S 的物体的个数由

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = &\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\
&+ (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \qquad (6\text{-}2)
\end{aligned}
$$

给出，其中求和的含义如定理6.1.1中所指定。

证明：集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ 由 S 中至少具有一个性质的那些物体组成。此外，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |S| - \overline{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|}$$

因为容易验证

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$$

我们有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |S| - |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m|$$

结合式（6-1），我们得到等式（6-2）。 □

例　求从1到1 000不能被5，6和8整除的整数个数。

为解决这个问题我们引入一个概念。对于实数 r，$\lfloor r \rfloor$ 代表不超过 r 的最大整数。此外，我们将两个整数 a，b 或三个整数 a，b，c 的最小公倍数相应地缩记为 lcm $\{a, b\}$ 或 lcm $\{a, b, c\}$。令 P_1 具有能被5整除的性质，P_2 具有能被6整除的性质，P_3 具有能被8整除的性质。令 S 是由前1 000个正整数组成的集合。对于 $i=1, 2, 3$，令 A_i 是 S 中那些具有性质 P_i 的整数组成的集合。我们希望求出 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ 中的整数的个数。

首先

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1\,000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{1\,000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{1\,000}{8} \right\rfloor = 125$$

集合 $A_1 \cap A_2$ 中的整数可同时被5和6整除。但一个整数被5和6整除当且仅当它能被 lcm $\{5, 6\}$ 整除。由于 lcm $\{5, 6\} = 30$，lcm $\{5, 8\} = 40$，lcm $\{6, 8\} = 24$，因此

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1\,000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1\,000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1\,000}{24} \right\rfloor = 41$$

因为 lcm $\{5, 6, 8\} = 120$，所以

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1\,000}{120} \right\rfloor = 8$$

这样，由容斥原理可知，从1到1 000不能被5，6和8整除的整数个数等于

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 1000 - (200+166+125) + (33+25+41) - 8 = 600$$ □

例　字母

$$M, A, T, H, I, S, F, U, N$$

存在多少排列使得单词 MATH，IS 和 FUN 都不作为连续字母出现？（例如，排列 MATHISFUN 是不许可的，排列 INUMATHSF 和 ISMATHFUN 也都不允许。）

应用容斥原理（6-1）。首先，把集合 S 当作所给 9 个字母的所有排列的集合。然后，令 P_1 具有 S 排列中包含单词 MATH 作为连续字符的性质，P_2 具有包含单词 IS 作为连续字符的性质，P_3 具有包含单词 FUN 作为连续字符的性质。对于 $i=1, 2, 3$，令 A_i 为 S 中满足性质 P_i 那些排列的集合。我们希望求出 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ 中的排列个数。

$|S| = 9! = 362\ 880$。A_1 中的排列可以看成六个字母

$$MATH, I, S, F, U, N$$

的排列，因此

$$|A_1| = 6! = 720$$

类似地，A_2 中的排列是 8 个字母

$$M, A, T, H, IS, F, U, N$$

的排列，因此

$$|A_2| = 8! = 40\ 320$$

而 A_3 中的排列是 7 个字母

$$M, A, T, H, I, S, FUN$$

的排列，因此

$$|A_3| = 7! = 5\ 040$$

$A_1 \cap A_2$ 中的排列是 5 个字母

$$MATH, IS, F, U, N$$

的排列，$A_1 \cap A_3$ 中的排列是 4 个字母

$$MATH, I, S, FUN$$

的排列，且 $A_2 \cap A_3$ 中的排列是 6 个字母

$$M, A, T, H, IS, FUN$$

的排列，因此

$$|A_1 \cap A_2| = 5! = 120, \quad |A_1 \cap A_3| = 4! = 24, \quad |A_2 \cap A_3| = 6! = 720。$$

最后，$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 由 3 个符号 $MATH$，IS，FUN 的排列组成，于是

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$$

代入到（6-1）中，得到

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=362\ 880-720-40\ 320-5\ 040+120+24+720-6=317\ 658$$ □

在其后各节将考虑容斥原理对某些更一般问题的应用。容斥原理的下列特殊情况将是有用的。

在容斥原理中，设出现的集合 $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ 的大小仅依赖于 k 而不依赖于在交中使用了哪 k 个集合。这样就存在常数 α_0，α_1，α_2，…，α_m 使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_0=|S|\\
&\alpha_1=|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_m|\\
&\alpha_2=|A_1\cap A_2|=\cdots=|A_{m-1}\cap A_m|\\
&\alpha_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=\cdots=|A_{m-2}\cap A_{m-1}\cap A_m|\\
&\vdots\\
&\alpha_m=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}$$

在这种情况下容斥原理可以简化成

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|=\alpha_0-\binom{m}{1}\alpha_1+\binom{m}{2}\alpha_2-\binom{m}{3}\alpha_3+\cdots+(-1)^k\binom{m}{k}\alpha_k+\cdots+(-1)^m\alpha_m \tag{6-3}$$

这是因为在容斥原理中出现的第 k 个求和包含 $\binom{m}{k}$ 个被加数，且每个都等于 α_k。

例　从 0 到 99 999 有多少含有数字 2，5 和 8 的整数?

令 S 是从 0 到 99 999 的整数集合。S 中的每个整数都有 5 个数字，包括可能的一些前导 0（这样，我们就把 S 中的整数看成是多重集的 5-排列，而在这个多重集中，每个数字 0，1，2，…，9 都有重数 5 或更大）。令 P_1 具有整数不包含数字 2 的性质，P_2 具有整数不包含数字 5 的性质，P_3 具有整数不包含数字 8 的性质。对于 $i=1$，2，3，令 A_i 为 S 中具有性质 P_i 的整数集合。我们希望计算出 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ 中整数的个数。

利用前一段的记号，有

$$\begin{aligned}
\alpha_0&=10^5\\
\alpha_1&=9^5\\
\alpha_2&=8^5\\
\alpha_3&=7^5
\end{aligned}$$

例如，从 0～99 999 不含数字 2 并且不含数字 5 的整数个数，即集合 $|A_1\cap A_2|$ 的大小，等于多重集

$$\{5\cdot0,\ 5\cdot1,\ 5\cdot3,\ 5\cdot4,\ 5\cdot6,\ 5\cdot7,\ 5\cdot8,\ 5\cdot9\}$$

的 5-排列的个数，而它等于 8^5。由式（6-2）可知本题答案为

$$10^5 - 3\times 9^5 + 3\times 8^5 - 7^5$$ □

6.2 具有重复的组合

在 3.3 节和 3.5 节我们已经证明 n 个不同元素的集合的 r-组合的数目为

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

并已证明具有 k 种不同物体且每种都有无限重数的多重集的 r-组合个数等于

$$\binom{r+k-1}{r}$$

本节我们证明后面与容斥原理相联系的公式如何给出一种方法来求出对于其重数没有任何限制的多重集的 r-组合的个数。

设 T 是一个多重集，并设 T 的某种类型的物体 x 具有大于 r 的重数。此时，T 的 r-组合的滚数等于通过用 r 代替 x 的重数从 T 得到的多重集的 r-组合的个数。之所以如此是因为能够用在 T 的 r-组合中的 x 的次数不会超过 r。因此，大于 r 的任何重数都可以用 r 来代替。例如，多重集 $\{3\cdot a,\ \infty\cdot b,\ 6\cdot c,\ 10\cdot d,\ \infty\cdot e\}$ 的 8-组合的个数与多重集 $\{3\cdot a,\ 8\cdot b, 6\cdot c,\ 8\cdot d,\ 8\cdot e\}$ 的 8-组合的个数相同。可以总结为：我们已经把多重集 $T=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ \cdots,\ n_k\cdot a_k\}$ 的 r-组合的个数确定为两个“极端”的情况：

ⅰ）$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$ 即 T 是一个集合；

ⅱ）$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = r$。

我们将解释容斥原理如何能够用来得到其余情况的解。虽然举的是一个特殊的例，但是很清楚，该方法对于一般的情形仍然有效。

例　确定多重集 $T=\{3\cdot a,\ 4\cdot b,\ 5\cdot c\}$ 的 10-组合的个数。

我们将把容斥原理应用到多重集 $T^*=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$ 的所有 10-组合的集 S 上。令 P_1 为 T^* 的 10-组合具有多于 3 个 a 的性质。P_2 为 T^* 的 10-组合具有多于 4 个 b 的性质，P_3 为 T^* 的 10-组合具有多于 5 个 c 的性质。此时，T 的 10-组合的个数就是 T^* 的不具有性质 P_1，P_2，P_3 的 10-组合的个数。同样，令 A_i 由 T^* 的具有性质 P_i（$i=1,\ 2,\ 3$）的那些 10-组合构成。我们希望确定集合 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ 的大小。由容斥原理

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3| = |S| - &(|A_1|+|A_2|+|A_3|)\\ + &(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)\\ - &|A_1\cap A_2\cap A_3|\end{aligned}$$

根据定理 3.5.1

$$|S| = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

集合 A_1 由 a 至少出现 4 次的 T^* 的所有 10-组合组成。如果拿出 A_1 中的任一个这样的10-组合并去掉 4 个 a，那么剩下的就是 T^* 的一个 6-组合。反之，如果拿出 T^* 的一个6-组合

并往其中加入 4 个 a，就得到 T^* 的一个 10-组合，而在这个 10-组合中 a 至少出现 4 次。这样，A_1 中的 10-组合的个数等于 T^* 的 6-组合的个数。因此

$$|A_1|=\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=28$$

类似地，A_2 中的 10-组合的个数等于 T^* 的 5-组合的个数，而 A_3 中的 10-组合的个数等于 T^* 的 4-组合的个数。因此

$$|A_2|=\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=21$$

$$|A_3|=\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=15$$

集合 $A_1\cap A_2$ 由 a 至少出现 4 次且 b 至少出现 5 次的 T^* 的所有 10-组合组成。如果从这些 10-组合中去掉 4 个 a 和 5 个 b，则剩下 T^* 的 1-组合。反之，如果往 T^* 的 1-组合中添加 4 个 a 和 5 个 b，就得到一个 10-组合，在该组合中，a 至少出现 4 次且 b 至少出现 5 次。这样，在 $A_1\cap A_2$ 中的 10-组合的个数等于 T^* 的 1-组合的个数，且有

$$|A_1\cap A_2|=\binom{1+3-1}{1}=\binom{3}{1}=3$$

可以类似的方式推导出 $A_1\cap A_3$ 中的 10-组合的个数等于 T^* 的 0-组合的个数，而且，在 $A_2\cap A_3$ 中没有 10-组合。于是

$$|A_1\cap A_3|=\binom{0+3-1}{0}=\binom{2}{0}=1$$

及

$$|A_2\cap A_3|=0$$

还有

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

将所有这些结果放到容斥原理中，得到

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=66-(28+21+15)+(3+1+0)-0=6$$

你能够列出这六个 10-组合吗？ □

在定理 3.5.1 的证明中，我们已经指出了在 r-组合与方程的整数解之间的联系。多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$ 的 r-组合的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

的整数解的个数，这些解满足

$$0\leqslant x_i\leqslant n_i \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

因此这些解的个数可以用刚刚解释的方法来计算。

例　满足

$$1\leqslant x_1\leqslant 5,\quad -2\leqslant x_2\leqslant 4,\quad 0\leqslant x_3\leqslant 5,\quad 3\leqslant x_4\leqslant 9$$

的方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=18$$

的整数解的个数是多少?

我们引入一些新变量

$$y_1=x_1-1,\quad y_2=x_2+2,\quad y_3=x_3,\quad y_4=x_4-3$$

这使我们的方程变为

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16 \tag{6-4}$$

关于 x_i 的不等式成立当且仅当

$$0\leqslant y_1\leqslant 4,\quad 0\leqslant y_2\leqslant 6,\quad 0\leqslant y_3\leqslant 5,\quad 0\leqslant y_4\leqslant 6$$

令 S 是方程（6-4）的所有非负整数解的集合。S 的大小为

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

令 P_1 为性质 $y_1\geqslant 5$，P_2 为性质 $y_2\geqslant 7$，P_3 为性质 $y_3\geqslant 6$，P_4 为性质 $y_4\geqslant 7$。令 A_i 表示 S 的满足性质 P_i（$i=1,2,3,4$）的解组成的子集。要想计算集合 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4$ 的大小，由容斥原理，集合 A_1 由 S 的所有满足 $y_1\geqslant 5$ 的解组成。作一个变量代换（$z_1=y_1-5$，$z_2=y_2$，$z_3=y_3$，$z_4=y_4$），我们看到，A_1 的解的个数与

$$z_1+z_2+z_3+z_4=11$$

的非负整数解的个数相同。因此

$$|A_1|=\binom{14}{11}=364$$

以类似的方式得到

$$|A_2|=\binom{12}{9}=220\qquad |A_3|=\binom{13}{10}=286\qquad |A_4|=\binom{12}{9}=220$$

集合 $A_1\cap A_2$ 由 S 的所有 $y_1\geqslant 5$ 和 $y_2\geqslant 7$ 的那些解组成。进行变量代换（$u_1=y_1-5$，$u_2=y_2-7$，$u_3=y_3$，$u_4=y_4$），我们看出，$A_1\cap A_2$ 的解的个数与

$$u_1+u_2+u_3+u_4=4$$

的非负整数解的个数相同。因此

$$|A_1\cap A_2|=\binom{7}{4}=35$$

以类似的方式得到

$$|A_1\cap A_3|=\binom{8}{5}=56\quad |A_1\cap A_4|=\binom{7}{4}=35$$

$$|A_2\cap A_3|=\binom{6}{3}=20\quad |A_2\cap A_4|=\binom{5}{2}=10$$

$$|A_3\cap A_4|=\binom{6}{3}=20$$

集合 A_1，A_2，A_3，A_4 中任意三个的交都是空集。应用容斥原理得到

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4| &= 969-(364+220+286+220)\\ &\quad +(35+56+35+20+10+20)\\ &=55\end{aligned}$$

□

6.3 错位排列(帽)

在一个聚会上，10 位绅士查看他们的帽子。有多少种方式使得这些绅士中没有人能够拿到他们来时所戴的帽子？$V-8$ 发动机的 8 个火花塞从汽缸中被取出清洗。有多少种方式能够将它们放回到汽缸中去使得没有火花塞重新被放回到原先被取出时的汽缸？有多少种方法能够将字母 M，A，D，I，S，O，N 写出，使得所拼的“单词”与单词 MADISON 的拼写在下述意义上完全不同：没有字母占据与它在单词 MADISON 中占据的位置相同？这些问题中的每一个都是下面一般问题的一个具体实例。

给定 n-元素集 X，它的每一个元素都有一个特定的位置，而现在要求出集合 X 的没有元素在指定位置上的排列数。在第一个问题中，集合 X 是 10 顶帽子的集合，而一顶帽子的指定位置就是它所归属的绅士（的头）。在第二个问题中，X 是火花塞的集合，而火花塞的位置就是容纳它的汽缸。在第三个问题中，$X=\{M,A,D,I,S,O,N\}$，而字母的位置就是由单词 MADISON 所指定的位置。

由于物体的实际性质与讨论不相干，我们可以取 X 为集合$\{1,2,\cdots,n\}$，其中每个整数的位置都由它们在序列 1，2，⋯，n 中的位置确定。$\{1,2,\cdots,n\}$的一个错位排列是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$i_1i_2\cdots i_n$，使得 $i_1\neq1,i_2\neq2,\cdots,i_n\neq n$。因此，$\{1,2,\cdots,n\}$的一个错位排列是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，在这个排列中没有整数是在自然的位置上：

$$i_1\neq1\quad i_2\neq2\cdots i_n\neq n$$

用 D_n 表示 $\{1，2，\cdots，n\}$ 的错位排列的个数。上述几个问题就是要我们相应地求出 D_{10}，D_8 和 D_7 的值。对于 $n=1$，没有错位排列。对于 $n=2$，唯一的错位排列是 2 1。对于 $n=3$ 有两个错位排列，即 2 3 1 和 3 1 2。而 $n=4$ 时的错位排列则可列出如下：

2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 2 3
2 3 4 1	3 4 1 2	4 3 1 2
2 4 1 3	3 4 2 1	4 3 2 1

因此，我们有 $D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$。

定理 6.3.1 对于 $n\geqslant 1$,

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

证明：令 S 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全部 $n!$ 个排列的集合。对 $j=1, 2, \cdots, n$，令 P_j 为排列中 j 在它的自然位置上的性质。假如 $i_j=j$，则 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 就具有性质 P_j。$\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列是一个错位排列当且仅当它不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中的每一个。令 A_j 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的具有性质 P_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 的排列的集合。$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错位排列正是 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$ 中的那些排列。因此

$$D_n=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$$

而我们将使用容斥原理给 D_n 赋值。A_1 中的排列是 $1i_2\cdots i_n$ 形式的排列，其中 $i_2\cdots i_n$ 是 $\{2, \cdots, n\}$ 的一个排列。于是，$|A_1|=(n-1)!$，更一般地，对 $j=1, 2, \cdots, n$，有 $|A_j|=(n-1)!$。在 $A_1\cap A_2$ 中的排列是 $1\ 2i_3\cdots i_n$ 形式的排列，其中 $i_3\cdots i_n$ 是 $\{3, \cdots, n\}$ 的一个排列。于是，$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$，更一般地，对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意 2-组合 $\{i, j\}$，有 $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$。对于满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 的任一整数 k，集合 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$ 中的排列是形式为 $1\ 2\cdots ki_{k+1}\cdots i_n$ 的排列，其中，$i_{k+1}\cdots i_n$ 是 $\{k+1,\cdots,n\}$ 的一个排列。于是，$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|=(n-k)!$；更一般地，对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意 k-组合 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

由于存在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $\binom{n}{k}$ 个 k-组合，应用容斥原理（见 6.1 节末尾的 (6-3) 式）得到

$$\begin{aligned}D_n&=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}0!\\&=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}\\&=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\end{aligned}$$

由此，定理得证。 □

使用所得到的公式计算

$$D_5=5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=44$$

可以用类似的方法算得

$$D_6=265\quad D_7=1\ 854\quad D_8=14\ 833$$

回忆 e^{-1} 的级数展开式

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$$

可以写成

$$e^{-1}=\frac{D_n}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$

从无穷交错级数的基本事实断定，e^{-1}和$\frac{D_n}{n!}$相差小于$1/(n+1)!$；事实上，D_n 是最接近 $n!/e$ 的整数。计算表明，$n\geqslant 7$ 时 e^{-1}和$\frac{D_n}{n!}$至少三位小数全同。这样，从实际的观点来看，$n\geqslant 7$ 时，e^{-1}和 $D_n/n!$ 是一样的。$D_n/n!$ 是$\{1,2,\cdots,n\}$的错位排列数与$\{1,2,\cdots,n\}$的排列数的比。因此，如果随机地选择$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列，那么这个排列是错位排列的概率就是$D_n/n!$。用本节开始提出的帽子问题的话来说，如果随机地将帽子还给这些绅士，那么没有绅士收到他自己帽子的概率为$D_{10}/10!$，从效果上看，这就是 e^{-1}。由上面的评注可知，假如绅士的人数是 1 000 000 的话，那么没有绅士收到他自已的帽子的概率也还是这个数 e^{-1}。

错位排列个数 D_n 满足其他一些便于其求值的关系。我们讨论的第一个关系是

$$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}),\ (n=3,4,5,\cdots) \tag{6-5}$$

这个公式是线性递推关系的一个例子[⊖]。由初始信息 $D_1=0$，$D_2=1$ 出发，我们可以使用式（6-5）计算对于任意正整数 n 的D_n。例如，

$$\begin{aligned}D_3&=2(D_1+D_2)=2(0+1)=2\\D_4&=3(D_2+D_3)=3(1+2)=9\\D_5&=4(D_3+D_4)=4(2+9)=44\\D_6&=5(D_4+D_5)=5(9+44)=265\end{aligned}$$

在下一章，我们将论证如何求解常系数线性递推关系。但由于公式（6-5）有一个变系数 $n-1$，因此这里将不使用那里引入的方法。

可以用组合学的方法验证公式（6-5）如下。令 $n\geqslant 3$，并考虑$\{1,2,\cdots,n\}$的 D_n 个错位排列。这些错位排列按照 2，3，…，n 哪个在排列的第一个位置而被划分成$n-1$ 部分。应该清楚，每一部分都包含有相同个数的错位排列。这样，D_n 等于（$n-1$）d_n，其中 d_n 是 2 位于错位排列第一个位置上的个数。这些错位排列的形式为

$$2i_2i_3\cdots i_n\qquad i_2\neq 2\quad i_3\neq 3,\ \cdots,\ i_n\neq n$$

这些 d_n 个错位排列按照 $i_2=1$ 还是 $i_2\neq 1$ 又被进一步划分成两个子排列。令 d'_n是形式为

$$21i_3i_4\cdots i_n\qquad i_3\neq 3,\ \cdots,\ i_n\neq n$$

的错位排列的个数。令 d''_n是形式为

$$2i_2i_3\cdots i_n\quad i_2\neq 1,\ i_3\neq 3,\ \cdots,\ i_n\neq n$$

的错位排列的个数。于是 $d_n=d'_n+d''_n$，因此

$$D_n=(n-1)d_n=(n-1)(d'_n+d''_n)$$

⊖ 递推关系在第 7 章讨论。

首先观察到 d'_n 与 $\{3, 4, \cdots, n\}$ 的排列 $i_3i_4\cdots i_n$ 的个数相同，其中 $i_3\neq 3$，$i_4\neq 4$，$\cdots$，$i_n\neq n$。换句话说，d'_n是 $\{3, 4, \cdots, n\}$ 的 3 不在第一个位置上、4 不在第二个位置上等等的排列的个数。于是，$d'_n = D_{n-2}$。接下来再观察，d''_n等于 $\{1, 3, \cdots, n\}$ 的 1 不在第一个位置上、3 不在第二个位置上，$\cdots$，n 不在第 $(n-1)$ 位置上的排列 $i_2i_3\cdots i_n$ 的个数。于是，$d''_n = D_{n-1}$。由此我们断定

$$D_n = (n-1)(d'_n + d''_n) = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

这就是式（6-5）。

可以把式（6-5）重新写成

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \qquad (n\geqslant 3) \qquad (6\text{-}6)$$

等号右边方括号内的表达式与左边用 $n-1$ 代替 n 的表达式相同。因此，可以递归地[⊖]应用式（6-6）得到：

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \\ &= (-1)^2[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] \\ &= (-1)^3[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}] \\ &\vdots \\ &= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) \end{aligned}$$

由于 $D_2 = 1$ 和 $D_1 = 0$，就得到了错位排列个数的更简单的递归关系：

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^{n-2}$$

或等价地

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad n = 2,3,4,\cdots \qquad (6\text{-}7)$$

（严格说来，我们的验证只对 $n = 3, 4, \cdots$进行，验证式（6-7）当 $n = 2$ 时也成立是很容易的）。使用式（6-7）和前面算出的值 $D_6 = 265$，得出

$$D_7 = 7D_6 + (-1)^7 = 7\times 265 - 1 = 1\,854$$

通过重复使用式（6-7）或使用该公式及数学归纳法，可以得到定理 6.3.1 的不同的证明（见练习题 20）。由于式（6-7）由式（6-5）推出，用的是独立的组合学证明，这就提供了定理 6.3.1 的不用容斥原理的一个证明。

式（6-5）和式（6-7）类似于对阶乘成立的公式

$$n! = (n-1)((n-2)! + (n-1)!) \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad (6\text{-}8)$$

$$n! = n(n-1)! \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad (6\text{-}9)$$

例　在一次聚会上有 n 位男士和 n 位女士。这 n 位女士能够有多少种方法选择男舞伴开始第一次跳舞？如果每个人必须换舞伴，那么第二次跳舞又有多少种选择方法？

对于第一次跳舞存在 $n!$ 中可能的选择。对于第二次跳舞，每位女士必须选择一位男士

⊖ 就是说，n 的值反复不断地越来越小。

作舞伴，而这位男士还不能是她第一次跳舞时的舞伴。因此，可能的选择方法数为第 n 个错位排列数 D_n。 □

例 设上述聚会中的 n 男 n 女在跳舞前核对他/她们的帽子。在聚会结束时随机地返还给他/她们这些帽子。如果每位男士得到一顶男帽而每位女士得到一顶女帽，但又都不是他/她们自己曾经核对过的那顶帽子，那么他/她们被返还帽子的方法有多少种？

要是没有限制，这些帽子返还的方法有 $(2n)!$ 种。如果加上每位男士得到一顶男帽而每位女士得到一顶女帽的限制，那么就有 $n!\times n!$ 种方法。如果再加上没有人得到他/她自己的帽子的限制，则有 $D_n\times D_n$ 种方法。

6.4 带有禁止位置的排列

在这一节，我们考虑计算 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一般带有限制的排列计数问题，这些限制规定在排列的每个位置上都能够由哪些整数占据。

令

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集（可能是空集）。用

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的集合，使得

$$\begin{gathered} i_1 \text{不在} X_1 \text{内} \\ i_2 \text{不在} X_2 \text{内} \\ \vdots \\ i_n \text{不在} X_n \text{内} \end{gathered}$$

如果 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列使得 X_1 的元素不占据该排列的第一个位置（这样一来，能够位于第一个位置上的元素是那些在 X_1 的补 $\overline{X}_1$ 中的元素），X_2 的元素不占据它的第二个位置，…，X_n 的元素不占据它的第 n 个位置，则该排列属于集 $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，在 $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中的排列的个数用

$$p(X_1, X_2, \cdots, X_n)=|P(X_1, X_2, \cdots, X_n)|$$

表示。

例 令 $n=4$，$X_1=\{1, 2\}$，$X_2=\{2, 3\}$，$X_3=\{3, 4\}$，$X_4=\{1, 4\}$。此时 $P(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 由 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的所有满足

$$i_1\neq 1, 2;\ i_2\neq 2, 3;\ i_3\neq 3, 4;\ i_4\neq 1, 4$$

的排列 $i_1i_2i_3i_4$ 组成。集合 $P(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 只包含两个排列

3 4 1 2 和 4 1 2 3

因此，$p(X_1, X_2, X_3, X_4)=2$。 □

例 令 $X_1=\{1\}$，$X_2=\{2\}$，…，$X_n=\{n\}$。则集合 $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 等于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的满足 $i_1\neq 1$，$i_2\neq 2$，…，$i_n\neq n$ 的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的集合。因此，我们

断定，$P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错位排列的集合，从而有 $p(X_1, X_2, \cdots, X_n) = D_n$。 □

正如在 3.4 节中所看到的，在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列和 n 行 n 列棋盘上非攻击型不可区分的车的位置之间存在一一对应。$\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 以坐标为 $(1, i_1)$，$(2, i_2)$，$\cdots$，(n, i_n) 对应棋盘上 n 个车的位置。（回忆坐标为 (k, l) 的方格占据棋盘上第 k 行第 l 列的位置。）在 $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 内的排列对应着 n 行 n 列棋盘上的 n 个非攻击型车的摆放，但是在这个棋盘上有某些方格禁止放车。

例　令 $n=5, X_1=\{1,4\}, X_2=\{3\}, X_3=\varnothing, X_4=\{1,5\}, X_5=\{2,5\}$。则 $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ 中的排列一一对应具有如图所示禁止位置的棋盘上 5 个非攻击型车的位置。

	1	2	3	4	5
1	×			×	
2			×		
3					
4	×				×
5		×			×

□

推广 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错位排列数 D_n 的公式的推导，应用容斥原理得到 $p(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的计算公式。然而，正如我们后面将要指出的，这个公式不总是具有计算的价值。为了方便起见，我们的论证将用 n 行 n 列棋盘上非攻击型车的语言来叙述。

令 S 为 n 行 n 列棋盘上的 n 个非攻击型车的所有 $n!$ 种放置方法的集合。如果在第 j 行上的车是在属于 X_j 的列上，那么我们就说 n 个非攻击型车的这样一种放置满足性质 P_j $(j=1, 2, \cdots, n)$。像通常那样，A_j 表示满足性质 P_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的车的放置的集合。集合 $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 由 n 个车的所有不满足性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的放置方法组成。因此

$$\begin{aligned} p(X_1, X_2, \cdots, X_n) &= |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\ &= n! - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \cdots + (-1)^k \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{6-10}$$

其中，第 k 个和是对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有 k-组合求和。现在我们计算上述公式中的 n 个和的值。例如，$|A_1|$ 的计数是多少？它是把 n 个非攻击型车放到棋盘上的方法数的计数，其中第一行上的车位于 X_1 的一个列中。我们能够以 $|X_1|$ 种方式选择该车的列，然后以 $(n-1)!$ 种方法安置其余 $n-1$ 个非攻击型车。于是 $|A_1| = |X_1|(n-1)!$，而且，更一般地有

$$|A_i| = |X_i|(n-1)! \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因此

$$\sum |A_i| = (|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|)(n-1)!$$

令 $r_1 = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$，得到

$$\sum|A_i| = r_1\ (n-1)!$$

数 r_1 等于棋盘上禁止放车的方格的个数。等价地，r_1 等于将棋盘上的一个车放到禁止放置的方格内的方法数。

现在考虑 $|A_1 \cap A_2|$，这个数表示的是将 n 个非攻击型车放到棋盘上的这样一种方法数，其中在第一行的车和在第二行的车都在禁止的位置上（对应地在 X_1 和 X_2 内）。在第一行和在第二行禁止位置上的两个非攻击型车的每一种放置都可以$(n-2)!$ 种方法完成。类似地，考虑对于任意的 $|A_i \cap A_j|$ 也成立，并且得到如下结果。令 r_2 等于把两个非攻击型车放到棋盘禁止位置上的方法数。则

$$\sum|A_i \cap A_j| = r_2\ (n-2)!$$

可以直接推广上述结论并给式（6-10）中的第 k 个和式赋值。我们定义 r_k 如下：

r_k 是把 k 个非攻击型车放到 n 行 n 列棋盘上的这样一种方法数，其中这 k 个车中的每个都处在禁止放置的位置上（$k=1, 2, \cdots, n$）。

于是

$$\sum|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = r_k\ (n-k)!\ (k=1, 2, \cdots, n)$$

将这个公式代入到式（6-10），得到下面的定理。

定理 6.4.1　*将 n 个非攻击型不可区分的车放到带有禁止放置位置的 n 行 n 列棋盘上的放置方法数等于*

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots + (-1)^k r_k(n-k)! + \cdots + (-1)^n r_n \qquad \square$$

例　确定将 6 个非攻击型车放到下面 6 行 6 列棋盘上的方法数，其中禁止放车的位置在图上标出。

×					
×	×				
		×	×		
		×	×		

由于 r_1 等于禁放位置数，我们有 $r_1=7$。在给 $r_2, r_3, \cdots, r_6$ 赋值前，我们注意，禁放位置的集合可以划分成两个“独立”的部分，一部分 F_1 包含三个位置，而另一部分 F_2 包含四个位置。这里的“独立”是指不同部分的方格不属于同一行或列。现在计算 r_2 的值，即将 2 个非攻击型车放置到禁止位置上的方法数。这两个车可以都在 F_1 中，或都在 F_2 中，或者一个在 F_1 中而另一个在 F_2 中。在最后一种情况下，它们自动成为非攻击型，因为 F_1 和 F_2 是独立的。用这种方法计数得到

$$r_2 = 1 + 2 + 3 \times 4 = 15$$

对于 r_3，需要 F_1 中的两个非攻击型车和 F_2 中的一个非攻击型车，或者 F_1 中的一个非攻击型车和 F_2 中的两个非攻击型车。于是

$$r_3 = 1 \times 4 + 3 \times 2 = 10$$

对于 r_4，需要 F_1 中的两个非攻击型车和 F_2 中的两个非攻击型车，于是

$$r_4 = 1 \times 2 = 2$$

显然 $r_5 = r_6 = 0$。因此，根据定理 6.4.1，将六个非攻击型车放到棋盘上，使得没有车占据禁放位置的方法数等于

$$6! - 7 \times 5! + 15 \times 4! - 10 \times 3! + 2 \times 2! = 226$$

□

在结论中我们注意，定理 6.4.1 的公式具有计算价值仅仅是当计算 r_1，r_2，…，r_n 比直接计算将 n 个非攻击型车放到禁放位置的 n 行 n 列棋盘上的方法数更容易的时候。注意，数 r_n 等于把 n 个非攻击型车放到由禁放位置和非禁放位置互换而得到的 n 行 n 列"补"盘上的方法数。如果棋盘上有很多禁止放子的方格，那么计算 r_n 的值就会比直接计算将 n 个非攻击型车放到棋盘上的方法数要困难得多。

6.5　另外的禁排位置问题

在 6.3 节和 6.4 节，我们对存在某些绝对禁止位置的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列个数进行了计算。在这一节，考虑存在某些相对禁止位置的排列的计数问题并说明容斥原理如何能够用于对这些排列的计数上。

我们引入问题如下。设一班 8 个男孩每天练走步。他们排成一排前行，除第一个男孩外每一个孩子的前面都有另一个男孩。为了让男孩不总看到他前面的同一个人，第二天交换位置，使得没有孩子的前面是第一天在他前面的那个男孩。他们能有多少种方法交换位置？

一种可能是将男孩的顺序倒过来，使得第一个孩子现在位于最后等等，不过还存在许多其他的可能。如果我们给这些孩子指定数字 1，2，…，8，第一天队列中的最后的男孩为 1，…，而第一个男孩为 8，如下

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8$$

那么要确定集合 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的不出现模式 12，23，…，78 的排列数。这样，31542876 就是一个允许的排列，而 84312657 则不是。对于每一个正整数 n，令 Q_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中没有 12，23，…，$(n-1)n$ 这些模式出现的排列的个数。用容斥原理计算 Q_n。如果 $n=1$，1 就是一个允许的排列。如果 $n=2$，21 则是允许的排列。如果 $n=3$，则允许的排列是 213，321，132，若 $n=4$，则它们是

4 1 3 2	4 3 2 1	4 2 1 3
3 2 1 4	3 2 4 1	2 1 4 3
2 4 3 1	2 4 1 3	3 1 4 2
1 3 2 4	1 4 3 2	

因此，$Q_1 = 1$，$Q_2 = 1$，$Q_3 = 3$ 及 $Q_4 = 11$。

定理 6.5.1　对于 $n \geqslant 1$

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!$$

$$-\binom{n-1}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

证明：令 S 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全部 $n!$ 个排列的集合。令 P_j 为在排列中模式 $j\ (j+1)$ 确实出现的性质（$j=1, 2, \cdots, n-1$）。于是，$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列用 Q_n 计数当且仅当它没有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$。照通常那样，令 A_j 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的性质满足 P_j 的排列的集合（$j=1, 2, \cdots, n-1$）。因此

$$Q_n=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{n-1}|$$

应用容斥原理来计算 Q_n 的值。首先我们计算 A_1 中排列的个数。一个排列在 A_1 中当且仅当模式 12 在排列中出现。于是，A_1 中的一个排列可以看成 $n-1$ 个符号 $\{12, 3, 4, \cdots, n\}$ 的排列。我们得出 $|A_1|=(n-1)!$ 一般地

$$|A_j|=(n-1)! \qquad (j=1, 2, \cdots, n-1)$$

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 中的任两个的排列含有两个模式。这两个模式或者共享一个元素如模式 12 和 23，或者没有公共元素如模式 12 和 34。包含两个模式 12 和 34 的排列可以看作 $n-2$ 个符号 $\{12, 34, 5, \cdots, n\}$ 的一个排列。于是，$|A_1\cap A_3|=(n-2)!$。包含两个模式 12 和 23 的排列含有模式 123，因而，可以看作 $n-2$ 个符号的一个排列 $\{123, 4, \cdots, n\}$。如此又有 $|A_1\cap A_2|=(n-2)!$。一般地

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$$

对于 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的每一个 2-组合 $\{i, j\}$ 成立。更一般地，包含 12, 23, $\cdots$, $(n-1)n$ 中的 k 个特定模式的排列可以看成 $n-k$ 个符号的排列，这样，对于 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中的每一个 k-组合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

由于对每一个 $k=1, 2, \cdots, n-1$，存在 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的 $\binom{n-1}{k}$ 个 k-组合，应用容斥原理便得到定理中的公式。 □

使用定理 6.5.1 中的公式计算出

$$Q_5=5!-\binom{4}{1}4!+\binom{4}{2}3!-\binom{4}{3}2!+\binom{4}{4}1!=53$$

数 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ 与错位排列数紧密相关。事实上，我们确实有 $Q_n=D_n+D_{n-1}\ (n\geqslant 2)$（见练习题 23）。因此，知道错位排列数就可以计算数 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ 既然在上一节已经看到 $D_5=44$，$D_6=265$，故而我们得到 $Q_6=D_6+D_5=265+44=309$。

6.6 莫比乌斯反演

容斥原理是莫比乌斯反演（Möbius Inversion）在有限⊖偏序集上的一个实例。为了给莫

⊖ 可以用更弱的性质代替有限的性质，叫做局部有限，即对于所有 $a\leqslant b$ 的 a 和 b，区间 $\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 是有限集。

比乌斯反演的一般性做好准备，我们首先讨论容斥原理多少有些一般化的形式。

令 n 为一正整数并考虑 n 个元素的集合 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$，以及由包含关系所定义的所有子集的偏序集（$\mathcal{P}(X_n)$，$\subseteq$）。令

$$F:\mathcal{P}(X_n)\to\Re$$

是一个定义在$\mathcal{P}(X_n)$上的实值函数。我们用 F 定义一个新的函数

$$G:\mathcal{P}(X_n)\to\Re$$

其中

$$G(K)=\sum_{L\subseteq K}F(L)\quad(K\subseteq X_n)\tag{6-11}$$

莫比乌斯反演可将式（6-11）反解并从 G 恢复 F；特别地，我们有

$$F(K)=\sum_{L\subseteq K}(-1)^{|K|-|L|}G(L)\quad(K\subseteq X_n)\tag{6-12}$$

注意，在式（6-12）中 F 从 G 得到的方式类似于在式（6-11）中 G 从 F 得到的方式；唯一的区别在于，在式（6-12）中我们在求和的每一项的前面插入了一个系数 1 或 -1，它们的插入依赖于 $|K|-|L|$ 是偶数还是奇数。

令 A_1，A_2，…，A_n 是有限集 S 的子集，对于 $K\subseteq X_n$，定义 $F(K)$ 是 S 的只属于 $i\notin K$ 的那些集合 A_i 的元素的个数。于是，对于 $s\in S$，s 由 $F(K)$ 计数当且仅当

$$s\notin A_i，对每个\ i\in K$$
$$s\in A_j，对每个\ j\notin K$$

此时

$$G(K)=\sum_{L\subseteq K}F(L)$$

对属于所有下标 j 在 K 中的集合 A_j 的元素以及可能还有其他一些集合的元素计数。因此，有

$$G(K)=|\cap_{i\notin K}A_i|$$

由式（6-12），有

$$F(K)=\sum_{L\subseteq K}(-1)^{|K|-|L|}G(L)\tag{6-13}$$

在式（6-13）中取 $K=X_n$，得到

$$F(X_n)=\sum_{L\subseteq X_n}(-1)^{n-|L|}G(L)\tag{6-14}$$

现在，$F(X_n)$ 对 S 的那些只满足 $i\notin X_n$ 的集合 A_i 的元素计数；也就是说，$F(X_n)$ 是 S 的那些不属于集合 A_1，A_2，…，A_n 的元素的个数，从而等于 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$ 中的元素的个数。代入到式（6-14），得到

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=\sum_{L\subseteq X_n}(-1)^{n-|L|}|\cap_{i\notin L}A_i|$$

或等价地，用 L 在 X_n 中的补 J 代替 L，有

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = \sum_{J \subseteq X_n} (-1)^{|J|} |\cap_{i \in J} A_i| \tag{6-15}$$

式（6-15）等价于定理 6.1.1 中给出的容斥原理的公式。

现在我们用任意有限偏序集（X，$\leqslant$）代替（$\mathcal{P}$（X_n），$\subseteq$）。为得到莫比乌斯反演公式，首先考虑一些二变量函数。

令 $\mathcal{F}$（X）为所有满足只要 $x \not\leqslant y$ 就有 f（x，y）$=0$ 的所有实值函数

$$f: X \times X \rightarrow \Re$$

的集合。于是 f（x，y）只有在 $x \leqslant y$ 时不等于 0。我们通过

$$h(x,y) = \begin{cases} \sum_{\{z: x \leqslant z \leqslant y\}} f(x,z) g(z,y), 若\ x \leqslant y \\ 0, 其他 \end{cases}$$

定义 $\mathcal{F}$（X）中两个函数 f 和 g 的卷积（convolution product）$h = f * g$。于是，在卷积中，为了计算当 $x \leqslant y$ 时的 h（x，y），我们对 z 以给定的偏序变化于 x 和 y 之间的所有的值累加全部的乘积 f（x，z）g（z，y）。卷积满足结合律

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (f, g, h \in \mathcal{F}(X))$$

我们把验证上式的工作留作练习。

我们对 $\mathcal{F}$（X）中三种特殊的函数感兴趣。第一种函数是克罗内克德尔塔函数（Kronecker delta function）δ，由下式给出

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, 若\ x = y \\ 0, 其他 \end{cases}$$

注意，对所有的函数 $f \in \mathcal{F}$（X），$\delta * f = f * \delta = f$，因此对卷积来说 δ 的行为就像是一个恒等函数。第二种函数是 ζ 函数（zeta function），由下式定义

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, 若\ x \leqslant y \\ 0, 其他 \end{cases}$$

ζ 函数是偏序集（X，$\leqslant$）的一种表示，因为它包含关于所有满足 $x \leqslant y$ 的元素对 x，y 的全部信息。

令 f 是 $\mathcal{F}(X)$ 中的一个函数，满足对 X 中的所有 y 有 $f(y$，$y)$ $\neq 0$。我们可以首先令

$$g(y,y) = \frac{1}{f(y,y)} \quad (y \in X) \tag{6-16}$$

然后令

$$g(x,y) = -\sum_{\{z: x \leqslant z < y\}} g(x,z) \frac{f(z,y)}{f(y,y)} \quad (x < y) \tag{6-17}$$

来归纳地定义 $\mathcal{F}(X)$ 中的函数 g。

从式（6-17）得到

$$\sum_{\{z:x\leqslant z\leqslant y\}} g(x,z)f(z,y) = \delta(x,y) \quad (x \leqslant y) \tag{6-18}$$

式（6-18）告诉我们

$$g * f = \delta$$

从而 g 是 f 关于卷积 $*$ 的*左逆函数*。类似地，可以证明 f 有一个*右逆函数* h，它满足

$$f * h = \delta$$

由卷积的结合律得到

$$g = g * \delta = g * (f * h) = (g * f) * h = \delta * h = h$$

因此，$g=h$，g 是 f 的逆函数。总之，每个满足对 X 中所有的 y 有 $f(y,y)\neq 0$ 的函数 $f\in\mathcal{F}(X)$ 都有一个逆函数 g，它由式（6-16）和式（6-17）递归地定义，并满足

$$g * f = f * g = \delta$$

我们定义的第三种特殊的函数是*莫比乌斯函数*（Möbius function）μ。由于对所有的 $y\in X$，$\zeta(y,y)=1$，因此 ζ 有一个逆，定义 μ 是它的逆。因此，有

$$\mu * \zeta = \delta$$

于是令 $f=\zeta$ 和 $g=\mu$，应用式（6-18）得到

$$\sum_{\{z:x\leqslant z\leqslant y\}} \mu(x,z)\zeta(z,y) = \delta(x,y) \quad (x \leqslant y)$$

或等价地

$$\sum_{\{z:x\leqslant z\leqslant y\}} \mu(x,z) = \delta(x,y) \quad (x \leqslant y) \tag{6-19}$$

式（6-19）意味着

$$\mu(x,x) = 1, \text{对所有的 } x \tag{6-20}$$

以及

$$\mu(x,y) = -\sum_{\{z:x\leqslant z< y\}} \mu(x,z) \quad (x < y) \tag{6-21}$$

例 在本例中，我们计算偏序集（$\mathcal{P}(X_n)$，$\subseteq$）的莫比乌斯函数，其中 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$。令 A 和 B 是 X_n 的子集且 $A\subseteq B$。我们对 $|B|-|A|$ 归纳证明

$$\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|} \tag{6-22}$$

由式（6-20）得到 $\mu(A,A)=1$，从而如果 $B=A$ 则式（6-22）成立。设 $B\neq A$ 并令 $p=|B\setminus A|=|B|-|A|$。此时，由式（6-21）和归纳假设，可以得到

$$\mu(A,B) = -\sum_{\{C:A\subseteq C\subset B\}} \mu(A,C) \tag{6-23}$$

$$= -\sum_{\{C:A\subseteq C\subset B\}} (-1)^{|C|-|A|}$$

$$= -\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} \tag{6-24}$$

最后的等式是下面事实的推论：对于满足 $0\leqslant k\leqslant p-1$ 的每个整数 k，满足 $A\subseteq C\subset B$ 和 $|C|-|A|=k$ 的集合 C 和包含于基数 p 的集合 $C\setminus A$ 中的基数 k 的子集一样多。由于

$$0=(1-1)^p=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}$$

因此式（6-24）意味着

$$\mu(A,B)=(-1)^p\binom{p}{p}=(-1)^p=(-1)^{|B|-|A|} \tag{6-25}$$

□

例　在这个例子中，我们计算一个线性有序集的莫比乌斯函数。令 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 并考虑线性有序集 $(X_n,\leqslant)$，其中 $1<2<\cdots<n$。对于 $k=1,2,\cdots,n$ 有 $\mu(k,k)=1$，并对 $1\leqslant l<k\leqslant n$ 有 $\mu(k,l)=0$。设 $l=k+1$，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$。此时，有

$$\sum_{\{j:k\leqslant j\leqslant k+1\}}\mu(k,j)=0$$

因此，

$$\mu(k,k)+\mu(k,k+1)=0$$

而这意味着 $\mu(k,k+1)=-\mu(k,k)=-1$。现在设 $1\leqslant k\leqslant n-2$，则

$$\mu(k,k)+\mu(k,k+1)+\mu(k,k+2)=0$$

因此

$$\mu(k,k+2)=-(\mu(k,k)+\mu(k,k+1))=-(1+(-1))=0$$

继续下去，或使用归纳法，可以看到线性有序集 $1<2<\cdots<n$ 的莫比乌斯函数满足

$$\mu(k,l)=\begin{cases}1,\text{若 } l=k\\ -1,\text{若 } l=k+1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

□

现在我们叙述并证明定义在有限偏序集上的函数的莫比乌斯反演公式（Möbius Inversion Formula）。在这个定理中假设 $(X,\leqslant)$ 有一个最小元，即对所有 $x\in X$ 满足 $0\leqslant x$ 的元素 0。例如，这对于偏序集 $(\mathcal{P}(X_n),\subseteq)$ 是成立的，其中的最小元就是空集 $\varnothing$。

定理 6.6.1　令 $(X,\leqslant)$ 为最小元是 0 的偏序集，令 μ 是它的莫比乌斯函数，并令 $F:X\to\Re$ 是定义在 X 上的实值函数，令函数 $G:X\to\Re$ 由

$$G(x)=\sum_{\{z:z\leqslant x\}}F(z)\quad(x\in X)$$

定义。则

$$F(x)=\sum_{\{y:y\leqslant x\}}G(y)\mu(y,x)\quad(x\in X)$$

证明： 令 ζ 为 $(X,\leqslant)$ 的 ζ 函数。利用前面讨论的 ζ 和 μ 的性质，对 X 中的任意元素 x 计算如下：

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{y:y\leqslant x\}} G(y)\mu(y,x) &= \sum_{\{y:y\leqslant x\}}\sum_{\{z:z\leqslant y\}} F(z)\mu(y,x) \\
&= \sum_{\{y:y\leqslant x\}} \mu(y,x) \sum_{\{z:z\in X\}} \zeta(z,y)F(z) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}}\sum_{\{y:y\leqslant x\}} \zeta(z,y)\mu(y,x)F(z) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}} \left(\sum_{\{y:z\leqslant y\leqslant x\}} \zeta(z,y)\mu(y,x) \right) F(z) \\
&= \sum_{\{z:z\in X\}} \delta(z,x)F(z) \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

□

推论 6.6.2　令 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，并令 $F: \mathcal{P}(X_n) \to \Re$ 为定义在 X_n 的子集上的函数。令 $G: \mathcal{P}(X_n) \to \Re$ 是由下式

$$G(L) = \sum_{L\subseteq K} f(L) \quad (L \subseteq X_n)$$

定义的函数，则

$$F(K) = \sum_{L\subseteq K} (-1)^{|K|-|L|} G(L) \quad (K \subseteq X_n)$$

证明：该推论由定理 6.6.1 推出，而 $(\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$ 的莫比乌斯函数的值在式(6-25)中给出。

□

例　我们要用莫比乌斯反演得到把 n 个非攻击型车放到带有禁止落子位置的 $n\times n$ 棋盘上的放置方法数的计算公式，这不同于定理 6.4.1 中给出的公式。为方便讨论，现在把 $n\times n$ 棋盘看成是元素为 0 和 1 的 $n\times n$ 矩阵，即

$$A = [a_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n]$$

把 0 放到每个禁止落子位置上，而把 1 放在允许放置的位置上。例如棋盘

×		×	
			×
	×		
		×	

(6-26)

对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-27}$$

棋盘上 4 个非攻击型车的集合对应矩阵 A 中 4 个 1 的集合，其中 A 的每行和每列恰好含有这 4 个 1 中的一个（等价地，在一行或一列上没有重复的 1）。例如对应位于

$$(1,4), (2,3), (3,1), (4,2)$$

上的 4 个非攻击型车的 4 个 1 为

$$a_{14}=1, a_{23}=1, a_{31}=1, a_{42}=1$$

这4个1对应 {1，2，3，4} 的排列4，3，1，2，或等价地，对应双射（bijection）

$$f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$$

其中

$$f(1)=4, f(2)=3, f(3)=1, f(4)=2$$

再令 $X_n=\{1, 2, \cdots, n\}$，并令 $\mathcal{P}_n$ 表示全部 $n!$ 个双射 $f: X_n\to X_n$ 的集合。一般地，$n\times n$ 棋盘上 n 个非攻击型车对应矩阵中的 n 个1，且每行和每列上恰好有一个1。这些1又对应 $\mathcal{P}_n$ 中的双射

$$f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$$

其中 $a_{if(i)}=1$，$i=1, 2, \cdots, n$，或等价地

$$\prod_{i=1}^{n} a_{if(i)} = a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)} = 1$$

由于这个乘积唯一的另外的值等于0，因此可以说，把 n 个非攻击型车放到与0和1组成的 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 相关联的 $n\times n$ 棋盘上的方法数等于

$$\sum_{f\in\mathcal{P}_n}\prod_{i=1}^{n} a_{if(i)} \tag{6-28}$$

式（6-28）中的表达式是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个重要组合函数，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的不变式。

考虑偏序集（$\mathcal{P}(X_n)$，$\subseteq$）。X_n 的基数 k 的每个子集 S 挑选 $\boldsymbol{A}$ 的 k 列，用 $\boldsymbol{A}[S]$ 表示由这些列形成的 $n\times k$ 子矩阵。令 $\mathcal{F}_n(S)$ 为所有函数 $f: \{1, 2, \cdots, n\}\to S$ 的集合，并令 $\mathcal{G}_n(S)$ 表示那些满射函数的子集。此时有

$$\mathcal{F}_n(S)=\bigcup_{T\subseteq S}\mathcal{G}_n(T)$$

通过

$$F(S) = \sum_{f\in\mathcal{G}_n(S)}\prod_{i=1} a_{if(i)} \quad (S\subseteq X_n) \tag{6-29}$$

定义函数 $F:\mathcal{P}(X_n)\to\Re$（此处，若 $S=\varnothing$，则 $F(S)=0$）。注意，$F(X_n)$ 等于式（6-28），因为满射函数 $f: X_n\to X_n$ 是双射。因此，我们的目标就是计算 $F(X_n)$。

令

$$G(S) = \sum_{T\subseteq S}F(T) \quad (S\subseteq X_n)$$

则

$$G(S) = \sum_{g\in\mathcal{F}_n(S)}\prod_{i=1} a_{ig(i)} \quad (S\subseteq X_n)$$

从推论6.6.2得到

$$F(X_n) = \sum_{S\subseteq X_n}(-1)^{n-|S|}G(S) \tag{6-30}$$

$G(S)$ 由于是 $a_{1g(1)}a_{2g(2)}\cdots a_{ng(n)}$ 对所有函数 $g: X_n\to S$ 求和，因而正是乘积

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in S}a_{ij}\right)$$

即 $G(S)$ 是 $\boldsymbol{A}[S]$ 每行上的元素的和的乘积。于是，式（6-30）变为

$$F(X_n)=\sum_{S\subseteq X_n}(-1)^{n-|S|}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in S}a_{ij}\right) \tag{6-31}$$

而这就给出一种把 n 个非攻击型车放到 $n\times n$ 棋盘上的方式数的计算方法：选一组列，计算这些列上每行的元素的和，把这些和乘起来，添上适当的符号，并对所有的选择将结果相加。被加数的个数等于大小为 n 的集合的子集的个数，从而等于 2^n。

将式（6-30）应用到与 4×4 矩阵（6-27）相关联的（6-26）中的棋盘上，经过冗长的计算，得到把 4 个非攻击型车放到棋盘（6-26）上的方法数等于 6。在这种情况下，由于 $n=4$是个小数，因此直接得到 $n=6$ 是比较容易的，但是问题不在于此。问题在于我们得到一种只依赖于简单算术计算的计数方法。 □

在下一个例子中，我们将利用偏序集的直积结构（见第 4 章的练习 38）。现在来复习它。令 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 为两个偏序集。在集

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

上定义关系≤，有

$$(x,y)\leqslant(x',y')\text{ 当且仅当 }x\leqslant_1 x'\text{ 且 }y\leqslant_2 y'$$

很容易直接验证 $(X\times Y,\leqslant)$ 是一个偏序集，叫做 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 的*直积*（direct product）。可以把这个直积结构推广到任意个数的偏序集。

下一个定理指出直积的莫比乌斯函数如何从它的各个分量的偏序集的莫比乌斯函数确定。

定理 6.6.3　令 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 为两个有限偏序集，它们的莫比乌斯函数分别为 μ_1 和 μ_2。令 μ 为 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 的直积的莫比乌斯函数。则

$$\mu((x,y),(x',y'))=\mu(x,x')\mu(y,y')\quad((x,y),(x',y')\in X\times Y) \tag{6-32}$$

证明：如果 $(x,y)\not\leqslant(y,y')$，那么 $\mu((x,y),(x',y'))=0$，或者 $x\not\leqslant_1 y$，或者 $x'\not\leqslant y'$，这意味着或者 $\mu_1(x,x')=0$ 或者 $\mu_2(y,y')=0$。因此，式（6-32）在这种情形下成立。

现在假设 $(x,y)\leqslant(y,y')$ 成立。下面通过对偏序中介于 (x,y) 和 (x',y') 之间的序偶 (u,v) 的个数使用归纳法，证明式（6-32）成立。我们有 $x\leqslant_1 x'$ 和 $y\leqslant_2 y'$，如果 $(x,y)=(x',y')$，那么 $x=x'$ 且 $y=y'$，式（6-32）两边的值都等于 1。假设 $(x,y)\neq(x',y')$，由归纳法：

$$\begin{aligned}\mu((x,y),(x',y'))&=-\sum_{\{(u,v):(x,y)\leqslant(u,v)<(x',y')\}}\mu((u,v),(x',y'))\\&=-\sum_{\{(u,v):(x,y)\leqslant(u,v)<(x',y')\}}\mu_1(u,x')\mu_2(v,y')\\&\qquad\text{（根据归纳法）}\end{aligned}$$

$$= -\left(\sum_{\{u: x\leqslant_1 u\leqslant_1 x'\}}\mu_1(u,x')\right)\left(\sum_{\{v: y\leqslant_2 v\leqslant_2 v'\}}\mu_2(v,y')\right) + \mu_1(x,x')\mu_2(y,y')$$
$$= (0)(0) + \mu_1(x,x')\mu_2(y,y')$$

因此，根据归纳法定理成立。 □

可以如下表达定理6.6.3：两个偏序集的直积的莫比乌斯函数是它们的莫比乌斯函数的乘积。更一般地，有限个有限偏序集直积的莫比乌斯函数是它们的莫比乌斯函数的乘积。

例 令 n 为正整数，并令 $X_n=\{1, 2, \cdots, n\}$。现在考虑偏序集 $D_n=(X_n, |)$，其中偏序由可除性给出：$a|b$ 当且仅当 a 是 b 的因子。为了简明起见，这里使用整除符号“|”而不使用偏序的一般符号“$\leqslant$”。我们的目标是计算该偏序集的 $\mu(1, n)$，由此可以通过若 $a|b$ 则 $\mu(a, b)=\mu(1, b/a)$ 来计算 X_n 中任意整数 a 和 b 的 $\mu(a, b)$（见练习）。

整数 n 可唯一地分解成一些素数，于是

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互异的素数而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为正整数[⊖]。由于 $\mu(1, n)$ 由

$$\mu(1,n) = -\sum_{\{m\geqslant 1: m|n, m\neq n\}}\mu(1,m)$$

归纳地给出，因此只需要考虑 $(X_n^*, |)$，其中 X_n^* 是 X_n 的所有满足 $k|n$ 的正整数 k 组成的子集。令 r 和 s 为 X_n^* 中的整数，有

$$r = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k} \text{和} s = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}$$

其中 $0\leqslant\beta_i, \gamma_i\leqslant\alpha_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$[⊜]。此时，$r|s$ 当且仅当 $\beta_i\leqslant\gamma_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$。于是，偏序集 $(X_n^*, |)$ 正是大小分别为 $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \cdots, \alpha_k+1$ 的 k 个线性序的直积。由定理6.6.3得到

$$\mu(1,n) = \prod_{i=1}^{k}\mu(1,p^{\alpha_i})$$

从线性序的莫比乌斯函数的求值可以看到

$$\mu(1,p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 1, 若\ \alpha_i = 0 \\ -1, 若\ \alpha_i = 1 \\ 0, 若\ \alpha_i \geqslant 2 \end{cases}$$

因此

$$\mu(1,n) = \begin{cases} 1, 若\ n=1 \\ (-1)^k, 若\ n\ 是互异素数的乘积 \\ 0, 其他情形 \end{cases} \tag{6-33}$$

□

下一个定理给出经典的莫比乌斯反演公式。

⊖ 若不计这些素数写出的顺序，则分解是唯一的。

⊜ 为了 r 和 s 的分解式中有相同的素数，允许某些指数是0。

定理 6.6.4　令 F 为定义在正整数集上的实值函数。由

$$G(n)=\sum_{k:k|n}F(k)$$

定义在正整数集上的实值函数 G。则对于每一个正整数 n，有

$$F(n)=\sum_{k:k|n}\mu(n/k)G(k)$$

其中写 μ（1，n/k）为 μ（n/k）。

证明：对于任意固定的 n，由于 G（n）的定义只依赖于 F 在集 $X_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的值，因此我们把注意力放在偏序集（X_n，|）上。根据定理 6.6.1，有

$$F(n)=\sum_{\{k:k|n\}}\mu(k,n)G(k)=\sum_{\{k:k|n\}}\mu(1,n/k)G(k)$$

□

在下面两个例子中，应用定理 6.6.4 求解两个计数问题。

例　在这个例子中，计算欧拉函数ϕ的值，该函数对于正整数 n 由ϕ（n）$=|S_n|$定义，其中

$$S_n=\{k:1\leqslant k\leqslant n, \mathrm{GCD}(k,n)=1\}$$

于是，$\phi(n)$ 等于不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数。例如，ϕ（1）=1，而

$$\phi(9)=|\{1,2,4,5,7,8\}|=6$$

和$\phi(13)=1$（ϕ在素数上的值总是 1）。令

$$S_n^d=\{k:1\leqslant k\leqslant n,\ \mathrm{GCD}(k,n)=d\}\qquad(d\text{ 是 } n \text{ 的正因子})$$

此时，$S_n=S_n^1$。由于使 GCD（k，n）$=d$ 的任意整数 k 都有 $k=dk'$ 的形式，因此又有 $|S_n^d|=\phi(n/d)$，其中 $1\leqslant k'\leqslant n/d$ 且 GCD（k'，n/d）=1。我们取莫比乌斯反演中的函数 F 为欧拉函数ϕ并定义

$$G(n)=\sum_{\{d:d|n\}}\phi(d)$$

由于$\phi(d)$ 等于满足 GCD（k，n）$=d$ 的 1 和 n 之间的整数k 的个数，还由于对于每个这样的 k，GCD（k，n）$=d$ 对满足$d|n$ 的某个整数d 成立，因此得到 G（n）$=n$。于是有

$$n=\sum_{\{d:d|n\}}\phi(d)$$

反解这个方程，可以得到

$$\phi(n)=\sum_{\{d:d|n\}}\mu(n/d)d=\sum_{\{d:d|n\}}\mu(d)n/d\qquad(6\text{-}34)$$

此时，μ（d）非 0 当且仅当 $d=1$ 或 d 是互异素数的乘积；对于后者，$\mu(d)=(-1)^r$，其中 r 是d 中互异素数的个数。令这些互异素数除以 n 为 p_1，p_2，…，p_r。这时，式（6-34）意味着ϕ（n）等于

$$n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots\right)+\cdots+$$

$$(-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}(-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$$

而这正是乘积展开式

$$n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

因此，有

$$\mu(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

这里，乘积是对所有整除 n 的互异素数 p 进行的。 □

我们通过经典的莫比乌斯反演的应用来结束本小节。

例　计算 k 个不同符号 a_1，a_2，…，a_k 的循环 n-排列的个数，其中，每一个符号都可以使用任意的次数，或等价地，即多重集 $\{n\cdot a_1, n\cdot a_2, \cdots, n\cdot a_k\}$ 循环 n-排列的个数。我们定义这样一个循环排列的周期为每次移动一个位置而使得循环字不变的顺时针循环移位的最小正次数 d。例如，

$$\begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & & a_2 \\ & a_1 & \end{matrix}$$

的周期是 2，因为

$$\begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & & a_2 \\ & a_1 & \end{matrix} \to \begin{matrix} & a_2 & \\ a_1 & & a_1 \\ & a_2 & \end{matrix} \to \begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & & a_2 \\ & a_1 & \end{matrix}$$

循环排列

$$\begin{matrix} & a_1 & \\ a_2 & & a_1 \\ & a_3 & \end{matrix}$$

的周期为 4，因为顺时针旋转一整圈（4 次移位）才能出现原来的样子。循环排列的周期 d 满足 $1\leqslant d\leqslant n$ 和 $d\mid n$，因为周期 d 意味着特定的排列样式被重复 n/d 次。可以把一个循环排列看成是线性的符号串，其中第 1 个符号被认为是跟在最后的符号之后。于是，a_1，a_2，a_1，a_2 对应刚刚考虑过的第 1 个循环排列。移位一次，得到串 a_2，a_1，a_2，a_1；再移位一次，又返回到 a_1，a_2，a_1，a_2。串

$$a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3$$

对应周期为 3 的循环 6-排列。移位 3 次得到

$$a_1,a_2,a_3,a_1,a_2,a_3 \to a_3,a_1,a_2,a_3,a_1,a_2 \to a_2,a_3,a_1,a_2,a_3,a_1 \to a_1,a_2,a_3,a_1,a_2,a_3$$

又回到第 1 次时的原始串。一般说来，周期为 d 的循环 n-排列以这种形式恰好对应 d 个不

同的线性串，每个线性串都有周期 d。

令$h(n)$是可能使用符号 a_1，a_2，…，a_k 的循环 n-字的个数[⊖]。对于正整数 m，令 $f(m)$等于长为 m 可能用到符号a_1，a_2，…，a_k 的串的个数。由于每个串有一个周期 d，其中 $d\mid n$，因此有

$$h(n)=\sum_{\{d:d\mid n\}} f(d) \tag{6-35}$$

因此，如果我们能够计算每个可能的周期为 d 的长为 n 的串的个数，那么就能够计算$h(n)$。令

$$g(m)=\sum_{\{e:e\mid m\}} f(e) \tag{6-36}$$

此时，$g(m)$ 是长为 m 的串的总数，从而 $g(m)=k^m$。根据经典的莫比乌斯反演，即定理6.6.4，我们得到

$$f(m)=\sum_{\{e:e\mid m\}}\mu(m/e)g(e)=\sum_{\{e:e\mid m\}}\mu(m/e)k^e \tag{6-37}$$

在式（6-35）中使用式（6-37）得到

$$\begin{aligned}
h(n) &= \sum_{\{d:d\mid n\}} f(d)\\
&= \sum_{\{d:d\mid n\}}\frac{1}{d}\sum_{\{e:e\mid d\}}\mu(d/e)k^e\\
&= \sum_{\{e:e\mid n\}}\left(\sum_{\{m:m\mid n/e\}}\frac{1}{me}\mu(m)\right)k^e\\
&\text{（由于 } e\mid d \text{ 且 } d\mid n\text{，于是有 } d=me\text{，其中 } me\mid n \text{ 从而 } m\mid n/e\text{）}\\
&= \sum_{\{e:e\mid n\}}\left(\sum_{\{r:r\mid n/e\}}\frac{r}{n}\mu((n/e)/r)\right)k^e\\
&= \sum_{\{e:e\mid n\}}\frac{\phi(n/e)}{n}k^e\\
&= \frac{1}{n}\sum_{\{e:e\mid n\}}\phi(n/e)k^e
\end{aligned}$$

因此，从一个大小为 k 的字母表能够得出的循环 n-字的个数等于

$$\frac{1}{n}\sum_{\{e:e\mid n\}}\phi(n/e)k^e$$

□

6.7 练习题

1. 求出从 1 到 10 000 不能被 4，5 或 6 整除的整数个数。
2. 求出从 1 到 10 000 不能被 4，6，7 或 10 整除的整数个数。
3. 求出从 1 到 10 000 既不是完全平方数也不是完全立方数的整数个数。

⊖ $h(n)$依赖于 k，但这在记号中没有反映出来。

4. 确定多重集

$$S=\{4\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\}$$

的 12-组合的个数。

5. 确定多重集

$$S=\{\infty\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c, 7\cdot d\}$$

的 10-组合的个数。

6. 面包店出售巧克力的、肉桂的和素的炸面饼圈，并在一特定时刻有 6 个巧克力、6 个肉桂和 3 个素炸面饼圈。如果一个盒子装 12 个面饼圈，那么可能有多少种不同的盒装面饼圈组合？

7. 确定在非负整数 x_1，x_2，x_3 和 x_4 不超过 8 时方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ 的整数解的个数。

8. 确定在正整数 x_1，x_2，x_3 和 x_4 不超过 8 时方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ 的整数解的个数。

9. 确定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=20$$

满足

$$1\leqslant x_1\leqslant 6,\ 0\leqslant x_2\leqslant 7,\ 4\leqslant x_3\leqslant 8,\ 2\leqslant x_4\leqslant 6$$

的整数解的个数。

10. 令 S 是重数分别为 n_1，n_2，…，n_k 的 k 个不同物体的多重集。令 r 是使得至少存在 S 的一个 r-组合的正整数。证明，在应用容斥原理确定 S 的 r-组合数时有 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k=\varnothing$。

11. 确定 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的没有偶数在它的自然位置上的排列数。

12. 确定 $\{1, 2, \cdots 8\}$ 的恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数。

13. 确定 $\{1, 2, \cdots, 9\}$ 的至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数。

14. 确定集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的恰有 k 个整数在它们的自然位置上的排列数的一般公式。

15. 在一次聚会上，7 位绅士检查他们的帽子。有多少种方法使得这些帽子返还时满足

　ⅰ）没有绅士收到他自己的帽子？

　ⅱ）至少一位绅士收到他自己的帽子？

　ⅲ）至少两位绅士收到他们自己的帽子？

16. 用组合学推理推导恒等式

$$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}+\binom{n}{2}D_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}D_1+\binom{n}{n}D_0$$

（这里 D_0 定义为 1）

17. 确定多重集

$$S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c\}$$

的排列数，其中，对每种类型的字母，同类型的那些字母不能连续出现。（*abbbbcaca* 是不允许的，但 *abbbacacb* 可以。）

18. 验证阶乘公式

$$n! = (n-1)((n-2)! + (n-1)!) \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

19. 利用定理 6.3.1 给出的错位排列数的计算公式提供关系式

$$D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}) \qquad (n=3,4,5,\cdots)$$

的证明。

20. 从公式 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ 出发，给出定理 6.3.1 的证明。

21. 证明 D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数。

22. 证明，6.5 节的数 Q_n 可以改写成形式

$$Q_n = (n-1)!\left(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

23. (继续练习题 22) 验证恒等式

$$(-1)^k \frac{n-k}{k!} = (-1)^k \frac{n}{k!} + (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!}$$

并用它证明 $Q_n = D_n + D_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$。

24. 把六个非攻击型车放到具有如下所述禁止位置的 6 行 6 列棋盘上的方法数是多少?

i)

×	×				
		×	×		
				×	×

ii)

×	×				
×	×				
		×	×		
		×	×		
				×	×
				×	×

iii)

×	×				
	×	×			
		×			
				×	×
					×

25. 计算 {1，2，3，4，5，6} 的排列 $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ 的个数。其中 $i_1 \neq 1$，5；$i_3 \neq 2$，3，5；$i_4 \neq 4$ 以及 $i_6 \neq 5$，6。

26. 计算 {1，2，3，4，5，6} 的排列 $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ 的个数。其中 $i_1 \neq 1$，2，3；$i_2 \neq 1$；$i_3 \neq 1$；$i_5 \neq 5$，6 以及 $i_6 \neq 5$，6。

27. 旋转木马有 8 个座位，每个座位都代表一种不同的动物。八个女孩脸朝前（每个女孩看到另外一个女孩的后背）围坐在旋转木马上。她们可以有多少种方法改变座位，使得每个女孩前面的女孩都与原先的不同？如果所有的座位都是一样的，那么该问题又如何变化？

28. 旋转木马有 8 个座位，每个座位都代表一种不同的动物。八个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对另一个男孩（每个男孩看另一个男孩的前面）。能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

29. 多重集 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c, 1 \cdot d\}$ 存在多少循环（circular）排列，对每种类型字母，该类型的所有字母不连续出现？

30. 多重集 $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot c, 5 \cdot d\}$ 存在多少循环（circular）排列，对每种类型字母，该类型的所有字母不连续出现？

31. 令 n 为正整数并令 p_1，p_2，…，p_k 为整除 n 的所有互异的素数。考虑由

$$\phi(n) = |\{k: 1 \leqslant k \leqslant n, \mathrm{GCD}\{k, n\} = 1\}|$$

定义的欧拉函数 ϕ。利用容斥原理证明

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

*32. 令 n 和 k 为正整数，$k \leqslant n$。令 $a(n, k)$ 为将 k 个非攻击型车放到 $n \times n$ 棋盘上的摆放方法数，其中棋盘上的位置（1，1），（2，2），…，（n，n）和（1，2），（2，3），…，（$n-1$，n），（n，1）是禁放位置。例如，如果 $n=6$，则棋盘为

<table>
<tr><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
</table>

证明

$$a(n, k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

注意，$a(n, k)$ 是从排成一圈的 $2n$ 个孩子中选择 k 个孩子并使得没有两个相邻的孩子都被选中的方法数。

33. 证明卷积满足结合律：$f * (g * h) = (f * g) * h$。

34. 考虑线性有序集 $1<2<\cdots<n$。令 F：$\{1, 2, \cdots, n\}\to\Re$ 是一个函数并令 G：$\{1, 2, \cdots, n\}\to\Re$ 由

$$G(m)=\sum_{k=1}^{m}F(k)\qquad(1\leqslant k\leqslant n)$$

定义。应用莫比乌斯反演用 G 表示 F。

35. 考虑如下带有禁放位置的棋盘：

	×	×	
×			
			×
	×		

应用式（6-31）计算将 4 个非攻击型车放到这张棋盘上的方法数。

36. 考虑集 $\{1, 2, 3\}$ 的子集由包含定义偏序的偏序集 $(\mathcal{P}(X_3), \subseteq)$。令 $\mathcal{F}(\mathcal{P}(X_3))$ 中的函数 f 由

$$f(A, B)=\begin{cases}1, & 若 A=B\\ 2, & 若 A\subset B 且 |B|-|A|=1\\ 1, & 若 A\subset B 且 |B|-|A|=2\\ -1, & 若 A\subset B 且 |B|-|A|=3\end{cases}$$

定义。求 f 关于卷积的逆。

37. 回忆 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有划分的偏序集 Π_n，其中的偏序为加细（refinement）（见第 4 章的练习 47）。确定 Π_3 和 Π_4 的莫比乌斯函数。

38. 令 n 为正整数并考虑偏序集 $(X_n, |)$。令 a 和 b 是 X_n 中的正整数，其中 $a\mid b$。证明 $\mu(a, b)=\mu(1, b/a)$。

39. 考虑 k 个互异元素的多重集 $X=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是正的重数。我们引入 X 的子多重集上的偏序，其对应的关系如下：如果 $A=\{p_1\cdot a_1, p_2\cdot a_2, \cdots, p_k\cdot a_k\}$ 且 $B=\{q_1\cdot a_1, q_2\cdot a_2, \cdots, q_k\cdot a_k\}$ 是 X 的子多重集，那么当 $i=1, 2, \cdots, k$ 时 $p_i\leqslant q_i$，有 $A\leqslant B$。证明这种关系定义了 X 上的一种偏序，然后计算它的莫比乌斯函数。

第7章 递推关系和生成函数

许多组合学计数问题依赖于一个整数参数 n。这个参数 n 常常表示问题中某个基本集或多重集的大小、组合的大小、排列中的位置数等等。因此，一个计数问题常常不是一个单独的问题而是一系列的单独问题。例如，令 h_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列数。我们知道，$h_n=n!$，于是得到一个数列

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$$

对于这个数列来说，一般项 h_n 等于 $n!$。通过选择 n 为一个特定的整数可以得到这个问题的一个实例。如果取 $n=5$，那么正如确定 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的排列数问题的答案那样，得到 $h_5=5!$。

另一个例子，令 g_n 表示方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=n$$

的非负整数解的个数。从第3章我们知道，序列

$$g_0, g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$$

的一般项满足

$$g_n=\binom{n+3}{n}$$

在这一章里，我们讨论涉及一个整数参数的某些计数问题的代数求解方法。我们的方法或者导致一个显式公式，或者归为一个函数，即生成函数，它的幂级数的系数给出计数问题的解。

7.1 一些数列

令

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots \tag{7-1}$$

表示一个数列。h_n 叫做序列的一般项或生成项。两个熟悉类型的序列为

算术序列，其中的每一项比前一项大一个常数 q，

和

几何序列，其中的每一项是前一项的常数 q 倍。

在这两个例子中，一旦初始项 h_0 和常数 q 指定，序列也就唯一确定了：

(算术序列)

$$h_0, h_0+q, h_0+2q, \cdots, h_0+nq, \cdots \tag{7-2}$$

（几何序列）

$$h_0,\ qh_0,\ q^2h_0,\ \cdots,\ q^nh_0,\ \cdots \tag{7-3}$$

在算术序列的情况，有规则

$$h_n = h_{n-1} + q \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-4}$$

而一般项为

$$h_n = h_0 + nq \qquad (n \geqslant 0)$$

在几何序列的情况，有规则

$$h_n = qh_{n-1} \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-5}$$

而一般项为

$$h_n = h_0 q^n \qquad (n \geqslant 0)$$

例（算术序列）

ⅰ）$h_0=1$，$q=2$：1，3，5，…，$1+2n$，…
这是一个正的奇整数序列。

ⅱ）$h_0=4$，$q=0$：4，4，4，…，4，…
这是每一项都等于 4 的常数列。

ⅲ）$h_0=0$，$q=1$：0，1，2，…，n，…
这是非负整数序列（计数用的数）。 □

例（几何序列）

ⅰ）$h_0=1$，$q=2$：1，2，2^2，…，2^n，…
这是 2 的非负整数幂的序列。它的组合学重要性在于，它是求 n-元素集的组合数的计数问题的序列。也是为了确定基为 2 的数的表示问题所用到的序列。

ⅱ）$h_0=5$，$q=3$：5，3×5，$3^2\times5$，…，$3^n\times5$，…
这是一个计数问题的序列，该问题是求由给定重数分别被 4，2，2，…，2（n 个 2）的 $n+1$ 个不同物体组成的多重集的子多重集的个数。 □

序列（7-1）的部分和是和

$$\begin{aligned}
s_0 &= h_0 \\
s_1 &= h_0 + h_1 \\
s_2 &= h_0 + h_1 + h_2 \\
&\vdots \\
s_n &= h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \sum_{k=0}^{n} h_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

部分和形成一个新的序列 s_0，s_1，s_2，…，s_n，…，其一般项为 S_n。

算术序列的部分和为

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (h_0 + kq) = (n+1)\ h_0 + \frac{qn\ (n+1)}{2}$$

几何序列的部分和为

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} q^k h_0=\begin{cases}\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}h_0 & (q\neq 1)\\ (n+1)\ h_0 & (q=1)\end{cases}$$

无论算术序列还是几何序列，得到下一项的规则（7-4）和（7-5）都是递推关系的简单例子。在第6章错位排列数的研究中，已经得到 D_n 的两个递推关系。在式（7-4）和式(7-5)中，序列的第 n 项 h_n 由第（$n-1$）项 h_{n-1} 和常数 q 得到。我们把递推关系的一般定义推迟到下一节进行。下面我们给出一个递推关系的例子，它来自一个几何计数问题。

例　确定平面一般位置上的 n 个互相交叠的圆所形成的区域数。所谓*互相交叠*是指每两个圆相交在不同的两个点上（因此，不相交或相切的圆是不允许的）。*一般位置*指的是不存在有一个公共点的三个圆[⊖]。

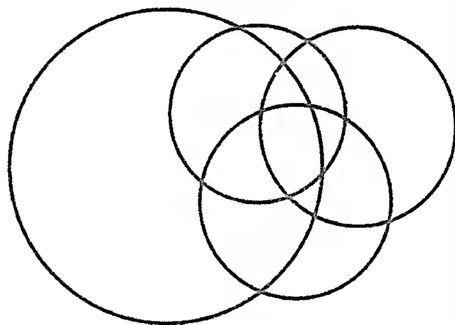


图 7-1　四个互相交叠的圆

我们有 $h_0=1$（一个区域即整个平面），$h_1=2$（圆内区域和圆外区域），$h_2=4$ 以及 $h_3=8$。现在试想 $h_4=16$。然而，图 7-1 却迅速揭示了 $h_4=14$ 的情形。

我们得到递推关系如下。设 $n\geqslant 2$ 及 $n-1$ 个一般位置上互相交叠的圆已经在平面上画出，它们形成 h_{n-1}个区域。现在放进第 n 个圆，使得一般位置上存在 n 个互相交叠的圆。前 $n-1$ 个圆的每一个都与第 n 个圆相交于两点，而由于这些圆是在一般位置上，所以得到 2（$n-1$）个不同的点 P_1，P_2，…，$P_{2(n-1)}$。这 2（$n-1$)个点把 n 个圆分成 2（$n-1$）条弧：P_1P_2 间的弧，P_2P_3 间的弧，$P_{2(n-1)-1}$和 $P_{2(n-1)}$间以及 $P_{2(n-1)}$和 P_1 间的弧。这 2（$n-1$）条弧中的每一条都把前 $n-1$ 个圆形成的区域一分为二，形成了 2（$n-1$）个区域。因此，h_n 满足递推关系

$$h_n=h_{n-1}+2\ (n-1)\qquad (n\geqslant 2)\tag{7-6}$$

可以用递推关系（7-6）得到 h_n 的关于参数 n 的公式。通过迭代（7-6）[⊜]得到

$$\begin{aligned}h_n&=h_{n-1}+2(n-1)\\&=h_{n-2}+2(n-2)+2(n-1)\\&=h_{n-3}+2(n-3)+2(n-2)+2(n-1)\\&\vdots\\h_n&=h_1+2(1)+2(2)+\cdots+2(n-2)+2(n-1)\end{aligned}$$

由于 $h_1=2$ 且 $1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$,得到

$$h_n=2+2\frac{n\ (n-1)}{2}=n^2-n+2\qquad (n\geqslant 2)$$

⊖ 这些圆不必是“圆的”。闭凸曲线就足够了。

⊜ 反复不断地应用式（7-6）。

这个公式虽然对于 $n=0$ 不成立（因为 $h_0=1$），但是对于 $n=1$ 还是有效的（因为 $h_1=2$）。

□

本节其余部分涉及所谓的斐波那契序列的计数序列。比萨的 Leonardo[㊀]在 1202 年出版的书 *Liber Abaci*[㊁]里，提出一个在一年内由一对兔子生出多少对兔子的问题。

Leonardo［Fibonacci］提出的这个问题如下。

> 在一年之初把性别相反的一对新生兔子放进围栏。从第二个月开始，母兔每月生出一对性别相反的小兔。每对新生兔也从它们第二个月大开始每月生出一对新兔。求一年后围栏内兔子的对数。

开始一对兔子在第一个月期间成熟，因此在第二个月的开始围栏中还是只有一对兔子。在第二个月期间，原先的一对兔子生下一对小兔，于是，在第三个月的开始有两对兔子。在第三个月期间新生的一对兔子正在成熟，只有原先的一对兔子生小兔。因此，在第四个月的开始，围栏内将有 $2+1=3$ 对兔子。一般地，令 f_n 表示在第 n 月开始（等价地，在第 $n-1$ 月的末尾）时围栏内的兔子对数。我们已经算出 $f_1=1$，$f_2=1$，$f_3=2$ 和 $f_4=3$，现在要求出 f_{13}。

我们推导关于 f_n 的一个递推关系，然后从这个关系计算出 f_{13}。在第 n 月开始，围栏内的兔子可以分成两部分：在第 $n-1$ 月开始已有的那些兔子和第 $n-1$ 月期间出生的那些兔子。由于一个月的成熟过程，在第 $n-1$ 个月期间出生的小兔的对数为在第 $n-2$ 个月开始时存在的兔子对数。这样，在第 n 个月开始就有 $f_{n-1}+f_{n-2}$ 对兔子，于是得到递推关系

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\qquad (n\geqslant 3)$$

利用这个关系和已经算出的 f_1，f_2，f_3 和 f_4 的值，得出

$$\begin{aligned}
f_5&=f_4+f_3=3+2=5\\
f_6&=f_5+f_4=5+3=8\\
f_7&=f_6+f_5=8+5=13\\
f_8&=f_7+f_6=13+8=21\\
f_9&=f_8+f_7=21+13=34\\
f_{10}&=f_9+f_8=34+21=55\\
f_{11}&=f_{10}+f_9=55+34=89\\
f_{12}&=f_{11}+f_{10}=89+55=144\\
f_{13}&=f_{12}+f_{11}=144+89=233
\end{aligned}$$

因此，一年以后围栏内有 233 对兔子。定义 $f_0=0$，于是 $f_2=1=1+0=f_1+f_0$。满足递推关系和初始条件

$$\begin{aligned}
&f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\qquad (n\geqslant 2)\\
&f_0=0,\ f_1=1
\end{aligned}\tag{7-7}$$

㊀ Leonardo，更为人们熟知的名字是斐波那契（Fibonacci，意思是 Bonacci 之子），对于我们在西欧当前的计数系统的引进负有主要的责任。

㊁ 字面上的意思是关于算盘的一本书。

的数列 f_0，f_1，f_2，f_3，…叫做斐波那契序列，序列的项叫做斐波那契数，式（7-7）中的递推关系叫做斐波那契递归。由计算可知，斐波那契序列的前几项是

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots$$

斐波那契序列有许多重要的性质。在下面两个例子中我们给出两个性质。

例 斐波那契序列的项的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n \\ &= f_{n+2}-1 \end{aligned} \tag{7-8}$$

通过对 n 用归纳法证明公式（7-8）。对于 $n=0$，公式（7-8）化为 $f_0=f_2-1$，由于 $0=1-1$，公式(7-8) 当然成立。

现在令 $n\geqslant1$。假设公式（7-8）对 n 成立，证明用 $n+1$ 代替 n 时，公式（7-8）也成立：

$$\begin{aligned} & f_0+f_1+f_2+\cdots+f_{n+1} \\ =&(f_0+f_1+f_2+\cdots+f_n)+f_{n+1} \\ =&(f_{n+2}-1)+f_{n+1}(\text{根据归纳法}) \\ =&f_{n+2}+f_{n+1}-1 \\ =&f_{n+3}-1\ (\text{根据斐波那契递归}) \end{aligned}$$

因此，由归纳法，公式（7-8）成立。 □

例 斐波那契数是偶数当且仅当 n 能被 3 整除。

这当然与斐波那契数 f_0，f_1，f_2 的值一致，一般地，如果有

偶，奇，奇

则由斐波那契递归，接下来的三个数是

奇 + 奇 = 偶

奇 + 偶 = 奇

和

偶 + 奇 = 奇 □

斐波那契数的另外几个性质在练习里给出。

现在的目标是得到斐波那契数的公式，并为此叙述求解递推关系的技巧，这些技巧将在下一节进行更深入的讨论。

考虑在形式

$$f_n-f_{n-1}-f_{n-2}=0 \qquad (n\geqslant2) \tag{7-9}$$

下斐波那契递推关系，先忽略 f_0 和 f_1 的初始值。解决这个递推关系的一种方法是寻找形式为

$$f_n=q^n$$

的一个解，其中 q 是一个非零数。因此，在第一项等于 $q^0=1$ 的几何序列中寻找一个解。我们观察到，$f_n=q^n$ 满足斐波那契递推关系当且仅当

$$q^n-q^{n-1}-q^{n-2}=0$$

或等价地

$$q^{n-2}(q^2-q-1)=0 \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

由于假设 q 异于零，我们断言，$f_n=q^n$ 是斐波那契递推关系的解当且仅当 $q^2-q-1=0$，或等价地，当且仅当 q 是二次方程

$$x^2-x-1=0$$

的根。应用二次求根公式，我们发现这个方程的根为

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

因此

$$f_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{和} f_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

两者都是斐波那契递推关系的解。由于斐波那契递推关系是线性的和齐次的，通过直接计算得到

$$f_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{7-10}$$

对于任意选择的常数 c_1 和 c_2，上式也是递推关系（7-9）的解。

斐波那契序列有初始值 $f_0=0$ 和 $f_1=1$。我们能在公式（7-10）中选择 c_1 和 c_2 使得达到初始值吗？如果能，那么公式（7-10）将给出斐波那契数的公式。为了满足这些初始值，必须有

$$(n=0) \qquad c_1+c_2=0$$

$$(n=1) \qquad c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$$

这是未知数 c_1 和 c_2 的两个线性方程的联立方程组，它的唯一解为

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

将其代到公式（7-10）中，得到下列公式。

定理 7.1.1 斐波那契数满足公式

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n\geqslant 0) \tag{7-11}$$

虽然斐波那契数都是整数，可是对这些整数的显式公式却包含无理数$\sqrt{5}$。当用斐波那契定理展开式（7-11）中的 n 次幂的时候，所有这些$\sqrt{5}$又都奇迹般地消失了。

无论什么初始值 $f_0=a$ 和 $f_1=b$，常数 c_1 和 c_2 都能被确定以使得这些初始值成立，在

这种意义下，公式（7-10）的解是斐波那契递推关系（7-9）的一般解。之所以如此，是因为线性方程组

$$c_1+c_2=a$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=b$$

的系数矩阵是可逆的，它的行列式

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=-\sqrt{5}$$

异于零。因此，无论 a 和 b 的值是什么，线性方程组都能够对 c_1 和 c_2 唯一解出。

例 令 g_0，g_1，g_2，…，g_n，…是满足下面给出的斐波那契递推关系和初始条件

$$g_n=g_{n-1}+g_{n-2} \qquad (n\geqslant 2)$$

$$g_0=2，\ g_1=-1$$

的数列。要确定满足下列条件的 c_1 和 c_2

$$c_1+c_2=2$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$$

解这个方程组，得到

$$c_1=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \qquad c_2=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$$

因此，对于 g_n，公式为

$$g_n=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

斐波那契数也出现在其他的组合学问题中。 □

例 确定 $2\times n$ 棋盘用多米诺牌完美覆盖的方法数 h_n（见第 1 章的有关定义）。

我们定义 $h_0=1$[⊖]。我们还算得 $h_1=1$，$h_2=2$ 和 $h_3=3$。令 $n\geqslant 2$。我们将 $2\times n$ 棋盘划分成两部分 A 和 B。我们将有一块竖直多米诺牌覆盖棋盘左上角方格的那些完美覆盖放在 A 中。将其余完美覆盖放在 B 中，即有一块水平多米诺牌覆盖棋盘左上角方格，另一块水平多米诺牌覆盖棋盘左下角方格的那些完美覆盖，在 A 中的完美覆盖与 $2\times(n-1)$ 棋盘的完美覆盖一样多。因此，A 中的完美覆盖数为

$$|A|=h_{n-1}$$

⊖ 2 行 0 列棋盘是空的并且恰有一个完美覆盖，即空覆盖。

B 中的完美覆盖与$2\times(n-2)$棋盘的完美覆盖一样多，因此，B 中的完美覆盖数为

$$|B|=h_{n-2}$$

于是，我们断言

$$h_n=|A|+|B|=h_{n-1}+h_{n-2} \qquad (n\geqslant 2)$$

由于 $h_0=h_1=1$（斐波那契数 f_1 和 f_2 的值）和 $h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$（$n\geqslant 2$）（斐波那契递推关系），我们得出结论，h_0，h_1，h_2，…，h_n，…是删除 f_0 的斐波那契序列 f_1，f_2，…，f_n，… □

例　确定用单牌和多米诺牌对 $1\times n$ 棋盘完美覆盖的方法数 b_n。

取一个用多米诺牌对 $2\times n$ 棋盘的完美覆盖并只看它的第一行，就会看到用单牌和多米诺牌对 $1\times n$ 棋盘的完美覆盖。反之，每一个用单牌和多米诺牌对 $1\times n$ 棋盘的完美覆盖可以被唯一地“扩展”成用多米诺牌对 $2\times n$ 棋盘的完美覆盖。于是，用单牌和多米诺牌对 $1\times n$ 棋盘的完美覆盖数等于用多米诺牌对 $2\times n$ 棋盘的完美覆盖数。因此，b_0，b_1，b_2，…，b_n，…也是删除 f_0 后的斐波那契序列。 □

在下一个定理中，证明斐波那契数是如何作为二项式系数的和出现的。

定理 7.1.2　*沿 Pascal 三角形左下到右上对角线上的二项式系数的和是斐波那契数。更精确地说，第 n 个斐波那契数 f_n 满足*

$$f_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{n-k}{k-1}$$

其中 $k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ 是$\frac{n+1}{2}$的弱取整。

证明：定义

$$g_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\cdots+\binom{n-k}{k-1} \qquad (n\geqslant 0)$$

其中，$k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$。对于每个整数 $p>n$，$\binom{n}{p}=0$，因此，也可以写成

$$g_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{0}{n-1}$$

或用求和记号

$$g_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{k}$$

为了证明定理，只要证明 g_n 满足斐波那契递推关系并有与斐波那契序列相同的初始值即可。我们有

$$g_0=\binom{0}{-1}=0$$

$$g_1=\binom{0}{0}=1$$

应用 Pascal 公式，对于每个 $n\geqslant 2$，

$$\begin{aligned}
g_{n-1}+g_{n-2} &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2-k}{k}+\sum_{j=0}^{n-3}\binom{n-3-j}{j} \\
&= \binom{n-2}{0}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2-k}{k}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2-k}{k-1} \\
&= \binom{n-2}{0}+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\binom{n-2-k}{k}+\binom{n-2-k}{k-1}\right) \\
&= \binom{n-2}{0}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1-k}{k} \\
&= \binom{n-1}{0}+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1-k}{k}+\binom{0}{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{k}=g_n
\end{aligned}$$

这里我们用到事实

$$\binom{n-1}{0}=1=\binom{n-2}{0}\text{和}\binom{0}{n-1}=0 \qquad (n\geqslant 2)$$

我们得到结论：g_0，g_1，g_2，…，g_n，…是斐波那契序列，定理得证。 □

7.2 线性齐次递推关系

令

$$h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n,\ \cdots \tag{7-12}$$

是一个数列。如果存在量 a_1，a_2，…，a_k，$a_k\neq 0$ 和量 b_n（每一个量都可能依赖于 n），使得

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\cdots+a_kh_{n-k}+b_n \qquad (n\geqslant k) \tag{7-13}$$

则称该序列满足 k 阶线性递推关系。

例 错位排列数列 D_0，D_1，D_2，…，D_n，…满足两个递推关系

$$D_n=(n-1)D_{n-1}+(n-1)D_{n-2} \qquad (n\geqslant 2)$$
$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n \qquad (n\geqslant 1)$$

第一个递推关系的阶为 2，且 $a_1=n-1$，$a_2=n-1$ 和 $b_n=0$。第二个递推关系的阶为 1，且 $a_1=n$ 以及 $b_n=(-1)^n$。 □

例 斐波那契序列 f_0，f_1，f_2，…，f_n，…满足 2 阶递推关系

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \qquad (n\geqslant 2)$$

且 $a_1=1$，$a_2=1$ 和 $b_n=0$。 □

例 阶乘序列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…，其中 $h_n=n!$，满足 1 阶递推关系

$$h_n=nh_{n-1} \qquad (n\geqslant 1)$$

且 $a_1=n$，$b_n=0$。 □

例 几何序列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…，其中 $h_n=q^n$，满足1阶递推关系

$$h_n=qh_{n-1} \quad (n\geqslant 1)$$

且 $a_1=q$，$b_n=0$。 □

正如这些例子所指出的，式（7-13）中的量 a_1，a_2，…，a_k 可以是常数或依赖于 n。同样，式（7-13）中的量 b_n 也可以是常数（可能为0）或依赖于 n。

如果 b_n 是常数0，则线性递推关系（7-13）称为*齐次的*，如果 a_1，a_2，…，a_k 是常数，则称式（7-13）具有*常系数*。本节讨论求解常系数线性齐次递推关系，即形如

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\cdots+a_kh_{n-k} \quad (n\geqslant k) \tag{7-14}$$

其中 a_1，a_2，…，a_k 是常数且 $a_k\neq 0$ 的递推关系的一种特殊方法[㊀]。所描述的方法成功与否依赖于能否找到与式(7-14)相关的某个多项式方程的根。

递推关系(7-14)可以重写为形式

$$h_n-a_1h_{n-1}-a_2h_{n-2}-\cdots-a_kh_{n-k}=0 \quad (n\geqslant k) \tag{7-15}$$

一旦所谓的*初始值*即 h_0，h_1，h_2，…，h_{k-1}的值能够给出，则满足递推关系（7-15）（或更一般地，满足(7-13)）的数列 $h_0,h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots$就被唯一确定。递推关系(7-15)从 $n=k$ 开始“解开”。首先，忽略初始值并在没有给出初始值的情况下寻找式(7-15)的解。通过考虑那些形成几何序列的解（并通过适当地修改它们）来找到“足够”的解。

例[㊁] 在这个例子中，回忆求解常系数线性齐次微分方程的一种方法。考虑微分方程

$$y''-5y'+6y=0 \tag{7-16}$$

这里 y 是实变量 x 的函数。我们在基本的指数函数 $y=e^{qx}$ 中寻找这个方程的解。令 q 是一个常数。由于 $y'=qe^{qx}$ 和 $y''=q^2e^{qx}$，于是 $y=e^{qx}$是式(7-16)的解当且仅当

$$q^2e^{qx}-5qe^{qx}+6e^{qx}=0$$

由于指数函数 e^{qx}不可能为零，因此可以消去它，得到下列不依赖于 x 的方程：

$$q^2-5q+6=0$$

这个方程有两个根，$q=2$ 和 $q=3$。因此，

$$y=e^{2x} \text{和} y=e^{3x}$$

都是(7-16)的解。由于微分方程是线性的和齐次的，因此

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x} \tag{7-17}$$

对于任意选定的常数 c_1 和 c_2[㊂]也是公式(7-16)的一个解。现在我们引入公式(7-16)的初始条

㊀ 假如 a_k 是0，那么我们就从式（7-14）删除项 a_kh_{n-k}，得到更低阶的递推关系。

㊁ 对于尚未学过微分方程的读者，可以略去这个例子。

㊂ 这可以通过计算 y'和y''并代入到式（7-16）而得到验证。

件。这些条件就是当 $x=0$ 时描述 y 的值以及它的一阶导数的值的条件，它们通过微分方程(7-16)唯一确定 y。设初始条件为

$$y(0)=a \quad y'(0)=b \tag{7-18}$$

其中 a 和 b 是固定的待定的数。此时为使微分方程(7-16)的解(7-17)满足这些初始条件，必须有

$$y(0)=a \qquad c_1+c_2=a$$

$$y'(0)=b \qquad 2c_1+3c_2=b$$

该方程组对每一个选定的 a 和 b 都有唯一的解，即

$$c_1=3a-b \quad c_2=b-2a \tag{7-19}$$

因此，无论什么样的初始条件(7-18)，都可以用式(7-19)选取 c_1 和 c_2，使得函数(7-17)是微分方程（7-16）的解。在这种意义下，(7-17)是微分方程的一般解。带有初始条件的（7-16）的每一个解都可以对适当选择的常数 c_1 和 c_2 写成式(7-17)的形式。 □

线性齐次递推关系的求解，可按照离散函数 q^n 所采用的与指数函数 e^{qx} 的作用类似的方式进行，其中，q^n 只对非负整数n(几何序列)有定义。

定理 7.2.1　令 q 为一非零数。则 $h_n=q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$$h_n-a_1h_{n-1}-a_2h_{n-2}-\cdots-a_kh_{n-k}=0 \ (a_k\neq 0,\ n\geqslant k) \tag{7-20}$$

的解，当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_k=0 \tag{7-21}$$

的一个根。如果多项式方程有 k 个不同的根 q_1，q_2，…，q_k，则

$$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n \tag{7-22}$$

是下述意义下式（7-20）的一般解：无论给定 h_0，h_1，…，h_{k-1} 什么初始值，都存在常数 c_1，c_2，…，c_k，使得式（7-22）是满足递推关系（7-20）和初始条件的唯一的序列。

证明：我们有 $h_n=q^n$ 为式（7-20）的解，当且仅当

$$q^n-a_1q^{n-1}-a_2q^{n-2}-\cdots-a_kq^{n-k}=0$$

对所有的 $n\geqslant k$ 成立。由于假设 $q\neq 0$，可以消去 q^{n-k}。于是，这些方程（对于 $n\geqslant k$）等价于一个方程

$$q^k-a_1q^{k-1}-a_2q^{k-2}-\cdots-a_k=0$$

我们得出 $h_n=q^n$ 是式（7-20）的解，当且仅当 q 是多项式方程（7-21）的根。

由于假设 a_k 异于零，故 0 不是式（7-21）的根。因此，(7-21）有 k 个异于零的根 q_1，$q_2\cdots q_k$。这些根可以是复数。一般来说，q_1，q_2，…，q_k 不必是互异的（方程可以有重根），但是我们现在假设根 q_1，q_2，…，q_k 是互异的。于是

$$h_n = q_1^n, \quad h_n = q_2^n, \quad \cdots, \quad h_n = q_k^n$$

是公式（7-20）的 k 个不同的解。递推关系（7-20）的线性和齐次性意味着对于任意选择的常数 c_1，c_2，…，c_k

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n \tag{7-23}$$

也是式(7-20)的解[1]。现在证明式(7-23)在定理所述的意义下是式(7-20)的一般解。

设初始值

$$h_0 = b_0 \quad h_1 = b_1 \quad \cdots \quad h_{k-1} = b_{k-1}$$

我们能够选择常数 c_1，c_2，…，c_k，使得如在式（7-23）中给出的 h_n 满足这些初始条件吗？等价地说，无论 b_0，b_1，…，b_{k-1}如何选取我们都能够解出下面的方程（7-24）吗？

$$\begin{array}{ll} (n=0) & c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0 \\ (n=1) & c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_k q_k = b_1 \\ (n=2) & c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \cdots + c_k q_k^2 = b_2 \\ \vdots & \\ (n=k-1) & c_1 q_1^{k-1} + c_2 q_2^{k-1} + \cdots + c_k q_k^{k-1} = b_{k-1} \end{array} \tag{7-24}$$

现在要依靠一点儿线性代数。这个方程组的系数矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \cdots & q_k^{k-1} \end{bmatrix} \tag{7-25}$$

式（7-25）中的矩阵是一个重要的矩阵，叫做范德蒙（Vandermonde）矩阵。范德蒙矩阵为可逆矩阵，当且仅当 q_1，q_2，…，q_k 互异。的确，它的行列式等于

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (q_j - q_i)$$

因此，当 q_1，q_2，…，q_k 互异时确实不为零[2]。对互异的假设意味着方程组（7-24）对于 b_0，b_1，…，b_{k-1}的每种选择都有唯一的解。因此，式（7-23）是式（7-20）的一般解，定理证明完成。 □

多项式方程（7-21）叫做递推关系（7-20）的特征方程，而它的 k 个根叫做特征根。根据定理 7.2.1，如果特征根互异，那么式（7-22）就是式（7-20）的一般解。

例 求解满足初始值 $h_0=1$，$h_1=2$ 和 $h_2=0$ 的递推关系

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \qquad (n \geqslant 3)$$

这个递推关系的特征方程为

[1] 这可以通过直接代入来验证。

[2] 这个事实的证明是非平凡的。

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

而它的3个根是1，-1，2。根据定理7.2.1，

$$h_n=c_1 1^n+c_2(-1)^n+c_3 2^n=c_1+c_2(-1)^n+c_3 2^n$$

是一般解。要让常数 c_1，c_2，和 c_3 满足

$$\begin{aligned}
&(n=0) && c_1+c_2+c_3=1\\
&(n=1) && c_1-c_2+2c_3=2\\
&(n=2) && c_1+c_2+4c_3=0
\end{aligned}$$

这个方程组的唯一解为 $c_1=2$，$c_2=-\frac{2}{3}$，$c_3=-\frac{1}{3}$。因此，

$$h_n=2-\frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n$$

为给定递推关系的解。□

例 只由三个字母 a，b，c 组成的长度为 n 的一些单词将在通信信道上传输，满足条件：传输中不得有两个 a 连续出现在任一单词中。确定通信信道允许传输的单词个数。

令 h_n 表示允许传输的长度为 n 的单词个数。我们有 $h_0=1$(空单词)和 $h_1=3$。令 $n\geqslant 2$。如果单词的第一个字母是 b 或 c，那么这个单词就可以有 h_{n-1} 种方法构成。如果单词的第一个字母是 a，那么第二个字母就是 b 和 c。如果这个字母是 b，则该单词可以有 h_{n-2} 种方法构成。如果这个字母是 c，则该单词也可以有 h_{n-2} 种方法构成。于是 h_n 满足递推关系

$$h_n=2h_{n-1}+2h_{n-2}\qquad(n\geqslant 2)$$

特征方程为

$$x^2-2x-2=0$$

而特征方程的根为

$$q_1=1+\sqrt{3}\qquad q_2=1-\sqrt{3}$$

因此，一般解为

$$h_n=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n\qquad(n\geqslant 3)$$

为确定 h_n，我们求 c_1 和 c_2，使得初始值满足 $h_0=1$ 和 $h_1=3$。这导致下述方程组

$$\begin{aligned}
&(n=0) && c_1+c_2=1\\
&(n=1) && c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3
\end{aligned}$$

它有解

$$c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\qquad c_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

因此

$$h_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n \quad (n\geqslant 0)$$

是所要求的解。 □

如果特征方程的根 q_1，q_2，…，q_k 不是互异的，那么

$$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n \tag{7-26}$$

就不是递推关系的一般解。

例　递推关系

$$h_n=4h_{n-1}-4h_{n-2} \quad (n\geqslant 2)$$

有特征方程

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$$

于是，2 是二重特征根。在这种情况下，式（7-26）变成

$$h_n=c_12^n+c_22^n=(c_1+c_2)2^n=c2^n$$

其中 $c=c_1+c_2$ 是一个新常数。因此我们只有一个常数选择以满足两个初始条件，而这么做不是总能行得通的。例如，设初始值为 $h_0=1$ 和 $h_1=3$。为了满足这些初始值，有

$$(n=0) \qquad c=1$$
$$(n=1) \qquad 2c=3$$

但是，这两个方程是矛盾的。因此，$h_n=c2^n$ 不是所给定的递推关系的一般解。 □

如果像前面的例子那样，某个特征根是重根，就要寻找与这个根相联系的另外的解法。这种情况类似于发生在微分方程中的情况。

例　[本例针对那些学过微分方程的读者] 求解

$$y''-4y'+4y=0$$

我们有 $y=e^{qx}$是解，当且仅当

$$q^2e^{qx}-4qe^{qx}+4e^{qx}=0$$

或等价地

$$q^2-4q+4=0$$

该方程的根为 2，2（2 是二重根），并直接导致唯一解 $y=e^{2x}$。但在这种情况下，$y=xe^{2x}$ 也是一个解：

$$y'=2xe^{2x}+e^{2x}$$
$$y''=4xe^{2x}+2e^{2x}+2e^{2x}=4xe^{2x}+4e^{2x}$$
$$y''-4y'+4y=(4xe^{2x}+4e^{2x})-4(2xe^{2x}+e^{2x})+4xe^{2x}=0$$

因此，$y=e^{2x}$和 $y=xe^{2x}$两者都是微分方程的解，从而

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x} \tag{7-27}$$

也是微分方程的解。现在验证公式（7-27）是一般解。设初始条件$y(0)=a$，$y'(0)=b$。为使式(7-27)满足这些初始条件，我们必须有

$$\begin{aligned} y(0)&=a \qquad & c_1&=a \\ y'(0)&=b \qquad & 2c_1+c_2&=b \end{aligned}$$

这些方程有惟一的解 $c_1=a$ 和$c_2=b-2a$。因此，常数 c_1 和 c_2 可以唯一选择以满足任意给定的初始条件，从而我们断言公式（7-27）就是一般解。 □

例 求递推关系

$$h_n-4h_{n-1}+4h_{n-2}=0 \quad (n\geqslant 2)$$

的一般解。

特征方程为

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$$

并有根 2，2。我们知道 $h_n=2^n$ 是这个递推关系的一个解。证明 $h_n=n2^n$ 也是一个解。我们有

$$h_n=n2^n, h_{n-1}=(n-1)2^{n-1}, h_{n-2}=(n-2)2^{n-2}$$

从而

$$\begin{aligned} h_n-4h_{n-1}+4h_{n-2}&=n2^n-4(n-1)2^{n-1}+4(n-2)2^{n-2} \\ &=2^{n-2}(4n-8(n-1)+4(n-2)) \\ &=2^{n-2}(0)=0 \end{aligned}$$

我们现在断言

$$h_n=c_12^n+c_2n2^n \tag{7-28}$$

对常数 c_1 和 c_2 的每种选择都是一个解。现在施加初始条件

$$h_0=a \text{ 和 } h_1=b$$

为使这些条件得以满足，必须有

$$\begin{aligned} (n=0) \qquad & c_1=a \\ (n=1) \qquad & 2c_1+2c_2=b \end{aligned}$$

该方程组有唯一的解$c_1=a$ 和$c_2=(b-2a)/2$ 。因此，常数 c_1 和 c_2 可以唯一选定以满足这些初始条件，由此我们得到结论：式（7-28）是给定的递推关系的一般解。 □

更一般地，如果数 q（很可能是复数）是常系数线性齐次递推关系的特征方程的 s 重根，那么可以证明

$$h_n=q^n,\ h_n=nq^n,\ h_n=n^2q^n,\ \cdots,\ h_n=n^{s-1}q^n$$

中的每一个都是一个解，从而

$$h_n = c_1 q^n + c_2 n q^n + c_3 n^2 q^n + \cdots + c_s n^{s-1} q^n$$

对常数 c_1，c_2，…，c_s 的每种选择也是一个解。

特征方程有多个不同重数的重根的更一般的情况在下一个定理中讨论，我们只叙述而不证明。

定理 7.2.2　令 q_1，q_2，…，q_t 为常系数线性齐次递推关系

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k}, \quad a_k \neq 0 \qquad (n \geqslant k) \tag{7-29}$$

的特征方程的互异的根。此时，如果 q_i 是 s_i 重根，则该递推关系对 q_i 的部分一般解为

$$\begin{aligned} H_n^{(i)} &= c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \cdots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n \\ &= (c_1 + c_2 n + \cdots + c_{s_i} n^{s_i - 1})\ q_i^n \end{aligned}$$

递推关系的一般解则是

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \cdots + H_n^{(t)} \tag{7-30}$$

例　求递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4} \qquad (n \geqslant 4)$$

满足初始值 $h_0 = 1$，$h_1 = 0$，$h_2 = 1$ 和 $h_3 = 2$ 的解。

这个递推关系的特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

它有根 -1，-1，-1，2。于是，部分一般解对应于根 -1 的是

$$H_n^{(1)} = c_1\ (-1)^n + c_2 n\ (-1)^n + c_3 n^2\ (-1)^n$$

而一般解对应于根 2 的部分是

$$H_n^{(2)} = c_4 2^n$$

一般解为

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} = c_1\ (-1)^n + c_2 n\ (-1)^n + c_3 n^2\ (-1)^n + c_4 2^n$$

我们需要确定 c_1，c_2，c_3 和 c_4，使得初始条件成立：

$$\begin{array}{ll} (n=0) & c_1 + c_4 = 1 \\ (n=1) & -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ (n=2) & c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ (n=3) & -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2 \end{array}$$

该方程组的唯一解是 $c_1 = \frac{7}{9}$，$c_2 = -\frac{3}{9}$，$c_3 = 0$，$c_4 = \frac{2}{9}$。因此，解为

$$h_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{3}{9} n (-1)^n + \frac{2}{9} 2^n$$

□

由于求多项式方程所有的根不容易，因此本节讨论的方法在实际应用中受到了限制。

7.3　非齐次递推关系

由于非齐次递推关系依赖于关系中的非齐次项（公式（7-13）中的 b_n 项），因而求解起来更困难，需要一些特殊的技巧。本节我们考虑常系数线性非齐次递推关系的几个例子。第一个例子是个著名的难题。

例（Hanoi 塔问题）　有三个针柱，在一个针柱上穿有大小递增的 n 个圆盘，其中最大的圆盘在底部。现在一次一个地将这些圆盘移到另一个针柱上，规定任意时刻都不允许将大圆盘放到小圆盘的上面。确定将圆盘从一个针柱转移到另一个针柱所必需的移动次数。

令 h_n 是转移 n 个圆盘所需要的移动次数。可以验证 $h_0=0$，$h_1=1$ 和 $h_2=3$。我们能够找出 h_n 所满足的递推关系吗？为了把 n 个盘子转移到另外的针柱上，必须首先把顶上的 $n-1$ 个盘子转移到一个针柱上，把最大的盘子移到空的针柱上，然后再把那 $n-1$ 个盘子转移到穿有最大盘子的针柱上。因此，h_n 满足

$$\begin{aligned} &h_n=2h_{n-1}+1 \qquad (n\geqslant 1)\\ &h_0=0 \end{aligned} \tag{7-31}$$

这是一个 1 阶常系数线性递推关系，但却不是齐次的，因为出现了 1 这一项。为了求出 h_n，迭代式（7-31）：

$$\begin{aligned} h_n &=2h_{n-1}+1\\ &=2(2h_{n-2}+1)+1=2^2h_{n-2}+2+1\\ &=2^2(2h_{n-3}+1)+2+1=2^3h_{n-3}+2^2+2+1\\ &\ \ \vdots\\ &=2^{n-1}(h_0+1)+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\\ &=2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1 \end{aligned}$$

于是数 h_n 是几何序列

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

的部分和，从而满足

$$h_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1 \qquad (n\geqslant 0) \tag{7-32}$$

既然有 h_n 的一个公式，那么它就能够用数学归纳法和递推关系（7-31）很容易地被验证。下面就是如何进行验证的过程。由于 $h_0=0$，则式（7-32）对 $n=0$ 成立。设式（7-32）对 n 成立。证明用 $n+1$ 代替 n 仍然成立：

$$h_{n+1}=2h_n+1=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$$

式（7-32）得证。　□

如果只有两个针柱及 $n>1$ 个盘子，那么不可能在小盘子从不在大盘子下面的条件下把这些盘子从一个针柱移到另一个针柱上。我们看到，使用三个针柱时最小的移动次数为 2^n-1。在 $k\geqslant 4$ 个针柱的情况下，确定将 n 个不同大小的盘子使小盘从不在大盘下面而从一

个针柱移动到另一个针柱所需的最小移动次数的问题尚未解决。$k=4$ 的情形有时候叫做 Brahma 或 Reve 难题，该难题甚至在这种情况下也未解决[⊖]。

下述事实使得我们在前面例子中的成功成为可能：在迭代递推关系后得到可以求出其值的和(此例中为 $2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1$)。一个类似的情况发生在 7-1 节，确定一般位置下，由 n 个互相交叠的圆所构成的区域的个数的情形。然而，这些都是非常简单的情形，并且递推关系的迭代通常并不导致简单的公式。

现在我们阐述求解常系数 1 阶线性递推关系，即形式为

$$h_n = ah_{n-1} + b_n \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-33}$$

的递推关系的方法。

例 解

$$h_n = 3h_{n-1} - 4n \qquad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 2$$

首先考虑对应的齐次递推关系

$$h_n = 3h_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

它的特征方程为

$$x - 3 = 0$$

因此，它有一个特征根 $q=3$，并给出一般解

$$h_n = c3^n \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-34}$$

现在求非齐次递推关系

$$h_n = 3h_{n-1} - 4n \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-35}$$

的一个特解。我们试图找出对于适当的数 r 和 s 的形如

$$h_n = rn + s \tag{7-36}$$

的解。为使式（7-36）满足式（7-35），必须有

$$rn + s = 3(r(n-1)+s) - 4n$$

或等价地

$$rn + s = (3r-4)n + (-3r+3s)$$

使方程两边 n 的系数相等和常数项相等，得到

$$r = 3r - 4 \quad \text{或等价地} \quad 2r = 4$$
$$s = -3r + 3s \quad \text{或等价地} \quad 2s = 3r$$

⊖ 有一个算法（Frame-Stewart 算法）移动 n 个盘子，其移动次数据猜测是最小的。在 P. K. Stockmeyer 所写的 “Variations on the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle”, *Congressus Numerantium*, 102 (1994), 3-12 上可以找到更多的信息。

因此，$r=2$ 和 $s=3$，从而

$$h_n=2n+3 \tag{7-37}$$

满足式（7-35）。现在将齐次关系的一般解（7-34）和非齐次关系的特解（7-37）结合，得到

$$h_n=c3^n+2n+3 \tag{7-38}$$

在式（7-38）中，对常数 c 的每一个选择都有（7-35）的一个解。我们现在试图选择 c，使得初始条件 $h_0=2$ 满足：

$$(n=0) \qquad 2=c\times 3^0+2\times 0+3$$

这就得出 $c=-1$，从而

$$h_n=-3^n+2n+3 \qquad (n\geqslant 0)$$

为原问题的解。 □

上面使用的方法是求解非齐次微分方程方法的离散模拟。它可以总结如下：

i）求齐次关系的一般解。

ii）求非齐次关系的一个特解。

iii）将一般解和特解联合，确定在一般解中出现的常数值，使得联合的解满足初始条件。

主要的困难（除求解特征方程的根困难外）是找出步骤 ii）的特解。对于公式（7-33）的某些非齐次部分 b_n，存在某些尝试的特解类型[⊖]。我们只叙述两种。

i）如果 b_n 是 n 的 k 次多项式，那么寻找也是 n 的 k 次多项式的特解 h_n。因此尝试

a）$h_n=r$（常数）　　如果 $b_n=d$（常数）

b）$h_n=rn+s$　　如果 $b_n=dn+e$

c）$h_n=rn^2+sn+t$　　如果 $b_n=fn^2+dn+e$

ii）如果 b_n 是指数形式，那么寻找的特解也是指数形式。因此尝试

$$h_n=pd^n \text{ 如果 } b_n=d^n$$

前面的例子是上述 i）b）的形式。

例 求解

$$h_n=2h_{n-1}+3^n \qquad (n\geqslant 1)$$
$$h_0=2$$

由于齐次关系 $h_n=2h_{n-1}(n\geqslant 1)$ 只有一个特征根 $q=2$，因此它的一般解是

$$h_n=c2^n \qquad (n\geqslant 1)$$

为求 $h_n=2h_{n-1}+3^n$（$n\geqslant 1$）的一个特解，我们尝试

$$h_n=p3^n$$

⊖ 这些是尝试的解。它们是否是解依赖于特征多项式。

要想 h_n 是解，p 必须满足方程

$$p3^n = 2p3^{n-1} + 3^n$$

消元后，该方程化为

$$3p = 2p + 3 \quad \text{或等价地} \quad p = 3$$

因此

$$h_n = c2^n + 3^{n+1}$$

对常数 c 的每一种选择都是一个解。现在我们要确定 c，使得初始条件 $h_0 = 2$ 满足：

$$(n=0) \qquad c2^0 + 3 = 2$$

这就给出 $c = -1$，问题的解为

$$h_n = -2^n + 3^{n+1} \qquad (n \geqslant 0)$$

□

在式（7-33）中，用上述讨论方法求解递推关系

$$h_n = ah_{n-1} + b_n \qquad (n \geqslant 1)$$

在 $a = 1$ 情形下一般是行不通的。这时，递推关系变成

$$h_n = h_{n-1} + b_n \qquad (n \geqslant 1) \tag{7-39}$$

而迭代产生

$$h_n = h_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

因此解式（7-39）与级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

的求和相同。

例　求解

$$h_n = h_{n-1} + n^3 \qquad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 0$$

迭代后，有

$$h_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

即前 n 个正数的立方和[⊖]。计算得到

$$\begin{aligned}
h_0 &= 0^3 = 0 = 0^2 = 0^2 \\
h_1 &= 0 + 1^3 = 1 = 1^2 = (0+1)^2 \\
h_2 &= 1 + 2^3 = 9 = 3^2 = (0+1+2)^2 \\
h_3 &= 9 + 3^3 = 36 = 6^2 = (0+1+2+3)^2 \\
h_4 &= 36 + 4^3 = 100 = 10^2 = (0+1+2+3+4)^2
\end{aligned}$$

一个合理的假设为

⊖ 我们将在下一章看到对任意 k，如何求前 n 个正整数的 k 次幂的和。

$$h_n = (0+1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

这个公式可通过对 n 的归纳法验证如下。设它对整数 n 成立。证明它对 $n+1$ 也成立。有

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= h_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

这就是用 $n+1$ 代替 n 的公式。因此，根据数学归纳法

$$h_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (n \geqslant 0)$$

成立。 □

例 求解

$$h_n = 3h_{n-1} + 3^n \qquad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 2$$

对应的齐次关系的一般解是

$$h_n = c3^n$$

我们首先尝试

$$h_n = p3^n$$

作为一个特解。代入则得到

$$p3^n = 3p3^{n-1} + 3^n$$

消元后有

$$p = p + 1$$

这是不可能的。因此，尝试

$$h_n = pn3^n$$

作为一个特解。代入并得到

$$pn3^n = 3p(n-1)3^{n-1} + 3^n$$

消元后有 $p=1$。于是 $h_n = n3^n$ 是一个特解，并且

$$h_n = c3^n + n3^n$$

对常数 c 的每一种选择都是一个解。为满足初始条件 $h_0=2$，选择 c，使得

$$(n=0) \qquad c(3^0) + 0(3^0) = 2$$

得出 $c=2$。因此

$$h_n = 2\times 3^n + n3^n = (2+n)3^n$$

是所求的解。 □

7.4 生成函数

在这一节，讨论生成函数的方法，该方法适合求解计数问题。一方面，生成函数可以看成是代数对象，其形式上的处理使得人们可以通过代数手段计算一个问题的可能性的数目。另一方面，生成函数是无限可微分函数的泰勒（Taylor）级数（幂级数展开式）。如果能够找到函数和它的泰勒级数，那么泰勒级数的系数则给出问题的解。我们通常把收敛性问题放在幕后并在一形式基下处理幂级数。

令

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots \tag{7-40}$$

为一无穷数列。它的生成函数定义为无穷级数

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n + \cdots \tag{7-41}$$

在 $g(x)$ 中，x^n 的系数是式（7-40）的第 n 项 h_n，从而，x^n 作为 h_n 的“位置持有者”。有限序列

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_m$$

可以看成是无穷序列

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_m, 0, 0, \cdots$$

在这个序列中，除去有限项外所有其余的项都等于 0。因此，每个有限序列都有一个生成函数

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_mx^m$$

它是一个多项式。

例 其每一项都等于 1 的无穷序列

$$1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

的生成函数是

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

这个生成函数 $g(x)$ 是一个几何级数的和[㊀]，其值为

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \tag{7-42}$$

式（7-42）以非常紧凑的形式将全部由 1 组成的无穷序列的信息浓缩于自身！ □

例 令 m 为一正整数。关于二项式系数

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \cdots, \binom{m}{m}$$

㊀ 见 5.6 节。

的生成函数是

$$g_m(x)=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{m}x^m$$

根据二项式定理可知

$$g_m(x)=(1+x)^m$$

它也以紧凑的形式显示出关于二项式系数的序列信息。 □

例 令 α 是一个实数。根据 5.6 节中的牛顿二项式定理，二项式系数

$$\binom{\alpha}{0},\ \binom{\alpha}{1},\ \binom{\alpha}{2},\ \cdots,\ \binom{\alpha}{n},\ \cdots$$

的无穷序列的生成函数为

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots$$

□

例 令 k 是一个整数，并令序列

$$h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n,\ \cdots$$

使 h_n 等于

$$e_1+e_2+\cdots+e_k=n$$

的非负整数解的个数。从第 3 章得知

$$h_n=\binom{n+k-1}{n}\qquad(n\geqslant 0)$$

生成函数（现在使用求和记号）为

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n$$

由第 5 章知道，这个生成函数是

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^k}$$

回忆这个公式的推导是有启发的。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^k}&=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x}\times\cdots\times\frac{1}{1-x}\qquad(k\text{ 个因子})\\&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)\\&=\Big(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\Big)\Big(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\Big)\cdots\Big(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\Big)\end{aligned}\tag{7-43}$$

在上面记号中，x^{e_1}是第一个因子的典型项，x^{e_2}是第二个因子的典型项，…，x^{e_k}是第 k 个因

子的典型项。将这些典型项乘起来，得到

$$x^{e_1}x^{e_2}\cdots x^{e_k}=x^n \text{ 如果 } e_1+e_2+\cdots+e_k=n \tag{7-44}$$

于是，式（7-43）中 x^n 的系数等于式（7-44）的非负整数解的个数，而这个数是

$$\binom{n+k-1}{n}$$

□

将前面例子中的思想应用到更一般的情况。

例 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$ 是什么样序列的生成函数？

令 $x^{e_1}(0\leqslant e_1\leqslant 5)$，$x^{e_2}(0\leqslant e_2\leqslant 2)$和 $x^{e_3}(0\leqslant e_3\leqslant 4)$分别表示第一个因子，第二个因子和第三个因子中的典型项。假设

$$e_1+e_2+e_3=n$$

相乘后得到

$$x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}=x^n$$

因此，乘积中 x^n 的系数是 $e_1+e_2+e_3=n$ 的整数解的个数 h_n，其中 $0\leqslant e_1\leqslant 5$，$0\leqslant e_2\leqslant 2$，以及 $0\leqslant e_3\leqslant 4$。注意，如果 $n>5+2+4=11$，则 $h_n=0$。 □

例 确定苹果、香蕉、橘子和梨的 n-组合的个数，其中在每个 n-组合中苹果的个数是偶数，香蕉的个数是奇数，橘子的个数在 0 和 4 之间，而且至少要有一个梨。

首先，该问题等价于找出

$$e_1+e_2+e_3+e_4=n$$

的非负整数解的个数 h_n，其中 e_1 是偶数（e_1 为苹果数），e_2 是奇数（e_2 为香蕉数），$0\leqslant e_3\leqslant 4$（$e_3$ 为橘子数），而 $e_4\geqslant 1$（e_4 为梨的个数）。我们为每种类型的水果建立一个因子，其中的指数为那种类型水果的 n-组合中所允许的数：

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$$

第一个因子是“苹果因子”，第二个因子是“香蕉因子”等等。现在注意

$$1+x^2+x^4+\cdots=1+x^2+(x^2)^2+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$x+x^3+x^5+\cdots=x(1+x^2+x^4+\cdots)=\frac{x}{1-x^2}$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-x^5}{1-x}$$

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=x(1+x+x^2+x^3+\cdots)=\frac{x}{1-x}$$

因此

$$g(x)=\frac{1}{1-x^2}\frac{x}{1-x^2}\frac{1-x^5}{1-x}\frac{x}{1-x}=\frac{x^2(1-x^5)}{(1-x^2)^2(1-x)^2}$$

于是对于这个有理函数，泰勒级数中的系数就是对所考虑类型的组合数的计数！ □

下一个例子指出，一个计数问题有时候可以通过生成函数直接求解。

例 确定可以由苹果、香蕉、橘子和梨袋装水果的袋数 h_n，其中在每个袋子中苹果数是偶数，香蕉数是 5 的倍数，橘子数最多是 4 个，而梨的个数为 0 或 1。

题目要求计算苹果、香蕉、橘子和梨的某些 n-组合数。我们确定序列 h_0，h_1，h_2，$\cdots$，h_n，$\cdots$的生成函数。对于每种类型的水果引入一个因子，我们发现

$$\begin{aligned}g(x)&=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\times(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)\\&=\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)\\&=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\end{aligned}$$

我们看到，$h_n=n+1$。注意这个计算数 h_n 的公式是如何仅仅通过代数的处理而得到的。 □

例 确定方程

$$e_1+e_2+\cdots+e_k=n$$

的非负奇整数解 e_1，e_2，$\cdots$，e_k 的个数h_n 的生成函数。

我们有

$$\begin{aligned}g(x)&=(x+x^3+x^5+\cdots)\cdots(x+x^3+x^5+\cdots)\qquad(k\text{ 个因子})\\&=x(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots x(1+x^2+x^4+\cdots)\\&=\frac{x}{1-x^2}\cdots\frac{x}{1-x^2}\\&=\frac{x^k}{(1-x^2)^k}\end{aligned}$$

□

我们知道，方程

$$e_1+e_2+\cdots+e_k=n \tag{7-45}$$

的非负整数解的个数 h_n 是

$$h_n=\binom{n+k-1}{n}$$

并且已经确定

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^k}$$

是它的生成函数。然而，通过把任意正的整系数放在 e_i 前面确定从公式（7-45）得到的方程的非负整数解的个数的直接计算公式要困难得多。不过，应用已经讨论过的想法，解的个数的生成函数却是容易得到的。我们通过下面的例子进行解释。

例 令 h_n 表示方程

$$3e_1+4e_2+2e_3+5e_4=n \tag{7-46}$$

的非负整数解的个数。求 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数 $g(x)$。

通过令

$$f_1=3e_1 \quad f_2=4e_2 \quad f_3=2e_3 \quad f_4=5e_4$$

引入变量的一个变换。于是 h_n 也等于

$$f_1+f_2+f_3+f_4=n$$

的非负整数解的个数，其中 f_1 是 3 的倍数，f_2 是 4 的倍数，f_3 是偶数，f_4 是 5 的倍数。等价地，h_n 是苹果、香蕉、橘子和梨的 n-组合的个数，其中苹果的个数是 3 的倍数，香蕉的个数是 4 的倍数，橘子的个数是偶数而梨的个数是 5 的倍数。因此

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)\times(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots) \\ &= \frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^4}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5} \end{aligned}$$

□

我们用下面的找零钱的例子结束本节。

例 有无限多现成的一分、五分、一角、两角五分和五角的硬币。确定用这些硬币凑成 n 分钱方法数 h_n 的生成函数 $g(x)$。

数 h_n 是方程

$$e_1+5e_2+10e_3+25e_4+50e_5=n$$

的非负整数解的个数。其生成函数为

$$g(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{25}}\frac{1}{1-x^{50}}$$

□

7.5 递归和生成函数

在这一节，我们介绍如何使用生成函数求解常系数线性齐次递推关系。它将提供求解此类递推关系的有别于 7.2 节中给出的方法的另外一种方法。在这种方法中，牛顿二项式定理起着重要的作用。特别地，将用到牛顿二项式定理的下述情况：如果 n 是一个正整数而 r 是一个非零实数，那么

$$(1-rx)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-rx)^k$$

或等价地

$$\frac{1}{(1-rx)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-n}{k}r^kx^k \qquad \left(|x|<\frac{1}{|r|}\right)$$

我们已经在 5.6 节看到

$$\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$$

因此，把前面的公式写成

$$\frac{1}{(1-rx)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^kx^k\quad\left(|x|<\frac{1}{|r|}\right)\tag{7-47}$$

例　确定平方项的序列

$$0,\ 1,\ 4,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$$

的生成函数。

用 $n=2$ 和 $r=1$ 代入公式（7-47）

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

因此

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

微分后得到

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots$$

乘 x 后得出

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots$$

因此，$x(1+x)/(1-x)^3$ 是所要的生成函数。□

例　求解满足初始值 $h_0=1$ 和 $h_1=-2$ 的递推关系

$$h_n=5h_{n-1}-6h_{n-2}\qquad(n\geqslant 2)$$

令 $g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_nx^n+\cdots$ 为 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数。此时，我们有下列方程

$$\begin{aligned}g(x)&=h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_nx^n+\cdots\\-5xg(x)&=\quad -5h_0x-5h_1x^2-\cdots-5h_{n-1}x^n+\cdots\\6x^2g(x)&=6h_0x^2+\cdots+6h_{n-2}x^n+\cdots\end{aligned}$$

将这 3 个方程相加得到

$$\begin{aligned}(1-5x+6x^2)g(x)=&h_0+(h_1-5h_0)x+(h_2-5h_1+6h_0)x^2+\cdots\\&+(h_n-5h_{n-1}+6h_{n-2})x^n+\cdots\end{aligned}$$

由于 $h_n-5h_{n-1}+6h_{n-2}=0$，$(n\geqslant 2)$，以及 $h_0=1$ 和 $h_1=-2$，我们有

$$(1-5x+6x^2)g(x)=h_0+(h_1-5h_0)x=1-7x$$

于是

$$g(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}$$

我们希望能从生成函数 $g(x)$ 这个封闭的公式确定 h_n 的公式。为得到这样的公式，我们使用式（7-47）和部分分式法。观察

$$1-5x+6x^2=(1-2x)(1-3x)$$

对某些常数 c_1 和 c_2 能够写成

$$\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{c_1}{1-2x}+\frac{c_2}{1-3x}$$

用 $1-5x+6x^2$ 乘以方程两边，确定 c_1 和 c_2 并得到

$$1-7x=(1-3x)c_1+(1-2x)c_2$$

或

$$1-7x=(c_1+c_2)+(-3c_1-2c_2)x$$

因此

$$c_1+c_2=1$$

$$-3c_1-2c_2=-7$$

解上述联立方程组，发现 $c_1=5$ 和 $c_2=-4$。于是

$$g(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

由式（7-47）

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$$

和

$$\frac{1}{1-3x}=1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots$$

因此

$$\begin{aligned}g(x)&=5(1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots)-4(1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots)\\&=1+(-2)x+(-15)x^2+\cdots+(5\times 2^n-4\times 3^n)x^n+\cdots\end{aligned}$$

由于这是 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数，我们得到 $h_n=5\times 2^n-4\times 3^n$（$n=0$，1，2，…）。 □

理论上，上面例子所使用的方法可以推广到求解任意的常系数 k 阶线性齐次递推关系。与之相关的生成函数将是 $p(x)/q(x)$ 的形式，其中 $p(x)$ 是一个小于 k 次的多项式，$q(x)$

则是常数项等于 1 的 k 次多项式。为了找出序列项的一般公式，我们首先用部分分式的方法将 $p(x)/q(x)$ 表示为代数分式和的形式

$$\frac{c}{(1-rx)^t}$$

其中 t 是正整数，r 是实数，c 是一个常数。然后利用公式（7-47）求出 $1/(1-rx)^t$ 的幂级数。合并同类项，就得到生成函数的幂级数，由此，可以读出序列的项。

例　令 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…是满足递推关系

$$h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3}=0 \qquad (n\geqslant 3)$$

的数列，其中 $h_0=0$，$h_1=1$，和 $h_2=-1$。求 h_n 的一般公式。

令 $g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_nx^n+\cdots$ 为 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数。相加下述四个方程

$$\begin{aligned}
g(x) &= h_0+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\cdots+h_nx^n+\cdots\\
xg(x) &= h_0x+h_1x^2+h_2x^3+\cdots+h_{n-1}x^n+\cdots\\
-16x^2g(x) &= -16h_0x^2-16h_1x^3-\cdots-16h_{n-2}x^n-\cdots\\
20x^3g(x) &= 20h_0x^3+\cdots+20h_{n-3}x^n+\cdots
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
(1+x-16x^2+20x^3)g(x) &= h_0+(h_1+h_0)x+(h_2+h_1-16h_0)x^2\\
&\quad+(h_3+h_2-16h_1+20h_0)x^3+\cdots\\
&\quad+(h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3})x^n+\cdots
\end{aligned}$$

由于 $h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3}=0$，（$n\geqslant 3$）以及 $h_0=0$，$h_1=1$ 和 $h_2=-1$，于是得到

$$(1+x-16x^2+20x^3)g(x)=x$$

因此

$$g(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$

我们观察到 $(1+x-16x^2+20x^3)=(1-2x)^2(1+5x)$。因此对某些常数 c_1，c_2 和 c_3，

$$\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}=\frac{c_1}{1-2x}+\frac{c_2}{(1-2x)^2}+\frac{c_3}{1+5x}$$

为确定这些常数，用 $1+x-16x^2+20x^3$ 去乘这个方程的两边，得到

$$x=(1-2x)(1+5x)c_1+(1+5x)c_2+(1-2x)^2c_3$$

或等价地

$$x=(c_1+c_2+c_3)+(3c_1+5c_2-4c_3)x+(-10c_1+4c_3)x^2$$

于是

$$c_1+c_2+c_3=0$$
$$3c_1+5c_2-4c_3=1$$
$$-10c_1+4c_3=0$$

解该联立方程组，求出

$$c_1=-\frac{2}{49},\quad c_2=\frac{7}{49},\quad c_3=-\frac{5}{49}$$

因此

$$g(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}=-\frac{2/49}{1-2x}+\frac{7/49}{(1-2x)^2}-\frac{5/49}{1+5x}$$

由公式（7-47）

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k$$
$$\frac{1}{(1-2x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{k}2^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^kx^k$$
$$\frac{1}{1+5x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-5)^kx^k$$

因此

$$g(x)=-\frac{2}{49}\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k\right)+\frac{7}{49}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^kx^k\right)-\frac{5}{49}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-5)^kx^k\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{49}2^k+\frac{7}{49}(k+1)2^k-\frac{5}{49}(-5)^k\right]x^k$$

因为 $g(x)$ 是 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数，所以

$$h_n=-\frac{2}{49}2^n+\frac{7}{49}(n+1)2^n-\frac{5}{49}(-5)^n\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$ □

上面关于 h_n 的公式应该使我们联想到 7.2 节所描述的用特征方程的根所得到的递推关系的解。确实，上述公式指出所给递推关系的特征根为 2，2，－5。下面的讨论阐明两种方法之间的关系。

在前面的例子中，我们已经以

$$g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

的形式表示了生成函数$g(x)$，其中

$$q(x)=1+x-16x^2+20x^3$$

由于递推关系为

$$h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3}=0,(n=3,4,5,\cdots)$$

相关的特征方程就是$r(x)=0$，其中

$$r(x)=x^3+x^2-16x+20$$

如果在$r(x)$中用$1/x$代替x(相当于变量代换$y=1/x$)，得到

$$r(1/x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-16\frac{1}{x}+20$$

或

$$x^3r(1/x)=1+x-16x^2+20x^3=q(x)$$

特征方程$r(x)=0$的根为2,2,−5。由于$r(x)=(x-2)^2(x+5)$,从而得到

$$q(x)=x^3(\frac{1}{x}-2)^2(\frac{1}{x}+5)=(1-2x)^2(1+5x)$$

它与前面的计算结果一致。

上面这些关系在一般情况下也是成立的。令数列h_0，h_1，h_2，…，h_n，…由具有初始值h_0，h_1，…，h_{k-1}的k阶递推关系

$$h_n+a_1h_{n-1}+\cdots+a_kh_{n-k}=0\ (n\geqslant k)$$

确定。回想一下，由于递推关系的阶为k，因此a_k就被假设为异于零。令$g(x)$是序列的生成函数。利用这些例子中给出的方法，存在多项式$p(x)$和$q(x)$，使得

$$g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

其中，$q(x)$的阶为k而$p(x)$的阶小于k。事实上，我们有

$$q(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$$

和

$$p(x)=h_0+(h_1+a_1h_0)x+(h_2+a_1h_1+a_2h_0)x^2+\cdots$$
$$+(h_{k-1}+a_1h_{k-2}+\cdots+a_{k-1}h_0)x^{k-1}$$

这个递推关系的特征方程是$r(x)=0$，其中

$$r(x)=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$$

因此

$$q(x)=x^kr(1/x)$$

这样，如果$r(x)=0$的根是q_1，q_2，…，q_k，那么

$$r(x)=(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_k)$$

和

$$q(x)=(1-q_1x)(1-q_2x)\cdots(1-q_kx)$$

反过来，如果给定$b_0\neq0$的k次多项式

$$q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$$

和小于 k 次的多项式

$$p(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_{k-1}x^{k-1}$$

则使用部分分式法和公式（7-47），可以求出幂级数[⊖] $h_0+h_1x+\cdots+h_nx^n+\cdots$，使得

$$\frac{p(x)}{q(x)}=h_0+h_1x+\cdots+h_nx^n+\cdots$$

可以把上面的方程写成

$$d_0+d_1x+\cdots+d_{k-1}x^{k-1}=(b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k)\times(h_0+h_1x+\cdots+h_nx^n+\cdots)$$

将右边乘出来并比较系数得到

$$\begin{aligned} b_0h_0&=d_0\\ b_0h_1+b_1h_0&=d_1\\ &\vdots\\ b_0h_{k-1}+b_1h_{k-2}+\cdots+b_{k-1}h_0&=d_{k-1}\end{aligned}\tag{7-48}$$

和

$$b_0h_n+b_1h_{n-1}+\cdots+b_kh_{n-k}=0\ (n\geqslant k)\tag{7-49}$$

由于 $b_0\neq0$，方程（7-49）可以写成

$$h_n+\frac{b_1}{b_0}h_{n-1}+\cdots+\frac{b_k}{b_0}h_{n-k}=0\ (n\geqslant k)$$

这是一个常系数线性齐次递推关系，它被 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…所满足。使用条件 $b_0\neq0$，初始值 h_0，h_1，h_2，…，h_{k-1}可以通过求解三角形方程组（7-48）而确定。我们总结成下面的定理。

定理 7.5.1　令

$$h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n,\ \cdots$$

为满足 k 阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n+c_1h_{n-1}+\cdots+c_kh_{n-k}=0,\ c_k\neq0,\ (n\geqslant k)\tag{7-50}$$

的数列。则它的生成函数 $g(x)$ 形如

$$g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\tag{7-51}$$

其中，$q(x)$为具有非零常数项的 k 次多项式，$p(x)$是小于 k 次的多项式。反之，给定这样

⊖ 该幂级数对于所有满足$|x|<t$ 的x 都将收敛到$p(x)/q(x)$,其中 t 是$q(x)=0$ 的根的最小的绝对值。由于我们假设$b_0\neq0$,0 不是 $q(x)=0$ 的根。

的多项式$p(x)$和$q(x)$，则存在序列h_0，h_1，h_2，…，h_n，…，满足形如公式(7-50)的k阶常系数线性齐次递推关系，其生成函数由公式（7-51）给出。

7.6 一个几何的例子

对于平面或空间中的点集K，如果K中的任意两点p和q的连接pq线段上的所有的点都在K内，则K叫做是凸的。平面上的三角形区域，圆形区域，以及矩形区域都是凸的点集。另一方面，图7-2左边的区域不是凸集，因为对图中所示的两点p和q，连接p和q的线段跑到了区域的外面。

图7-2中的区域是*多边形区域*的两个例子，即它们的边界是由有限条称为*边*的线段组成的区域，三角形区域和矩形区域都是多边形区域，但圆形区域则不是。任意的多边形区域至少必须有三条边。图7-2右侧的区域是有六条边的凸多边形区域。

在多边形区域中边和边相交处的点叫做*隅点*（或*顶点*）。*对角线*则是连接两个非邻接顶点的线段。

令K是具有n条边的一个多边形区域。其对角线计数如下。每一个隅点通过对角线连接到其他$n-3$个顶点。这样，对每一顶点处的对角线条数计数并求和，得到$n(n-3)$。由于每一条对角线都有两个顶点，在这个和中，每一条对角线都被计算了两次。因此对角线的

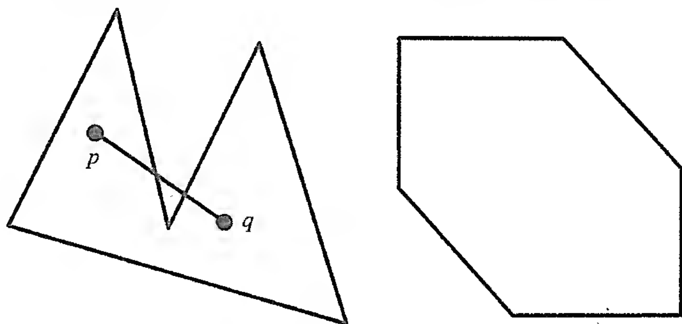


图 7-2

数目为$n(n-3)/2$。直接用下面的方法得到同一个和。连接n个顶点的线段有

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

条。这些线段中有n条是边。其余的就是对角线了。因此，存在

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

条对角线。

设K是凸集。则K的每一条对角线均整个位于K内。这样，K的每一条对角线把K分成具有k条边的一个凸多边形区域和另一个具有$n-k+2$条边的区域，其中$k=3$，4，…，$n-1$。

画出交于K的特定隅点的$n-3$条对角线，使K分成$n-2$个三角形区域。但是，存在把该区域分成三角形区域的另外的方法，即插入$n-3$条对角线，其中没有两条是在K内交叉的，对于$n=8$的情形，如图7-3所示。

在下面的定理中，通过画出在区域内部不相交的对角线，确定一个凸多边形区域分成三角形区域的不同的方法数。为了记法上的方便，我们处理 $n+1$ 条边的一个凸多边形区域，此时，它被 $n-2$ 条对角线分成 $n-1$ 个三角形区域。

定理 7.6.1　通过画出在区域内部不相交的对角线将具有 $n+1$ 条边的凸多边形区域分成三角形区域，令 h_n 表示分成三角形区域的方法数。定义 $h_1=1$。则 h_n 满足递推关系

$$h_n=h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\cdots+h_{n-1}h_1=\sum_{k=1}^{n-1}h_kh_{n-k}\qquad(n\geqslant2)\tag{7-52}$$

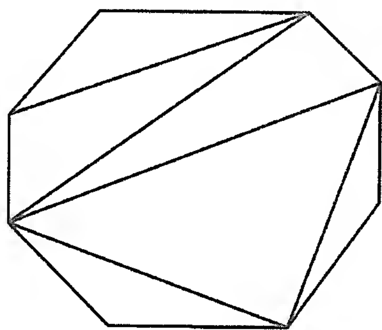
该递推关系的解为

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\tag{7-53}$$

证明：我们已经定义 $h_1=1$，并且把一条线段看作是具有两条边没有内部的一个多边形区域。由于三角形区域没有对角线而且也不能进一步再分，我们有 $h_2=1$。因为

$$\sum_{k=1}^{2-1}h_kh_{2-k}=\sum_{k=1}^{1}h_kh_{2-k}=h_1h_1=1$$

所以递推关系（7-52）对于 $n=2$ 成立[⊖]。现在令 $n\geqslant3$。考虑具有 $n+1\geqslant4$ 条边的凸多边形区域 K。选定 K 的一边并把它叫做基边。在将 K 分成三角形区域的每一种分法中基边都是这些三角形区域 T 中的一个三角形区域的边，并且这个三角形区域将 K 的其余部分分成具有 $k+1$ 条边的多边形区域 K_1 和具有 $n-k+1$ 条边的多边形区域 K_2，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$（见图 7-4）。


图　7-3

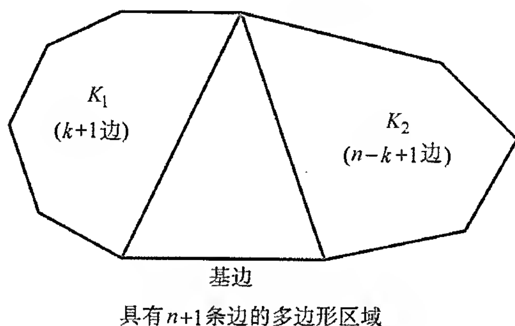


图　7-4

通过分别插入 K_1 和 K_2 的对角线，将 K 进一步分成三角形区域，这些对角线在区域内部不相交。由于 K_1 有 $k+1$ 条边，因此，K_1 可以用 h_k 种方法分成三角形区域。由于 K_2 有 $n-k+1$ 条边，因此，K_2 可以用 h_{n-k}种方法分成三角形区域。于是，对于含有基边的三角形区域 T 的特定的选择，存在通过在内部不相交的对角线把区域 K 分成三角形区域的 h_kh_{n-k}种方法。因此总共有

$$h_n=\sum_{k=1}^{n-1}h_kh_{n-k}$$

⊖ 这就是我们为什么定义 $h_1=1$。

种方法以这种方式将 K 分成三角形区域。这就建立了递推关系(7-52)。

现在转到具有初始条件 $h_1=1$ 的式(7-52)的求解。这个递推关系不是线性的。不仅如此，h_n 并不只依赖于其前面固定个数的值，而是依赖于其前面所有的值 h_1，h_2，…，h_{n-1}。这样一来，求解递推关系的那些方法就都用不上了。令

$$g(x)=h_1x+h_2x^2+\cdots+h_nx^n+\cdots$$

是序列 h_1，h_2，h_3，…，h_n，…的生成函数。将 $g(x)$ 自乘，我们发现

$$(g(x))^2=h_1^2x^2+(h_1h_2+h_2h_1)x^3+(h_1h_3+h_2h_2+h_3h_1)x^4+\cdots+(h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\cdots+h_{n-1}h_1)x^n+\cdots$$

利用公式（7-52）和 $h_1=h_2=1$ 的事实，得到

$$\begin{aligned}(g(x))^2&=h_1^2x^2+h_3x^3+h_4x^4+\cdots+h_nx^n+\cdots\\&=h_2x^2+h_3x^3+h_4x^4+\cdots+h_nx^n+\cdots\\&=g(x)-h_1x=g(x)-x\end{aligned}$$

于是，$g(x)$满足方程

$$(g(x))^2-g(x)+x=0$$

这是一个 $g(x)$ 的二次方程，根据二次公式[㊀] $g(x)=g_1(x)$或 $g(x)=g_2(x)$，其中

$$g_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \text{和 } g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由$g(x)$的定义可知$g(0)=0$。由于$g_1(0)=1$ 和 $g_2(0)=0$，因此有结论

$$g(x)=g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}$$

根据牛顿二项式定理（特别地，见 5.6 节末尾所做的计算）

$$(1+z)^{1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\times 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}z^n \qquad (|z|<1)$$

如果用 $-4x$ 代替 z，则得到

$$\begin{aligned}(1-4x)^{1/2}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\times 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n4^nx^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n\\&=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n \qquad \left(|x|<\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

因此

㊀ 但是忽略某些细节。

$$g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n \tag{7-54}$$

从而

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\qquad(n\geqslant 1)$$

□

在前面定理中的这些数

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

就是 Catalan 数，我们将在第 8 章对这些数进行深入的讨论。

7.7　指数生成函数

我们在 7.5 节已经用单项式的集合

$$\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^k,\ \cdots\}$$

定义了数列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的生成函数。这特别适合某些计数序列，尤其是涉及二项式系数的序列，这是因为牛顿二项式定理形式的缘故。然而，对于其项可计数排列的那些序列来说，考虑关于单项式

$$\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2!},\ \cdots,\ \frac{x^n}{n!},\ \cdots\right\} \tag{7-55}$$

的生成函数更为有用。这些单项式出现在 e^x 的泰勒级数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{7-56}$$

中。关于单项式（7-55）所考虑的生成函数叫做指数生成函数[⊖]。序列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\frac{x^n}{n!}=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+h_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

例　令 n 为一正整数。确定数列

$$P(n,0),P(n,1),P(n,2),\cdots,P(n,n)$$

的指数生成函数，其中 $P(n,k)$ 表示 n-元素集的 k-排列的个数，对于 $k=0,1,\cdots,n$，其值为 $n!/(n-k)!$。指数生成函数为

$$\begin{aligned}g^{(e)}(x)&=P(n,0)+P(n,1)x+P(n,2)\frac{x^2}{2!}+\cdots+P(n,n)\frac{x^n}{n!}\\&=1+nx+\frac{n!}{2!\ (n-2)!}x^2+\cdots+\frac{n!}{n!\ 0!}x^n\end{aligned}$$

⊖ 我们保留使用单项式 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$ 时的术语“生成函数”或“常规生成函数”。

$$=(1+x)^n$$

因此，$(1+x)^n$ 既是序列$P(n,0),P(n,1),\cdots,P(n,n)$的指数生成函数又是序列（如我们在7.5节已经看到的）

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \cdots,\ \binom{n}{n}$$

的常规生成函数。 □

例　序列

$$1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

更一般地，如果 a 是一个实数，那么序列

$$a^0=1,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$$

的指数生成函数是

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}=e^{ax}$$

由3.4节可知，对于正整数 k，k^n 表示每一种都有无穷重数的k 种不同类型物体的多重集的n-排列的个数。因此，该计数序列的这个指数函数为 e^{kx}。 □

对于每一种都有有限重数的 k 种不同类型物体的多重集S，下列定理确定了 S 的n-排列数的指数生成函数。这是3.4节末尾所允诺的指数生成函数形式的解。我们定义多重集的0-排列的个数等于1。

定理7.7.1　令S为多重集$\{n_1.a_1,n_2.a_2,\cdots,n_k.a_k\}$，其中$n_1,n_2,\cdots,n_k$均为非负整数。令$h_n$是$S$的$n$-排列数。则序列$h_0,h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots$的指数生成函数$g^{(e)}(x)$由

$$g^{(e)}(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x) \tag{7-57}$$

给定，其中，对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \tag{7-58}$$

证明：令

$$g^{(e)}(x)=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+h_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

是关于 $h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n,\ \cdots$的指数生成函数。注意，对于 $n>n_1+n_2+\cdots+n_k$ 有$h_n=0$,因此,$g^{(e)}(x)$是一个有限和。由式（7-58）看到，式（7-57）被乘开后得到形如

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!}=\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!} \tag{7-59}$$

的项，其中

$$0\leqslant m_1\leqslant n_1,\ 0\leqslant m_2\leqslant n_2,\ \cdots,\ 0\leqslant m_k\leqslant n_k$$

令 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$。此时式（7-59）中的表达式可以写成

$$\frac{x^n}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!}=\frac{n!}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!}\frac{x^n}{n!}$$

因此，式（7-57）中 $x^n/n!$ 的系数为

$$\sum\frac{n!}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!} \tag{7-60}$$

其中的求和扩展到满足 $0\leqslant m_1\leqslant n_1$，$0\leqslant m_2\leqslant n_2$，…，$0\leqslant m_k\leqslant n_k$ 及 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ 的所有整数 m_1，m_2，…，m_k。但是，从 3.4 节我们知道在式（7-60）中的项

$$\frac{n!}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!}$$

等于 S 的子多重集 $\{m_1\cdot e_1, m_2\cdot e_2,\cdots,m_k\cdot e_k\}$ 的 n-排列(或简称排列)的个数。由于 S 的 n-排列的个数等于具有 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ 的所有的子多重集排列个数，因此 S 的 n-排列数 h_n 等于式（7-60）中的数。由于这也是乘积（7-57）中 $x^n/n!$ 项的系数，最后得到结论

$$g^{(e)}(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x)$$

□

应用与上面定理的证明中所使用的相同的推理，我们能够计算带有附加限制的多重集 n-排列数计数的数列的指数生成函数。如果在公式(7-58)中用

$$f_\infty(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=e^x \tag{7-61}$$

定义 $f_\infty(x)$，那么，当重复数 n_1，n_2，…，n_k 中某些等于∞时，定理仍然成立。

例 令 h_n 表示数字 1，2 或 3 组成的 n-位数字数的个数，其中 1 的个数是偶数，2 的个数至少是 3，3 的个数最多是 4。确定结果数列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的指数生成函数 $g^{(e)}(x)$。

函数 $g^{(e)}(x)$ 对这三个数字 1，2 和 3 中的每一个都有一个因子。对这些数字的限制在因子中的反映如下。$g^{(e)}(x)$ 对应数字 1 的因子是

$$h_1(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

因为 1 的个数是偶数。$g^{(e)}(x)$ 对应数字 2 和 3 的因子分别是

$$h_2(x)=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

和

$$h_3(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

指数生成函数是这三个因子的乘积

$$g^{(e)}(x)=h_1(x)h_2(x)h_3(x)$$

□

指数生成函数有时可以用来求计数问题的显式公式。我们用三个例子说明之。

例　如果要把棋盘上偶数个方格涂成红色，试确定用红色、白色和蓝色对 1 行 n 列棋盘的方格涂色的方法数。

令 h_n 表示这样的着色方法数，定义 h_0 为 1。此时，h_n 等于三种颜色（红、白和蓝）的多重集的 n-排列数，其中每一种颜色都有无穷重复数，且红色出现偶数次。因此，h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的指数生成函数是红、白和蓝因子的乘积：

$$\begin{aligned}g^{(e)}&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^xe^x=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+1)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

因此，$h_n=(3^n+1)/2$。

该解的形式使我们想到，h_n 可能满足 2 阶线性齐次递推关系，它的特征方程的根为 3 和 1。我们指出，作为这个问题的另一种解法，h_n 满足齐次递推关系。我们有 $h_1=2$，令 $n\geqslant 2$。如果第一个方格涂成白色或蓝色，那么就有 h_{n-1}种方法完成着色。如果第一个方格涂成红色，那么在剩下的 $n-1$ 个方格中必然有奇数个红方格；因此，有 $3^{n-1}-h_{n-1}$种方法可完成这种情形下的着色。因此，h_n 满足递推关系

$$h_n=2h_{n-1}+\ (3^{n-1}-h_{n-1})\ =h_{n-1}+3^{n-1}\quad(n\geqslant 2)$$

如果我们迭代该递推关系 $h_n=h_{n-1}+3^{n-1}$并利用 $h_1=2$，那么可同样求出 $h_n=\ (3^n+1)\ /2$。 □

例　确定每位数字都是奇数的 n 位数的个数 h_n，其中 1 和 3 出现偶数次。

令 $h_0=1$。数 h_n 等于多重集$S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 3,\infty\cdot 5,\infty\cdot 7,\infty\cdot 9\}$的 n-排列的个数，其中 1 和 3 出现偶数次。h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的指数生成函数是五个因子的乘积，它们对应五个可允许的数字：

$$\begin{aligned}g^{(e)}(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\\&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2e^{3x}\\&=\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^2e^x\\&=\frac{1}{4}\ (e^{4x}+2e^{2x}+1)\ e^x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}5^{n}\frac{x^{n}}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}3^{n}\frac{x^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5^{n}+2\times3^{n}+1}{4}\right)\frac{x^{n}}{n!}$$

因此

$$h_n=\frac{5^{n}+2\times3^{n}+1}{4}\qquad(n\geqslant0)$$

□

例 确定用红色、白色和蓝色对 1 行 n 列棋盘的方格涂色的方法数 h_n，其中红方格的个数是偶数并且至少有一个蓝方格。

指数生成函数 $g^{(e)}(x)$ 为

$$g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}e^{x}(e^{x}-1)$$
$$=\frac{e^{3x}-e^{2x}+e^{x}-1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}-2^{n}+1}{2}\frac{x^{n}}{n!}$$

因此

$$h_n=\frac{3^{n}-2^{n}+1}{2}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

及

$$h_0=0$$

注意，h_0 应该是 0。一个 1 行 0 列的棋盘为空，没有方格被着色，因此，我们不能满足蓝色方格的个数至少是 1 的条件。

□

7.8 练习题

1. 设 f_0，f_1，…，f_n，…表示斐波那契序列。通过用小的 n 值计算下列每一个表达式的值，猜测一般公式，然后用数学归纳法和斐波那契递归证明之。

   ⅰ) $f_1+f_3+\cdots+f_{2n-1}$

   ⅱ) $f_0+f_2+\cdots+f_{2n}$

   ⅲ) $f_0-f_1+f_2-\cdots+(-1)^{n}f_n$

   ⅳ) $f_0^2+f_1^2+\cdots+f_n^2$

2. 证明第 n 个斐波那契数 f_n 是最接近数

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

的整数。

3. 证明下列关于斐波那契数的结论

ⅰ）f_n 是偶数当且仅当 n 可被 3 整数。

ⅱ）f_n 能被 3 整除当且仅当 n 可被 4 整除。

ⅲ）f_n 能被 4 整除当且仅当 n 可被 6 整除。

4. 证明斐波那契序列是递推关系

$$a_n = 5a_{n-4} + 3a_{n-5} \quad (n \geqslant 5)$$

的解，其中，$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$。然后利用这个公式证明斐波那契数满足条件：f_n 可被 5 整除当且仅当 n 可被 5 整除。

5. 通过考察斐波那契序列，做出当 f_n 可被 7 整除时的猜测，然后证明你的猜测。

*6. 设 m 和 n 为正整数。证明如果 m 能被 n 整除，则 f_m 能被 f_n 整除。

7. 令 m 和 n 为正整数，它们的最大公因数是 d。证明斐波那契数 f_m 和 f_n 的最大公因数是斐波那契数 f_d。

8. 考虑 1 行 n 列棋盘。假设用红和蓝两种颜色之一为棋盘的每一个方格着色。令 h_n 是使得没有两个被涂成红色的方格相邻的着色方法数。求出并验证 h_n 所满足的递推关系。然后得出 h_n 的公式。

9. 令 h_n 等于 1 行 n 列棋盘的方格能够用红、白和蓝色着色并使得没有两个涂成红色的方格相邻的着色方法数。求出并验证 h_n 所满足的递推关系。然后找出 h_n 的公式。

10. 在斐波那契的问题中，假设在年初将两对兔子放进围栏中。求一年后围栏中兔子的对数。更一般地，求出 n 个月后围栏中兔子的对数。

11. Lucas 数 l_0，l_1，l_2，…，l_n，…是按照与定义斐波那契数相同的递推关系定义的，不过初始条件不同：

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}\ (n \geqslant 2),\ l_0 = 2,\ l_1 = 1$$

证明

ⅰ）$l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$，$n \geqslant 1$。

ⅱ）$l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$，$n \geqslant 0$。

12. 求解初始值 $h_0=0$ 和 $h_1=1$ 的递推关系 $h_n = 4h_{n-2}$，$(n \geqslant 2)$。

13. 求解初始值 $h_0=2$ 的递推关系 $h_n = (n+2)\ h_{n-1}$，$(n \geqslant 1)$。

14. 求解初始值 $h_0=0, h_1=1$ 和 $h_2=2$ 的递推关系 $h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}, (n \geqslant 3)$。

15. 求解初始值 $h_0=-1$ 和 $h_1=0$ 的递推关系 $h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2}$，$(n \geqslant 2)$。

16. 求解初始值 $h_0=1$，$h_1=0$ 和 $h_2=0$ 的递推关系 $h_n = 3h_{n-2} - 2h_{n-3}$，$(n \geqslant 3)$。

17. 求解初始值 $h_0=0$，$h_1=1$，$h_2=1$ 和 $h_3=2$ 的递推关系 $h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} - 4h_{n-3} + 8h_{n-4}$，$(n \geqslant 4)$。

18. 确定长为 n、不包含两个相连的 0 或相连的 1 的三进制串（即由一些 0、1 和 2 组成的串）的个数 a_n 的递推关系，然后求出 a_n 的公式。

19. 通过考察公式的前几个值求解下列递推关系，然后用归纳法证明你所猜测的公式。

ⅰ）$h_n = 3h_{n-1}\ (n \geqslant 1)$；$h_0 = 1$

ⅱ）$h_n = h_{n-1} - n + 3$（$n \geqslant 1$）；$h_0 = 2$

ⅲ）$h_n = -h_{n-1} + 1$（$n \geqslant 1$）；$h_0 = 0$

ⅳ）$h_n = -h_{n-1} + 2$（$n \geqslant 1$）；$h_0 = 1$

ⅴ）$h_n = 2h_{n-1} + 1$（$n \geqslant 1$）；$h_0 = 1$

20. 令 h_n 表示用单牌和多米诺牌以下述方式完美覆盖一幅 1 行 n 列棋盘的方法数：任何两张多米诺牌都不相邻。找出 h_n 所满足的递推关系和初始条件，但不对其求解。

21. 令 n 等于由一些 0、1 和 2 组成的长为 n 的三进制串的个数，但其中的 0 和 1 从不相邻(即 01 和 10 从不出现)。证明 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$（$n \geqslant 2$），其中 $a_0 = 1$ 且 $a_1 = 3$，然后求出 a_n 的公式。

*22. 设在一圆上选出等间隔的 $2n$ 个点。令 h_n 表示将这些点连成对使得所连线段不相交的方法数。建立 h_n 的递推关系。

23. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 4h_{n-1} + 3 \times 2^n \quad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 1$$

24. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 3h_{n-1} - 2 \quad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 1$$

25. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 2h_{n-1} + n \quad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 1$$

26. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2} + 2n \quad (n \geqslant 2)$$
$$h_0 = 1$$
$$h_1 = 0$$

27. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} + 3n + 1 \quad (n \geqslant 2)$$
$$h_0 = 1$$
$$h_1 = 2$$

28. 确定下列每个序列的生成函数

ⅰ）$c^0 = 1, c, c^2, \cdots, c^n, \cdots$

ⅱ）$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

ⅲ）$\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \cdots, (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \cdots$（$\alpha$ 是一个实数）

ⅳ）$1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{n!}, \cdots$

ⅴ)$1, -\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, (-1)^n \frac{1}{n!}, \cdots$

29. 令 S 为多重集 $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$。确定序列 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 的生成函数，其中 h_n 为 S 具有如下附加限制的 n-组合数：
   ⅰ)每个 e_i 出现奇数次。
   ⅱ)每个 e_i 出现 3 的倍数次。
   ⅲ)元素 e_1 不出现，而 e_2 出现至多一次。
   ⅳ)元素 e_i 出现 1，3 或 11 次，而元素 e_2 出现 2，4 或 5 次。
   ⅴ)每个 e_i 出现至少 10 次。
30. 通过用 7.5 节所描述的生成函数的方法求解下列递推关系
   ⅰ) $h_n = 4h_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$; $h_0 = 0, h_1 = 1$
   ⅱ)$h_n = h_{n-1} + h_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$; $h_0 = 1, h_1 = 3$
   ⅲ)$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3} \quad (n \geqslant 3)$; $h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 2$
   ⅳ)$h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$; $h_0 = -1, h_1 = 0$
   ⅴ)$h_n = 3h_{n-2} - 2h_{n-3} \quad (n \geqslant 3)$; $h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 0$
   ⅵ)$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} - 4h_{n-3} + 8h_{n-4} \quad (n \geqslant 4)$; $h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2$
31. 求解非齐次递推关系

$$h_n = 4h_{n-1} + 4^n \quad (n \geqslant 1)$$
$$h_0 = 3$$

32. 确定如下立方序列的生成函数

$$0, 1, 8, \cdots, n^3, \cdots$$

33. 令 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 是由

$$h_n = n^3 \quad (n \geqslant 0)$$

   定义的序列。证明 $h_n = h_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ 是该序列的递推关系。
34. 将导致下列生成函数的组合学问题公式化：

$$(1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

35. 确定苹果、橘子、香蕉和梨的袋装水果的袋数 h_n 的生成函数，其中各袋要有偶数个苹果，最多两个橘子，3 的倍数个香蕉，最多一个梨。然后从该生成函数求出 h_n 的公式。
36. 确定

$$2e_1 + 5e_2 + e_3 + 7e_4 = n$$

   的非负整数解的个数 h_n 的生成函数。
37. 令 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 是由 $h_n = \binom{n}{2}$ 定义的序列（$n \geqslant 0$）。确定该序列的生成函数。

38. 令 h_0, h_1, h_2, …, h_n, …是由 $h_n=\binom{n}{3}$ 定义的序列（$n\geqslant 0$）。确定该序列的生成函数。

*39. 令 h_n 表示具有 $n+2$ 条边的凸多边形区域被其对角线所分成的区域数，假设没有三条对角线共点。定义 $h_0=0$。证明

$$h_n=h_{n-1}+\binom{n+1}{3}+n \quad (n\geqslant 1)$$

然后确定生成函数并由此得出 h_n 的公式。

40. 确定阶乘的序列 0!，1!，2!，3!，…，$n!$，…的指数生成函数。

41. 设 α 为一实数。令序列 h_0, h_1, h_2, …, h_n, …由 $h_0=1$ 及 $h_n=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ ($n\geqslant 1$) 定义。确定该序列的指数生成函数。

42. 令 S 表示多重集 $\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_k\}$。确定序列 $h_0,h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots$ 的指数生成函数，其中 $h_0=1$ 并对 $n\geqslant 1$ 有：

   i) h_n 等于 S 的 n-排列数，其中每个物体出现奇数次。

   ii) h_n 等于 S 的 n-排列数，其中每个物体至少出现 4 次。

   iii) h_n 等于 S 的 n-排列数，其中 e_1 至少出现 1 次，e_2 至少出现 2 次，…，e_k 至少出现 k 次。

   iv) h_n 等于 S 的 n-排列数，其中 e_1 至多出现 1 次，e_2 至多出现 2 次，…，e_k 至多出现 k 次。

43. 令 h_n 表示用红、白、蓝和绿以下述方式给 1 行 n 列棋盘上的方格涂色的方法数：涂成红色方格的数目为偶数，涂成白色方格的数目为奇数。确定序列 h_0, h_1, …, h_n, …的指数生成函数，然后找出 h_n 的简单公式。

44. 如果偶数个方格被涂成红色以及偶数个方格被涂成绿色，试确定用红、蓝、绿和橘黄为 1 行 n 列棋盘的方格着色的方法数。

45. 确定用所有的奇数数字组成的 n 位数的个数，其中 1 和 3 每个都出现非零偶数次。

46. 确定所有的数字至少是 4 的 n 位数的个数，其中，4 和 6 每个都出现偶数次，5 和 7 每个至少出现一次，但对于数字 8 和 9 则没有限制。

47. 我们已经用指数生成函数证明：每一位是奇数、数字 1 和 3 出现偶数次的 n 位数字数的个数 h_n 满足公式

$$h_n=\frac{5^n+2\times 3^n+1}{4} \quad (n\geqslant 0)$$

通过找出 h_n 所满足的递推关系并求解这个递推关系来得出这个公式的另一种推导方法。

48. 我们已经用指数生成函数证明：用红、白、蓝给 $1\times n$ 棋盘上的方格着色的方法数 h_n 满足

$$h_n=\frac{3^n-2^n+1}{2} \quad (n\geqslant 1),\ h_0=0$$

其中红方格的个数是偶数；蓝方格至少有 1 个。通过找出 h_n 所满足的递推关系并求解这个递推关系来得出这个公式的另一种推导方法。

$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$

第 8 章　特殊计数序列

我们已经在上一章讨论了几个特殊的计数序列。对于 n 个元素集合的排列的计数序列为

$$0!, 1!, 2!, \cdots, n!, \cdots$$

而对于 n 个元素集合的错位排列的计数序列为

$$D_0, D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$$

其中，D_n 的值已经在定理 6.3.1 中计算过。此外，我们还考察了斐波那契序列

$$f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

并在定理 7.1.1 中给出了 f_n 的公式。在这一章主要研究四个著名并且重要的计数序列，即 Catalan 数序列、第一类和第二类 Stirling 数序列以及正整数 n 的分析数的序列。

8.1　Catalan 数

Catalan 序列[⊖]即序列

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$$

其中

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

为第 n 个 Catalan 数。前几个 Catalan 数为

$$\begin{array}{ll} C_0 = 1 & C_5 = 42 \\ C_1 = 1 & C_6 = 132 \\ C_2 = 2 & C_7 = 429 \\ C_3 = 5 & C_8 = 1430 \\ C_4 = 14 & C_9 = 4862 \end{array}$$

Catalan 数

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

是在 7.6 节作为在内部插入不相交的对角线，将 $n+1$ 条边的凸多边形区域分割为三角形的方法数而出现的。Catalan 数出现在表面看来似乎无关的几个计数问题中，我们在本节讨论其中的某些计数问题。

⊖ 取名于 Eugène Catalan（1814—1894）。

定理 8.1.1 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 构成的 $2n$ 项

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2n} \tag{8-1}$$

其部分和满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{8-2}$$

的数列的个数等于第 n 个 Catalan 数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0)$$

证明： 如果 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的序列(8-1)满足式(8-2)，则称其为可接受的，否则为不可接受的。令 A_n 为 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的可接受序列的个数，并令 U_n 表示不可接受序列的个数。由于这样的序列可以看成是具有一种类型($+1$ 型)的 n 个元素和另一种类型(-1 型)的 n 个元素的两种不同类型元素的排列，于是，n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的序列的总个数为

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\ n!}$$

因此

$$A_n + U_n = \binom{2n}{n}$$

首先计算 U_n，然后再从 $\binom{2n}{n}$ 中减去 U_n 而算出 A_n。

考虑 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的不可接受序列(8-1)。因为序列是不可接受的，所以存在一个最小的 k 使得部分和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

是负的。因为 k 是最小的，所以在 a_k 前面存在相等个数的 $+1$ 和 -1，并且我们有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = 0$$

和

$$a_k = -1$$

特别地，k 是一个奇整数。现在把前 k 项中每一项的符号都反过来，即对 $i = 1, 2, \cdots, k$ 用 $-a_i$ 代替 a_i 并保持剩下的项不变。结果序列

$$a_1', a_2', \cdots, a_{2n}'$$

是有 $(n+1)$ 个 $+1$ 和 $(n-1)$ 个 -1 的序列。这个过程是可逆的：给定 $(n+1)$ 个 $+1$ 和 $(n-1)$ 个 -1 的序列，则存在当 $+1$ 的个数超过 -1 的个数的时候的第一个实例(因为 $+1$ 的个数多于 -1 的个数)。把 $+1$ 和 -1 符号倒过来，结果就得到 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的不可接受的序列。这样，有多少 $(n+1)$ 个 $+1$ 和 $(n-1)$ 个 -1 的序列就有多少个不可接受序列。具有 $(n+1)$ 个 $+1$ 和 $(n-1)$ 个 -1 的序列的个数是具有一种类型的 $n+1$ 个元素和另一种类型的

$n-1$ 个元素的两种类型的元素排列数

$$\frac{(2n)!}{(n+1)!\ (n-1)!}$$

因此

$$U_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!\ (n-1)!}$$

从而

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{(2n)!}{n!\ n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!\ (n-1)!}\\&=\frac{(2n)!}{n!\ (n-1)!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{(2n)!}{n!\ (n-1)!}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

□

对定理 8.1.1 有许多不同的解释。我们在下面的一些例子中讨论其中的两个。

例 有 $2n$ 个人排成一行进入剧场。入场费 50 美分[㊀]。$2n$ 个人中的 n 个人有 50 分一个的分币，n 个人有一美元的纸币[㊁]。剧院售票处相当草率地用一个空的现金收录机开始售票。有多少种列队方法使得只要有 1 美元的人买票，售票处就有 50 分币找零?

如果把这些人看成是“不可区分”的并把 50 分币用 +1 标识而 1 美元钞票用 −1 标识，那么答案就是定理 8.1.1 中所定义的可接受序列数

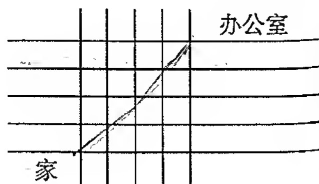
$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

如果这些人被看成是“可区分”的，则答案为

$$(n!)(n!)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n+1}$$

因为对于 n 个 50 分币和 n 个 1 美元纸币构成的每一个序列，存在持 50 分币的人的 $n!$ 种顺序及持 1 美元纸币人的 $n!$ 种顺序。 □

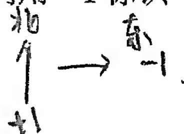
例 一位大城市的律师在她住所以北 n 个街区和以东 n 个街区处工作。每天她走 $2n$ 个街区去上班（见下图 $n=4$ 的图)。如果她从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么，有多少条可能的道路?



㊀ 这个问题反映出题目的年代!

㊁ 为使这个问题更准确地反映现实，或许让剧场收费 5 美元，并有 n 个人持 5 美元纸币，n 个人持 10 美元纸币更好。

每条可接受的路线不是在对角线的上面就是在对角线的下面。我们求出对角线上面的路线数，并将其乘以 2。每条路线都是向北 n 个街区和向东 n 个街区的序列。我们用 $+1$ 标识北，用 -1 标识东。于是，每条路线对应一个 n 个 $+1$ 和 n 个 -1 的序列



$$a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$$

为了使路线不落到对角线的下面，必须有

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant 0 \qquad (k=1, \cdots, 2n)$$

因此，由定理 8.1.1 可知，在对角线上面的可接受路线数等于第 n 个 Catalan 数，可接受路线的总数为

$$2C_n = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$$ □

下面证明 Catalan 数满足 1 阶齐次递推关系（但是有一个非常数的系数）。我们有

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

和

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\ (n-1)!}$$

将两式相除，得到

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$$

因此，Catalan 序列由下列的递推关系和初始条件确定：

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$
$$C_0 = 1 \tag{8-3}$$

前面已经注意到 $C_9 = 4862$。从递推关系(8-3)导出

$$C_{10} = \frac{38}{11} C_9 = \frac{38}{11}(4862) = 16\ 796$$

现在定义一个新的数列

$$C_1^*, C_2^*, \cdots, C_n^*, \cdots$$

为了提到它们时有个名字称呼起来方便，我们把它们叫做拟 - Catalan 数。令

$$C_n^* = n! C_{n-1} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

我们有

$$C_1^* = 1!\ (1) = 1$$

并用 $n-1$ 代替 n，由式(8-3)得到

$$\begin{aligned} C_n^* &= n!C_{n-1} \\ &= n!\ \frac{4n-6}{n}C_{n-2} \\ &= (4n-6)(n-1)!\ C_{n-2} \\ &= (4n-6)C_{n-1}^* \end{aligned}$$

这样，拟-Catalan 数由下列递推关系和初始条件确定：

$$\begin{cases} C_n^* = (4n-6)C_{n-1}^* & (n \geqslant 2) \\ C_1^* = 1 \end{cases} \tag{8-4}$$

利用这个递推关系，计算前几个拟-Catalan 数：

$$\begin{array}{ll} C_1^* = 1 & C_4^* = 120 \\ C_2^* = 2 & C_5^* = 1\ 680 \\ C_3^* = 12 & C_6^* = 30\ 240 \end{array}$$

Catalan 数的定义公式和拟-Catalan 数的定义意味着拟-Catalan 数的公式成立

$$C_n^* = (n-1)!\ \binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \quad (n \geqslant 1)$$

这个公式也可以从递推关系(8-4)得到。

例 令 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个数。我们说这些数的乘法格式是指进行 a_1，a_2，…，a_n 的乘法的方案，一个乘法格式需要两数间的 $n-1$ 次乘法，这两数中的每一个或者是 a_1，a_2，…，a_n 之一，或者是它们的部分乘积。令 h_n 表示 n 个数的乘法格式的数目。由于

$$(a_1 \times a_2) 和 (a_2 \times a_1)$$

是两个可能的方案，因此，有 $h_1 = 1$（这可当作 h_1 的定义）和 $h_2 = 2$。这个例子指出，在乘法格式中数的顺序是要考虑的[㊀]。如果 $n=3$，则存在 12 种格式：

$$\begin{array}{lll} (a_1 \times (a_2 \times a_3)) & (a_2 \times (a_1 \times a_3)) & (a_3 \times (a_1 \times a_2)) \\ ((a_2 \times a_3) \times a_1) & ((a_1 \times a_3) \times a_2) & ((a_1 \times a_2) \times a_3) \\ (a_1 \times (a_3 \times a_2)) & (a_2 \times (a_3 \times a_1)) & (a_3 \times (a_2 \times a_1)) \\ ((a_3 \times a_2) \times a_1) & ((a_3 \times a_1) \times a_2) & ((a_2 \times a_1) \times a_3) \end{array}$$

于是，$h_3 = 12$。三个数的每一个乘法格式都需要两次乘法，每次乘法又对应一套圆括号。这些外层的圆括号能够使我们用一组括号辨别每一个乘法×。一般说来，每一个乘法格式都可以通过以某种顺序列出 a_1，a_2，…，a_n 而后插入 $n-1$ 对括号使得每一对括号都指定两个因子的乘法而得到。但是，为了得出 h_n 的递推关系，我们以归纳的方式来考察它。对

㊀ 用更代数化的语言来说，我们不假设交换律成立。

a_1，a_2，…，a_n 的每一种格式均可从对 a_1，a_2，…，a_{n-1}的格式以恰好下列方法之一得到：

ⅰ)取 a_1，a_2，…，a_{n-1}的一种乘法格式(它有 $n-2$ 次乘法和 $n-2$ 组括号)，将 a_n 插入到 $n-2$ 个乘法之一的两个因子中的任一个因子两侧中的任一侧。于是，$n-1$ 个数的每一种格式都用这种方法给出 n 个数的$2\times2\times(n-2)=4(n-2)$种格式。

ⅱ)取 a_1，a_2，…，a_{n-1}的一种乘法格式并用 a_n 乘它的左边或右边。于是，$n-1$ 个数的每一种格式均以这种方式给出 n 个数的两种格式。

为了解释，令 $n=6$ 并考虑对于 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的乘法格式

$$((a_1\times a_2)\times((a_3\times a_4)\times a_5))$$

在该格式中有 4 次乘法[⊖]。我们任取其一，比方说$(a_3\times a_4)$和 a_5 的乘法，并将 a_6 插入到这两个因子的每一个的任一侧，得到

$$((a_1\times a_2)\times(((a_6\times(a_3\times a_4))\times a_5))$$
$$((a_1\times a_2)\times(((a_3\times a_4)\times a_6)\times a_5))$$
$$((a_1\times a_2)\times((a_3\times a_4)\times(a_6\times a_5)))$$
$$((a_1\times a_2)\times((a_3\times a_4)\times(a_5\times a_6)))$$

用这种方法得到 $4\times4=16$ 种 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 的格式。除了这些格式外，还有两种格式，在这两种格式中 a_6 进行最后一次乘法，即

$$(a_6\times((a_1\times a_2)\times((a_3\times a_4)\times a_5))),(((a_1\times a_2)\times((a_3\times a_4)\times a_5))\times a_6)$$

这样，五个数的每一种乘法格式给出六个数的 18 种格式；我们有 $h_6=18h_5$。

令 $n\geqslant2$。推广上述分析得到，$n-1$ 个数的 h_{n-1}种乘法格式中的每一种格式均给出 n 个数的 4 $(n-2)$ $+2=4n-6$ 种格式。于是，得到递推关系

$$h_n=(4n-6)h_{n-1}\qquad(n\geqslant2)$$

hn = (4n-6) hn-1

它和初始值 $h_1=1$ 一起确定全部序列 h_1，h_2，…，h_n，…这是与拟-Catalan 数（8-4）所满足的具有相同初始值的相同类型的递推关系。因此

$$h_n=C_n^*=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1}\quad(n\geqslant1)$$

□

在前面的例子中，假设只对以顺序 a_1，a_2，…，a_n 列成的 n 个数的那些乘法格式进行计数。这样一来，例如$((a_2\times a_1)\times a_3)$就不再计入格式数。令 g_n 表示带有这种附加限制的乘法格式数。于是，$h_n=n!\ g_n$，因此

$$g_n=\frac{h_n}{n!}=\frac{C_n^*}{n!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=C_{n-1}\qquad(n\geqslant1)\qquad(8\text{-}5)$$

因为我们只考虑 $n!$ 种可能的顺序中的一种。

也可以用如下定义得到 g_n 的递推关系。在 a_1，a_2，…，a_n 的每个格式中，存在着最后的

⊖　上述格式中每一套括号各对应哪个乘法×？

乘法（对应外层的圆括号）：

$$((a_1,\cdots,a_k\text{ 的格式})\times(a_{k+1},\cdots,a_n\text{ 的格式}))$$

关于 a_1，…，a_k 的乘法格式可以有 g_k 种方式选择，而 a_{k+1}，…，a_n 的乘法格式有 g_{n-k} 种方式选择。由于 k 可以是数 1，2，…，$n-1$ 中的任一个，因此有

$$g_n = g_1g_{n-1} + g_2g_{n-2} + \cdots + g_{n-1}g_1 \qquad (n\geqslant 2) \tag{8-6}$$

这个递推关系和初始条件 $g_1=1$ 一起唯一确定计数序列

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots,\ g_n,\ \cdots$$

这样，满足初始条件 $g_1=1$ 的递推关系（8-6）的解就是

$$g_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \qquad (n\geqslant 1)$$

这个递推关系（8-6）与 7.6 节借助对角线将凸多边形区域分成三角形的递推关系是相同的。这样，又有了 7.6 节所得到的公式的纯组合学推导[⊖]，并且得到结论：将具有 $n+1$ 条边的凸多边形区域通过插入在区域内部不相交的对角线而分成三角形区域的方法数与给定顺序的 n 个数的乘法格式数相同！

当 $n=7$ 时，在 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 的乘法格式与 $n+1$ 条边的凸多边形三角形化之间的对应如图 8-1 所示。每一条对角线对应除最后一次乘法外的一个乘法，多边形的底边对应最后的那次乘法。

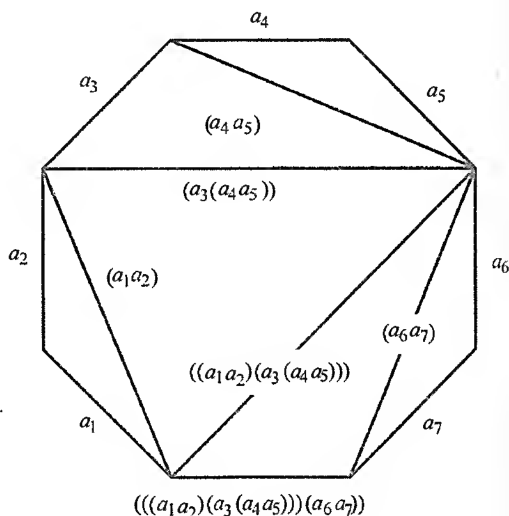


图 8-1

8.2 差分序列和 Stirling 数

令

$$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots \tag{8-7}$$

为一数列。定义新的序列

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \cdots, \Delta h_n, \cdots \tag{8-8}$$

叫做式(8-7)的由

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n \qquad (n\geqslant 0)$$

定义的(一阶)差分序列。差分序列(8-8)的项是序列(8-7)相邻项的差分，我们可以构造(8-8)的差分序列并得到二阶差分序列

⊖ 7.6 节中的推导本质上是解析的。

$$\Delta^2 h_0, \Delta^2 h_1, \Delta^2 h_2, \cdots, \Delta^2 h_n, \cdots$$

这里

$$\begin{aligned}\Delta^2 h_n &= \Delta(\Delta h_n)\\ &= \Delta h_{n+1} - \Delta h_n\\ &= (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_n)\\ &= h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n \qquad (n \geqslant 0)\end{aligned}$$

更一般地，我们可以通过

$$\Delta^p h_0, \Delta^p h_1, \Delta^p h_2, \cdots, \Delta^p h_n, \cdots \qquad (p \geqslant 1)$$

递归地定义(8-7)的 p－阶差分序列，其中

$$\Delta^p h_n = \Delta(\Delta^{p-1} h_n)$$

因此，p 阶差分序列是（$p-1$）阶差分序列的一阶差分序列。定义一个序列的 0 阶差分序列就是它自己，就是说

$$\Delta^0 h_n = h_n \qquad (n \geqslant 0)$$

序列(8-7)的差分表是通过将每个 $p=0$，1，2，…阶差分序列列成一行而得到，如下所示：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 & & \cdots\\
& \Delta h_0 & & \Delta h_1 & & \Delta h_2 & & \Delta h_3 & & \cdots & \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 & & \cdots & & \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 & & \cdots & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

p 阶差分在行 p 上，而序列本身在行 0 上（因此，从 0 开始数这些行）。

例　令序列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…由

$$h_n = 2n^2 + 3n + 1 \quad (n \geqslant 0)$$

确定。该序列的差分表为

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 6 & & 15 & & 28 & & 45 & & 66 & & 91 & & \cdots\\
& 5 & & 9 & & 13 & & 17 & & 21 & & 25 & & \cdots & \\
& & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

在此例中的三阶差分序列全部由 0 组成从而所有更高阶的差分序列也都由 0 组成。　□

现在我们指出，如果一个序列的一般项是 n 的 p 次多项式，那么($p+1$)阶差分就都是

0。当这种情况发生时，可以把第一个0行后的所有的0行删去。

定理 8.2.1 令序列的一般项是 n 的 p 次多项式，即

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \quad (n \geqslant 0)$$

则对所有的 $n \geqslant 0$，$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明：用归纳法来证明本定理。如果 $p = 0$，则有

$$h_n = a_0 \text{，对所有的 } n \geqslant 0 \text{ 均为一常数}$$

进而

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n = a_0 - a_0 = 0 \quad (n \geqslant 0)$$

假设 $p \geqslant 1$，当一般项为 n 的至多 $p-1$ 次多项式时定理成立。有

$$\begin{aligned}\Delta h_n = &(a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0) \\ &- (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0)\end{aligned}$$

由二项式定理

$$\begin{aligned}a_p(n+1)^p - a_p n^p &= a_p\left(n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + 1\right) - a_p n^p \\ &= a_p \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + a_p\end{aligned}$$

从这个计算中我们断定，n 的 p 次幂在 Δh_n 中消去了，并且，Δh_n 是 n 的至多 $p-1$ 次多项式。根据归纳假设

$$\Delta^p(\Delta h_n) = 0 \quad (n \geqslant 0)$$

由于 $\Delta^{p+1} h_n = \Delta^p\ (\Delta h_n)$，现在推出

$$\Delta^{p+1} h_n = 0 \quad (n \geqslant 0)$$

因此，根据归纳法定理成立。 □

现在假设 g_n 和 f_n 分别是两个序列的一般项，而另一个序列由

$$h_n = g_n + f_n \quad (n \geqslant 0)$$

定义。则

$$\begin{aligned}\Delta h_n &= h_{n+1} - h_n \\ &= (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n) \\ &= (g_{n+1} - g_n) + (f_{n+1} - f_n) \\ &= \Delta g_n + \Delta f_n\end{aligned}$$

更一般地，可以归纳出

$$\Delta^p h_n = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n \quad (p \geqslant 0)$$

若 c 和 d 是常数，对每一个整数 $p \geqslant 0$，有

$$\Delta^p\ (cg_n+df_n)\ =c\Delta^p g_n+d\Delta^p f_n \quad (n\geqslant 0) \tag{8-9}$$

把式（8-9）中的性质叫做差分的线性性[⊖]。从式（8-9）看到，序列 h_n 的差分表可以通过用 c 乘以 g_n 的差分表的项并用 d 乘以 f_n 的差分表的项然后将对应的项相加而得到。

例　令 $g_n=n^2+n+1$，并令 $f_n=n^2-n-2$，$(n\geqslant 0)$。g_n 的差分表是

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 & & \cdots \\
& 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & \cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

f_n 的差分表是

$$\begin{array}{ccccccccccc}
-2 & & -2 & & 0 & & 4 & & 10 & & \cdots \\
& 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & \cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

令

$$\begin{aligned} h_n=2g_n+3f_n &=2\ (n^2+n+1)\ +3\ (n^2-n-2) \\ &=5n^2-n-4 \end{aligned}$$

则 h_n 的差分表通过将第一个差分表的各项乘以 2 并将第二个差分表的各项乘以 3 然后再相加对应项而得到。其结果为

$$\begin{array}{ccccccccccc}
-4 & & 0 & & 14 & & 38 & & 72 & & \cdots \\
& 4 & & 14 & & 24 & & 34 & & \cdots & \\
& & 10 & & 10 & & 10 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

□

正是由于差分表的这个定义，一个序列 h_0，h_1，h_2，…，h_n，…的差分表由它的 0 行上的元素确定。我们下面观察，差分表也可以沿左边，即第 0 条对角线上的元素确定，就是说，沿差分表最左边的对角线上的数

$$h_0=\Delta^0 h_0,\Delta^1 h_0,\Delta^2 h_0,\Delta^3 h_0,\cdots$$

确定[⊖]。这个性质是下述事实的推论，即差分表（从左到右）的对角线上的元素由前一条对角线上的元素确定。例如，第一条对角线上的元素是

$$\begin{aligned} h_1 &=\Delta^0 h_1=\Delta^1 h_0+\Delta^0 h_0=\Delta h_0+h_0 \\ \Delta h_1 &=\Delta^2 h_0+\Delta h_0 \end{aligned}$$

⊖ 用线性代数的语言，序列的集合形成一个向量空间，而 Δ 是在这个向量空间上的线性变换。

⊖ 该性质是如下事实的离散模拟，即解析函数 $f(x)$（通过它的 Taylor 展开式）由函数值和在 $x=0$ 点的所有各阶导数 $f(0),f'(0),f''(0),\cdots$ 确定。

$$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

如果差分表的第 0 条对角线只包含 0，那么整个差分表就只含有 0。下一种最简单的第 0 条对角线是除去一个 1 外只含有 0 的对角线，譬如 1 在第 p 行（从而在这个 1 的前面有 p 个 0）。从在第 0 条对角线上的 $p+1$ 行，$p+2$ 行，…的元素都是 0 的事实显然可知：在 $p+1$行，$p+2$ 行，…的所有元素都等于 0。

例如，设 $p=4$。于是，第 5 行和更大序号的行只含有 0。能否找出序列的一般项，使得它的差分表的第 0 条对角线是

$$0,0,0,0,1,0,0,\cdots \tag{8-10}$$

呢？用这些左边上的元素确定差分表的三角形部分并得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}$$

既然第 5 号行全是 0，那么寻找一个其第 n 项 h_n 是 n 的 4 次多项式的序列。从上面计算出的部分差分表我们看到

$$h_0=0, h_1=0, h_2=0, h_3=0 \text{ 以及 } h_4=1$$

于是，如果 h_n 是一个 4 次多项式，它有根 0，1，2，3，那么对某个常数 c 成立

$$h_n = cn(n-1)(n-2)(n-3)$$

由于 $h_4=1$，我们必须有

$$1=c(4)(3)(2)(1), \text{等价地 } c=\frac{1}{4!}$$

因此，具有一般项

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \binom{n}{4} \quad (n \geqslant 0)$$

的序列有一个其第 0 条对角线由式（8-10）给出的差分表。

更一般地，同样的论述指出

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))}{p!} = \binom{n}{p}$$

是 n 的 p 次多项式，其差分表的第 0 条对角线等于

$$\overbrace{0,0,\cdots,0}^{p},1,0,0,\cdots$$

利用差分的线性性和差分表的第 0 条对角线确定整个差分表，从而确定序列本身的事实，我们得到下列定理。

定理 8.2.2 其差分表的第0条对角线等于 0行对角线!!

$$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_p, 0, 0, 0, \cdots \quad \text{其中 } c_p \neq 0$$

的序列的一般项是满足

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \cdots + c_p\binom{n}{p} \tag{8-11}$$

的 n 的 p 次多项式。

□

将定理 8.2.1 和 8.2.2 结合起来，我们看到，n 的每一个 p 次多项式都可以通过常数 c_0，c_1，…，c_p 的某种选择而被表示为式（8-11）的形式。这些常数是唯一确定的（见练习题 10）。

例 考虑具有一般项

$$h_n = n^3 + 3n^2 - 2n + 1 \quad (n \geqslant 0)$$

的序列。计算差分，得到

```
1    3    17    49
   2    14    32
     12    18
        6
```

由于 h_n 是 n 的三次多项式，它的差分表的第0条对角线是

$$1, 2, 12, 6, 0, 0, \cdots$$

因此，根据定理 8.2.2，h_n 的另一种写法是

$$h_n = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} \tag{8-12}$$

为什么要用这种方式表示 h_n 呢？下面是它的一个原因。假设我们要求部分和

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$$

利用公式(8-12)，我们看到

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = 1\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} + 12\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} + 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}$$

由 5.3 节知道

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \tag{8-13}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = 1\binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{2} + 12\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$

这是一个非常简单的求部分和公式。

□

上述过程可以用来计算其一般项为 n 的多项式的任意序列的部分和。

定理 8.2.3 设序列 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 有一个差分表，该表的第 0 条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_p, 0, 0, \cdots$$

则

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \cdots + c_p\binom{n+1}{p+1}$$

证明：由定理 8.2.2，有

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + \cdots + c_p\binom{n}{p}$$

利用公式(8-13)，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} h_k &= c_0\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0} + c_1\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} + \cdots + c_k\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\\ &= c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \cdots + c_p\binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

□

例 求前 n 个正整数的四次方的和。

令 $h_n = n^4$。计算差分，得到

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 \\ & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & \\ & & 14 & & 50 & & 110 & & \\ & & & 36 & & 60 & & & \\ & & & & 24 & & & & \end{array}$$

因为 h_n 是一个 4 次多项式，其差分表的第 0 条对角线等于

$$0,\ 1,\ 14,\ 36,\ 24,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

因此

$$\begin{aligned}1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 &= \sum_{k=0}^{n} k^4\\ &= 0\binom{n+1}{1} + 1\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}\end{aligned}$$

□

可以用类似的方法考虑一般项为 $h_n = n^p$ 的序列来计算前 n 个正整数的 p 次幂的和。前面的例子是 $p=4$ 的情形。

差分表的第 0 条对角线上出现的那些数在组合学中有重要意义，现在就来讨论它们。令

$$h_n = n^p$$

根据定理 8.2.1 和 8.2.2，h_n 的差分表的第 0 条对角线有形式

$$c(p,0), c(p,1), c(p,2), \cdots, c(p,p), 0, 0, \cdots$$

且

$$n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p} \tag{8-14}$$

如果 $p=0$，则 $h_n=1$，它是一个常数，式（8-14）化为

$$n^0 = 1 = 1\binom{n}{0} = 1$$

特别地

$$c(0,0)=1$$

由于 n^p 作为 n 的多项式有一个等于 0 的常数项，故若 $p\geqslant 1$，也有

$$c(p,0)=0 \quad (p\geqslant 1)$$

通过引入新的表达式改写式(8-14)。令

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & \text{若 } k\geqslant 1 \\ 1, & \text{若 } k=0 \end{cases}$$

我们注意，$[n]_k$ 与 $P(n,k)$ 相同，即 n 个不同物体的 k-排列数(见 3.2 节)，但是，现在希望用不太麻烦的记号 $[n]_k$。我们还注意到

$$[n]_{k+1} = (n-k)[n]_k$$

由于

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{[n]_k}{k!}$$

从而得到

$$[n]_k = k!\binom{n}{k}$$

因此，式(8-14)可以改为

$$\begin{aligned} n^p &= c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + \cdots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!} \\ &= \sum_{k=0}^{p} c(p,k)\frac{[n]_k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k \end{aligned}$$

现在我们引入数

$$S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!} \quad (0\leqslant k\leqslant p)$$

则公式(8-14)变为

$$\begin{aligned} n^p &= S(p,0)[n]_0 + S(p,1)[n]_1 + \cdots + S(p,p)[n]_p \\ &= \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k \end{aligned} \tag{8-15}$$

刚刚引入的数 $S(p,k)$ 叫做第二类[⊖]Stirling 数[⊜]。由于

$$S(p,0)=\frac{c(p,0)}{0!}=c(p,0)$$

因此有

$$S(p,0)=\begin{cases}1, & 若\ p=0\\ 0, & 若\ p\geqslant 1\end{cases} \tag{8-16}$$

在式(8-14)左边 n^p 的系数是 1，而右边则为

$$\frac{c(p,p)}{p!}$$

（由于其他项均为 n 的次数小于 p 的多项式，因此只有公式(8-14)右边的最后一项影响 n^p 的系数）。这样，有

$$S(p,p)=\frac{c(p,p)}{p!}=1 \quad (p\geqslant 0) \tag{8-17}$$

现在证明第二类 Stirling 数满足类 Pascal 型（Pascal-like）递推关系。

定理 8.2.4 如果 $1\leqslant k\leqslant p-1$，则

$$S(p,k)=kS(p-1,k)+S(p-1,k-1)$$

证明： 首先观察，假如不是因为在 $S(p-1,k)$ 前面有因子 k，我们得到的就是 Pascal 递推关系了。我们有

$$n^p=\sum_{k=0}^{p}S(p,k)[n]_k \tag{8-18}$$

和

$$n^{p-1}=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_k$$

因此

$$\begin{aligned}
n^p = n\times n^{p-1} &= n\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_k\\
&=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)n[n]_k\\
&=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k\\
&=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)(n-k)[n]_k+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k\\
&=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_{k+1}+\sum_{k=1}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k
\end{aligned}$$

⊖ 因此，必然存在第一类 Stirling 数！我们在本节后面讨论之。

⊜ 取名于 James Stirling (1692—1770)。

在上一行左面的和中，用 $k-1$ 代替 k，得到

$$n^p = \sum_{k=1}^{p} S(p-1,k-1)[n]_k + \sum_{k=1}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$
$$= S(p-1,p-1)[n]_p + \sum_{k=1}^{p-1}(S(p-1,k-1) + kS(p-1,k))[n]_k$$

对于满足 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 的每一个 k，比较 n^p 表达式中 $[n]_k$ 的系数和公式（8-18）中 $[n]_k$ 的系数，最后得到

$$S(p,k) = S(p-1,k-1) + kS(p-1,k) \qquad \square$$

定理 8.2.4 中给出的递推关系和来自式(8-16)和(8-17)的初始值

$$S(p,0) = 0 \quad (p \geqslant 1) \text{和} \ S(p,p) = 1 \quad (p \geqslant 0)$$

确定了第二类 Stirling 数 $S(p, k)$ 的序列。正如我们对二项式系数所做的那样，可以构造这些 Stirling 数的类 Pascal 三角形（如图 8-2 所示）。

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

图 8-2 $S(p, k)$ 的三角形

三角形中的每一项 $S(p, k)$，但不是三角形两条边上的那些项（这些项由初始值给出），通过用 k 乘以该项的直接上方元素并将结果加上该项的直接左上方的元素而得到。

从第二类 Stirling 数的三角形中看到

$$\begin{cases} S(p,1) = 1 & (p \geqslant 1) \\ S(p,2) = 2^{p-1} - 1 & (p \geqslant 2) \\ S(p,p-1) = \dbinom{p}{2} & (p \geqslant 1) \end{cases}$$

将这些公式的验证留作练习。利用下一定理中给出的第二类 Stirling 数的解释也可以验证这些公式。

定理 8.2.5 *第二类 Stirling 数 $S(p, k)$ 是将 p 个元素的集合划分成 k 个不可辨别的非空盒的划分的个数。*

证明： 首先，我们解释在当前情况下不可辨别意味着什么。说这些盒不可辨别是指不能把一个盒子与另一个盒子分辨开。它们看起来都一样。例如，如果某个盒子的内容是元素 a，b 和 c，那么它究竟是哪个盒子并不重要。如果不能把一个盒子与另一个盒子区分开，那么又怎么能够指出它呢？因此，唯一重要的在于各个盒子的内容是什么，而不是哪个盒子

装了什么。

令 $S^*(p, k)$是将 p 个元素的集合划分成 k 个不可辨别的非空盒的划分的个数。容易看到

$$S^*(p,p)=1 \quad (p\geqslant 0)$$

因为如果盒子的个数与元素个数相同，那么每一个盒子恰好有一个元素（记住，不能把一个盒子与另一个盒子区分开），而且

$$S^*(p,0)=0 \quad (p\geqslant 1)$$

因为如果至少有一个元素而没有盒子，那么不可能存在划分。如果能够证明 $S^*(p, k)$满足与第二类 Stirling 数所满足的相同的递推关系，就是说，如果能够证明

$$S^*(p,k)=kS^*(p-1,k)+S^*(p-1,k-1) \quad (1\leqslant k\leqslant p-1)$$

那么就可以断言对满足 $0\leqslant k\leqslant p$ 的所有 k 和 p，$S^*(p,k)=S(p,k)$。

我们论证如下。考虑将前 p 个正整数 1，2，…，p 的集合作为要被划分的集合。把 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 分成 k 个非空、不可辨别盒子的划分有两种类型：

（ⅰ）那些使得 p 自己单独在一个盒子的划分；

（ⅱ）那些使得 p 不单独在一个盒子的划分。这样，包含 p 的盒子就至少还有多于一个的元素。

在第ⅰ)种情况，如果从含有 p 的盒子中拿走 p，那么我们就得到将 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 划分成 $k-1$ 个非空、不可辨别盒子的划分。因此，存在 $S^*(p-1, k-1)$种对$\{1, 2, \cdots, p\}$的第ⅰ)种划分。

现在考虑第ⅱ)种划分。设从含有 p 的盒子中拿走 p，由于 p 不单独在这个盒子里，因此就得到将$\{1, 2, \cdots, p-1\}$划分成 k 个非空、不可辨别盒子的划分 $A_1, A_2, \cdots, A_k$。现在你可能要想说存在$S^*(p-1,k)$种第ⅱ)种划分，但是事实却并非如此。理由如下。通过拿走 p 而得到的 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 的划分 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 产生于 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 的 k 个不同的划分，即产生于

$$\begin{gathered}A_1\cup\{p\},A_2,\cdots,A_k\\ A_1,A_2\cup\{p\},\cdots,A_k\\ \vdots\\ A_1,A_2,\cdots,A_k\cup\{p\}\end{gathered}$$

换一种方式来说，在删除 p 之后我们不能辨别是从哪个盒子中删除的；由于在 p 被取走后所有的盒子仍然是非空的，因此被取走 p 的盒子可能是这 k 个盒子中的任一个。于是，$\{1, 2, \cdots, k\}$ 存在$kS^*(p-1,k)$种第ⅱ)种划分。因此

$$S^*(p,k)=kS^*(p-1,k)+S^*(p-1,k-1)$$

证明完成。　□

因为我们知道$S(p,k)$是将 p 个元素的集合划分成 k 个不可辨别的非空盒的划分的个数，所以我们不使用在定理 8.2.5 的证明中引入的记号$S^*(p,k)$。它现在是多余的。

现在使用我们对第二类 Stirling 数的组合学解释并得出它们的公式。为此，首先确定将 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 分成 k 个非空、可辨别的盒子[㊀]的划分数 $S^{\#}(p, k)$[㊁]。把盒子看作是一个涂成红色、一个涂成蓝色、一个涂成绿色等等。这时，不仅哪些元素一起被放进盒子里要考虑，而且放进的是哪个盒子也要考虑（它是红盒、蓝盒、绿盒、…）一旦知道 k 个盒子的内容，就可以用 $k!$ 种方法对 k 个盒子涂色。于是

$$S^{\#}(p,k)=k!\ S(p,k) \tag{8-19}$$

从而

$$S(p,k)=\frac{1}{k!}S^{\#}(p,k)$$

因此，只要求出 $S^{\#}(p,k)$ 的公式即可，这可通过利用第 6 章的容斥原理来得到这个公式。在得出公式以前，我们注意，公式(8-19)的验证依赖于每个盒子都是非空的事实。如果这些盒子可以是空的，那么我们就不能用 $k!$ 乘以 $S(p,k)$ 来得到 $S^{\#}(p,k)$。如果一个划分中有 r 个盒子是空的，那么该划分就产生

$$\frac{k!}{r!}$$

个可以辨别盒子的划分，因为在它们之间交换空盒不产生任何变化[㊂]。

定理 8.2.6 对每一个满足 $0 \leqslant k \leqslant p$ 的整数 k，都有

$$S^{\#}(p,k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$$

从而

$$S(p,k) = \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$$

证明： 令 U 是将 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 分成 k 个可辨别盒子 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 的所有划分的集合。我们定义 k 个性质 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，其中 P_i 为第 i 个盒子 B_i 是空盒的性质。令 A_i 表示 U 的子集，它由盒 B_i 是空盒的那些划分组成。此时

$$S^{\#}(p,k)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}|$$

我们有

$$|U|=k^p$$

因为 p 个元素中的每一个都可以被放进 k 个可辨别盒子的任意一个中去。令 t 是一个满足 $1 \leqslant t \leqslant k$ 的整数。集 U 有多少个划分属于交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t$？对于这些划分，盒子 B_1，

㊀ 正当你开始习惯于不可辨别盒子的时候，我们改变规则并辨别它们！

㊁ 我们放弃一个记号并且几乎立即引入另一个记号！在数学中记号是重要的。恰当使用会增加清晰度；简明扼要不是它仅有的好处。

㊂ 我们实际具有的是相同类型(空集)的 r 个物体和 $k-r$ 个其他不同物体(那些非空盒子的内容)的一个多重集。

$B_2,\cdots,B_t$ 是空的而剩下的盒子 $B_{t+1},\cdots,B_k$ 可以是也可以不是空的。因此，$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_t|$ 是对 $\{1, 2, \cdots, p\}$的划分到 $k-t$ 个可辨别的盒子的划分数的计数，即等于 $(k-t)^p$。无论假设哪 t 个盒子是空的，相同的结论都成立；也就是说，对于$\{1,2,\cdots,k\}$的每一个 t-组合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=(k-t)^p$$

因此由容斥原理(见公式(6-3))，我们有

$$S^{\#}(p,k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$$ □

Bell 数[⊖] B_p 是将 p 个元素的集合分成非空、不可辨别盒子的划分数。现在不指定盒子的数目，但由于盒子都不空，故盒子的个数不可能超过 p。Bell 数正好是第二类 Stirling 数的三角形的一行上的元素的和（见图 8-2）；即

$$B_p=S(p,0)+S(p,1)+\cdots+S(p,p)$$

因此

$$\begin{array}{ll} B_0=1 & B_4=15 \\ B_1=1 & B_5=52 \\ B_2=2 & B_6=203 \\ B_3=5 & B_7=877 \end{array}$$

Bell 数满足一个递推关系，但却不是常数阶的。

定理 8.2.7 如果 $p\geqslant1$，则

$$B_p=\binom{p-1}{0}B_0+\binom{p-1}{1}B_1+\cdots+\binom{p-1}{p-1}B_{p-1}$$

证明： 将集合 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 划分成一些非空、不可辨别的盒子。含有 p 的盒子还包含 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 的子集 X（很可能空）。集 X 有 t 个元素，其中 t 是 0 到 $p-1$ 间的某个整数。我们可以有 $\binom{p-1}{t}$ 种方式选择大小为 t 的集 X，并以 B_{p-1-t} 种方式将 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 中不属于 X 的 $p-1-t$ 个元素划分成一些非空、不可辨别的盒子。因此

$$B_p=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_{p-1-t}$$

当 t 取值 0，1，…，$p-1$ 时，$(p-1)-t$ 也取这些值。因此得到

$$\begin{aligned} B_p &= \sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{(p-1)-t}B_t \\ &= \sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_t \end{aligned}$$ □

⊖ 以 E.T.Bell（1883—1960）的名字命名。

第二类 Stirling 数指出如何用 $[n]_0$，$[n]_1$，…，$[n]_p$ 写出 n^p。第一类 Stirling 数的作用则相反。它告诉我们如何用 n^0，n^1，…，n^p 写出 $[n]_p$[⊖]。由定义

$$
\begin{aligned}
[n]_p &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) \\
&= (n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1)) \qquad (8\text{-}20)
\end{aligned}
$$

因此

ⅰ）$[n]_0=1$

ⅱ）$[n]_1=n$

ⅲ）$[n]_2=n\ (n-1)\ =n^2-n$

ⅳ）$[n]_3=n\ (n-1)\ (n-2)\ =n^3-3n^2+2n$

ⅴ）$[n]_4=n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ =n^4-6n^3+11n^2-6n$

一般地，公式（8-20）右边的乘积有 p 个因子。如果将其乘开，就得到含有 n 的幂

$$n^p, n^{p-1}, \cdots, n^1, n^0=1$$

的多项式，其系数的符号正负相间；就是说，得到形如

$$
\begin{aligned}
[n]_p &= s(p,p)n^p - s(p,p-1)n^{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}s(p,1)n^1 + (-1)^p s(p,0)n^0 \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}s(p,k)n^k \qquad (8\text{-}21)
\end{aligned}
$$

的表达式。第一类 Stirling 数就是出现在公式（8-21）中的系数

$$s(p,k) \qquad (0\leqslant k\leqslant p)$$

从公式(8-20)和(8-21)容易推出

$$s(p,0)=0 \qquad (p\geqslant 1)$$

和

$$s(p,p)=1 \qquad (p\geqslant 0)$$

因此，第一类 Stirling 数满足与第二类 Stirling 数一样的初始条件。但是，它们满足不同的递推关系，其证明与定理 8.2.4 证明的思路基本相同。

定理 8.2.8　如果 $1\leqslant k\leqslant p-1$，则

$$s(p,k)=(p-1)s(p-1,k)+s(p-1,k-1)$$

证明：由公式（8-21），有

$$[n]_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}s(p,k)n^k \qquad (8\text{-}22)$$

⊖ 对于熟悉线性代数的读者，解释如下：具有（比如）实系数，最多为 p 次的那些各项式形成一个 $p+1$ 维的向量空间。组 1，n，n^2，…，n^p 和组 $[n]_0=1$，$[n]_1$，…，$[n]_p$ 都是该空间的基。第一类 *Stirling* 数和第二类 *Stirling* 数告诉我们如何用其中的一组基表示另一组基。

在这个方程中用 $p-1$ 代替 p，又有

$$[n]_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$$

下面，我们观察到

$$[n]_p=[n]_{p-1}(n-(p-1))$$

因此

$$[n]_p = (n-(p-1))\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$$

改写后，变成

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k$$

在上式的第一个求和中，用 $k-1$ 代替 k，得到

$$[n]_p = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}s(p-1,k-1)n^k + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k$$

比较这个表达式中 n^k 的系数与表达式（8-22）中 n^k 的系数，得到

$$s(p,k)=s(p-1,k-1)+(p-1)s(p-1,k)$$

对每一个满足 $1\leqslant k\leqslant p-1$ 的整数 k 成立。 □

像第二类 Stirling 数一样，第一类 Stirling 数也是对某种事物的计数，这在下一个定理中作了解释。它的证明在结构上类似于定理 8.2.5 的证明。

定理 8.2.9 第一类 Stirling 数 $s(p,k)$ 是将 p 个物体排成 k 个非空的循环排列的方法数。

证明： 我们把定理叙述中的循环排列叫做圆圈（circles）。令 $s^{\#}(p,k)$ 表示把 p 个人排成 k 个非空圆圈的方法数。于是有

$$s^{\#}(p,p)=1 \qquad (p\geqslant 0)$$

因为如果有 p 个人和 p 个圆圈，那么每个圆圈就只含一个人[⊖]。我们还有

$$s^{\#}(p,0)=0 \qquad (p\geqslant 1)$$

这是因为如果至少有一个人，那么任何的安排都至少包含一个圆圈。因此，数 $s^{\#}(p,k)$ 与第一类 Stirling 数一样满足相同的初始条件。现在证明它们满足相同的递推关系；就是说

$$s^{\#}(p,k)=(p-1)s^{\#}(p-1,k)+s^{\#}(p-1,k-1)$$

设人被标上号码 1，2，…，p。将 1，2，…，p 排成 k 个圆圈有两种类型。第一种排法是在一个圆圈中只有标号为 p 的人自己；这种排法共有 $s^{\#}(p-1,k-1)$ 个。在第二种类型中，p 至少和一个别的人在一个圆圈中。这些排法可以通过把 1，2，…，$p-1$ 排成 k 个圆

⊖ 每一个人的右手握着同一个人的左手！

圈并把 p 放在 1，2，…，$p-1$ 任何一人的左边得到。这样，1，2，…，$p-1$ 的每一次排法用这种方式都给出 1，2，…，p 的 $p-1$ 种排法，因此，第二种类型的排法共有 $(p-1)s^{\#}(p-1,k)$ 种。于是，将 p 个人排成 k 个圆圈的安排方法数为

$$s^{\#}(p,k)=s^{\#}(p-1,k-1)+(p-1)s^{\#}(p-1,k)$$

现在得到 $s(p,k)=s^{\#}(p,k)$。 □

尤其要注意，在定理 8.2.9 的证明中我们所做的就是把 $\{1,2,\cdots,p\}$ 划分成 k 个非空、不可辨别的盒子，然后将每个盒子中的元素排成一个循环排列。

8.3　分拆数

正整数 n 的一个分拆是 n 作为称做部分的一个或多个正整数的无序和的一种表示。由于部分的顺序是不重要的，因此我们总可以排列这些部分使得它们的顺序从最大到最小。1，2，3，4 和 5 对应的分拆为：1；2，1+1；3，2+1，1+1+1；4，3+1，2+2，2+1+1，1+1+1+1 以及 5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1。

n 的一个分拆有时候写成

$$\lambda=n^{a_n}\cdots 2^{a_2}1^{a_1} \tag{8-23}$$

其中 a_i 为非负整数，该数等于值为 i 的部分的个数（这个表达式是纯符号性的；它的项既不是指数式，表达式也不是一个乘积）。当被写成式（8-23）的形式时，若 $a_i=0$，则项 i^{a_i} 通常被省略，使用这个记号，5 的分拆为：

$$5^1,4^11^1,3^12^1,3^11^2,2^21^1,2^11^3,1^5$$

令 p_n 表示正整数 n 的不同的分拆数，为方便起见，令 $p_0=1$。分拆序列为

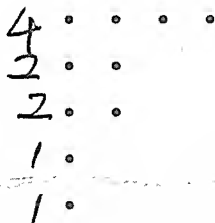
$$p_0,p_1,\cdots,p_n,\cdots$$

由上式，有 $p_0=1$，$p_1=1$，$p_2=2$，$p_3=3$，$p_4=5$ 以及 $p_5=7$。简单观察（参见公式（8-23））可知，p_n 等于方程

$$na_n+\cdots+2a_2+1a_1=n$$

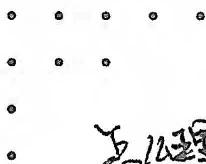
的非负整数解 a_n，…，a_2，a_1 的个数。

令 λ 为 n 的分拆 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，其中 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k>0$。$\lambda$ 的 Ferrers 图，或简称为图，是一个左调整点组，该组有 k 行，第 i 行有 n_i 个点。例如，10 的分拆 $10=4+2+2+1+1$ 的图为



n 的分拆 λ 的共轭分拆是分拆 λ^*，它的图由 λ 的图通过交换行列位置而得到（将图沿

左上到右下的对角线翻转即得之)。例如，分拆 $10=4+2+2+1+1$ 的共轭图为

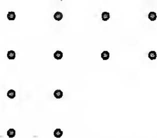


从而是 10 的分拆 $10=5+3+1+1$。分拆 λ 的共轭分拆部分的个数等于 λ 的最大的部分。

令 λ 是 n 的分拆 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。λ 的共轭分拆 λ^* 是 n 的分拆 $n=n_1^*+n_2^*+\cdots+n_l^*(l=n_1)$，其中 n_i^* 是 λ 的至少等于 i 的部分的个数：

$$n_i^*=|\{j:n\geqslant i\}|\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

例　令 λ 是 12 的分拆 $12=4+4+2+2$，它的图为



其共轭分拆 λ^* 也是分拆 $12=4+4+2+2$。因此 $\lambda^*=\lambda$，并称 λ 为自共轭分拆。 □

我们现在得到分拆数序列的生成函数的一个表达式。

定理 8.3.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$$

证明：右边的表达式等于乘积

$$(1+x+\cdots+x^{1a_1}+\cdots)(1+x^2+\cdots+x^{2a_2}+\cdots)(1+x^3+\cdots+x^{3a_3}+\cdots)\cdots$$

项 x^n 由这个乘积通过从第一个因子选择项 x^{1a_1}、从第二个因子选择项 x^{2a_2}、从第三个因子选择项 x^{3a_3}等等而得到，其中，$1a_1+2a_2+3a_3+\cdots=n$。因此，n 的每一个分拆都使 x^n 的系数增 1，而 x^n 的系数等于 n 的分拆个数 p_n。 □

令 $\mathcal{P}_n$ 表示正整数 n 的所有分拆的集合。存在一种自然的方法为 $\mathcal{P}_n$ 中的分拆规定偏序(对于这个定义，为了在比较两个分拆时它们能有相同的部分个数，允许分拆的部分个数为 0 在证法上是方便的)。令

$$\lambda:n=n_1+n_2+\cdots+n_k\qquad(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k)$$

和

$$\mu:n=m_1+m_2+\cdots+m_k\qquad(m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k)$$

为 n 的两个分拆。此时，我们说 λ 被 μ 优超(或 μ 优超 λ)，并记为

$$\lambda\leqslant\mu$$

如果关于 λ 的部分和至多等于 μ 对应的部分和：

$$n_1+\cdots+n_i\leqslant m_1+\cdots+m_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

直接验证可知，优超关系是自反的、反对称的和传递的，因此是$\mathcal{P}_n$上的一个偏序。

例　考虑 9 的三个分拆：

$$\lambda:9=5+1+1+1+1 \qquad \mu:9=4+2+2+1 \qquad \nu:9=4+4+1$$

为了比较所有这三个分拆，我们在 μ 和 ν 后添加一些 0 而把 μ 看成是 $9=4+2+2+1+0$ 以及 ν 看成是 $9=4+4+1+0+0$。我们有 $\mu\leqslant\nu$，因为

$$4\leqslant 4$$
$$4+2\leqslant 4+4$$
$$4+2+2\leqslant 4+4+1$$
$$4+2+2+1\leqslant 4+4+1+0$$

另一方面，λ 和 μ 是不可比较的，因为 $4<5$ 但 $4+2+2>5+1+1$。类似地，λ 和 ν 也是不可比较的。 □

在 4.3 节，我们讨论过 0 和 1 的 n-元组的字典序。这个字典序也可以用在分拆上以产生$\mathcal{P}_n$上的一个全序，它实际上是优超偏序的线性扩展。令 $\lambda:n=n_1+n_2+\cdots+n_k(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k)$和 $\mu:n=m_1+m_2+\cdots+m_k(m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k)$为 n 的两个分拆。如果存在整数 i，使得对于 $j<i$ 有 $n_j=m_j$ 且 $n_i<m_i$，则我们说 λ 以字典序先于 μ[⊖]。例如，分拆 $12=4+3+2+2+1$先于分拆 $12=4+3+3+1+1$，因为从左到右读之则发现，$4=4$，$3=3$，但是$2<3$。可以简单地证明字典序是$\mathcal{P}_n$上的偏序。

定理 8.3.2　*字典序是正整数 n 的分拆集$\mathcal{P}_n$上优超偏序的线性扩展。*

证明：从字典序的定义几乎马上能够推出，字典序是一个全序（n 的每两个分拆都是可比较的）。我们继续使用定理叙述前的记号。令 λ 和 μ 是 n 的两个不同的分拆，且 λ 被 μ 所优超。选取对于 $j<i$，满足 $n_j=m_j$ 但 $n_i\neq m_i$ 的第一个整数 i。由于

$$n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i\leqslant m_1+\cdots+m_{i-1}+m_i$$

我们断言 $n_i<m_i$，因此，λ 以字典序先于 μ。 □

8.4　一个几何问题

在这一节我们将得到上限（upper argument）等于 n 的前$k+1$个二项式系数的和

$$h_n^{(k)}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k} \quad (0\leqslant k\leqslant n) \tag{8-24}$$

即 Pascal 三角形第 n 行上前$k+1$个数的和的组合学几何解释。对于每一个固定的 k，得到一个序列

⊖　字母表是一些整数，表中小的整数位于大的整数的前头。还有，就像在 0 和 1 的 n-元组的字典序中那样，我们从左到右读“单词”。

$$h_0^{(k)}, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \cdots, h_n^{(k)}, \cdots \tag{8-25}$$

如果 $k=0$，则有

$$h_n^{(0)} = \binom{n}{0} = 1$$

且式(8-25)是所有 1 的序列。如果 $k=1$，得到

$$h_n^{(1)} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = n+1$$

如果 $k=2$，有

$$\begin{aligned} h_n^{(2)} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &= 1 + n + \frac{n\ (n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

注意，对于所有的 k，$h_0^{(k)}=1$ 。用 Pascal 公式确定式(8-25)的差分：

$$\begin{aligned} \Delta h_n^{(k)} &= h_{n+1}^{(k)} - h_n^{(k)} \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+1}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \cdots - \binom{n}{k} \\ &= \left[\binom{n+1}{1} - \binom{n}{1}\right] + \cdots + \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right] \\ &= \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

因此

$$\Delta h_n^{(k)} = h_n^{(k-1)} \tag{8-26}$$

由式(8-26)推出，序列

$$h_0^{(k)}, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \cdots, h_n^{(k)}, \cdots \tag{8-27}$$

的差分表可以从

$$h_0^{(k-1)}, h_1^{(k-1)}, h_2^{(k-1)}, \cdots, h_n^{(k-1)}, \cdots$$

的差分表通过把式(8-27)插入到顶部作为新的一行而得到。

数 $h_n^{(k)}$ 是对具有 n 个元素的集合的至多 k 个元素的组合数的计数。现在我们指出，$h_n^{(k)}$ 还可以解释为一个几何问题的计数函数：

$h_n^{(k)}$ 是用 n 个一般位置上的（$k-1$）-维超平面分割 k-维空间所成的区域数。

我们需要解释这个论断中的一些术语。

我们从 $k=1$ 开始。考虑 1-维空间，即一条直线。0-维空间是一个点，而一般位置上的 n 个点就是指这些点互异。如果在直线上插入 n 个互异的点，那么直线就被分成 $n+1$ 段叫

做区域的部分（如图 8-3 所示，其中 4 个点把直线分成 5 个区域）。

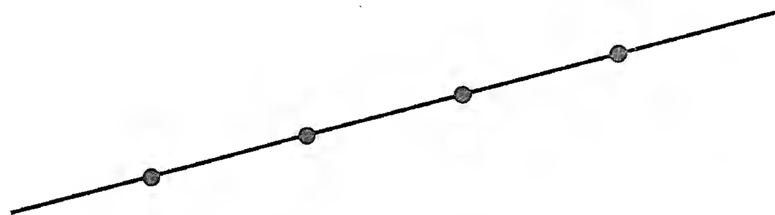


图 8-3

这个结果与式(8-24)中给出的 $h_n^{(1)}$ 的定义一致。

现在，令 $k=2$，考虑在平面一般位置上的 n 条直线。在这种情况下，一般位置指的是，这些直线互异并且不平行（因此每一对直线恰好相交于一点），同时交点全不相同，就是说，没有三条直线相交于同一点。对于平面一般位置上的 n 条直线，由于每一对直线都给出不同的交点，从而交点的个数是 $\binom{n}{2}$。对于 $n=0$ 到 5，平面被一般位置上的 n 条直线所分成的区域的个数在右面的表中给出。这个表很容易验证。

直线	区域
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16

现在用归纳推理。设有一般位置上的 n 条直线，然后插入一条新的直线，使得 $n+1$ 条直线处于一般位置。前 n 条直线与新直线相交于 n 个不同的点。正如我们已经验证过的，这 n 个点把新直线分成

$$h_n^{(1)}=n+1$$

部分。这 $h_n^{(1)}=n+1$ 部分中的每一部分都把由前 n 条直线所形成的区域一分为二（见图 8-4 $n=3$ 的情形，其中的新线是虚线）。因此，区域的个数在从 n 条直线到 $n+1$ 条直线时增加了 $h_n^{(1)}=n+1$。但这恰恰是 $k=2$ 时由式（8-26）所表达的关系：

$$\Delta h_n^{(2)}=h_{n+1}^{(2)}-h_n^{(2)}=h_n^{(1)}=n+1$$

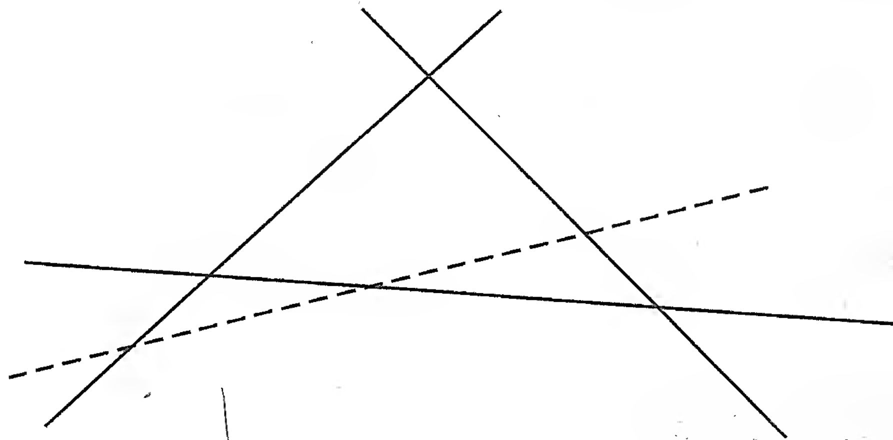


图 8-4

由于 $h_0^{(2)}=1$，我们断言

$$h_n^{(2)}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$$

是由平面一般位置上的 n 条直线形成的区域的个数。

$k=3$ 的情形类似。考虑 3-维空间一般位置上的 n 个平面。现在的一般位置指的是每两个平面，但没有三个平面，相交于一条直线，而每三个平面，但没有四个平面，相交于一点。现在插入一个新平面，使得所得到的 $n+1$ 个平面的集合还处在一般的位置上。前 n 个平面与新平面相交成一般位置上的 n 条直线（因为这些平面都处在一般位置上）。这 n 条直线把新平面分成 $h_n^{(2)}$ 个平面区域，正如我们在上面对 $k=2$ 所确定的那样。这 $h_n^{(2)}$ 个平面区域中的每一个又把前 n 个平面形成的空间区域一分为二。因此，空间区域的个数在从 n 个平面到 $n+1$ 个平面时增加了 $h_n^{(2)}$。这恰好是 $k=3$ 时由式（8-26）所表达的关系：

$$\Delta h_n^{(3)}=h_{n+1}^{(3)}-h_n^{(3)}=h_n^{(2)}$$

由于 $h_0^{(3)}=1$(零个平面把空间分成 1 个区域，即整个空间)，因此我们断言

$$h_n^{(3)}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

是空间被 3-维空间一般位置上的 n 个平面所分成的区域数。

将相同类型的推理用到更高维的空间中。在一般位置上的 n 个（$k-1$）-维超平面将 k-维空间分成的区域数等于

$$h_n^{(k)}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k} \tag{8-28}$$

最后考虑 $k=n$ 的情形。由定义式（8-24）得到

$$h_n^{(n)}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

在这种情况下，我们的几何论断是，n-维空间一般位置上的 n 个超平面把 n-维空间分成 2^n 个区域。由于此时只有 n 个（$n-1$）-维超平面，因此现在的一般位置指的是这 n 个超平面恰好有一个公共点。这个事实至少在 $k=1$，2 和 3 的情况是众所熟知的。考虑 3-维空间 $k=3$的情况。通过将每一点与三元数组（x_1，x_2，x_3）相联系而把空间坐标化。三个坐标平面 $x_1=0$，$x_2=0$ 和 $x_3=0$ 把空间分成 $2^3=8$ 个卦限（每个卦限通过描述每个 x_1，x_2，x_3 的符号来确定）。更一般地，n-维空间通过使 n-元组（x_1，x_2，…，x_n）与每一点联系而被坐标化。存在 n 个坐标平面，即 $x_1=0$，$x_2=0$，…，$x_n=0$，这些平面把 n-维空间分成 2^n 个“卦限”，它们通过描述每个 x_1，x_2，…，x_n 的符号来确定。这样的卦限之一就是所谓的非负卦限 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，…，$x_n\geqslant0$。

8.5　格路径和 Schröder 数

在这一节，我们把格路径的概念形式化，这个概念在第 3 章的一些练习和 8.1 节的一些例子中都见到过。

考虑具有整数坐标的坐标平面中点的整格(integral lattice)。给定 2 个这样的点 (p, q) 和 (r, s)，其中 $p \geqslant r$ 且 $q \geqslant s$，从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径是从 (r, s) 到 (p, q) 由水平步进(horizontal step) $H=(1, 0)$ 和垂直步进(vertical step) $V=(0, 1)$ 组成的路径。于是，从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径自 (r, s) 开始并使用单位水平线段和垂直线段到达 (p, q)。

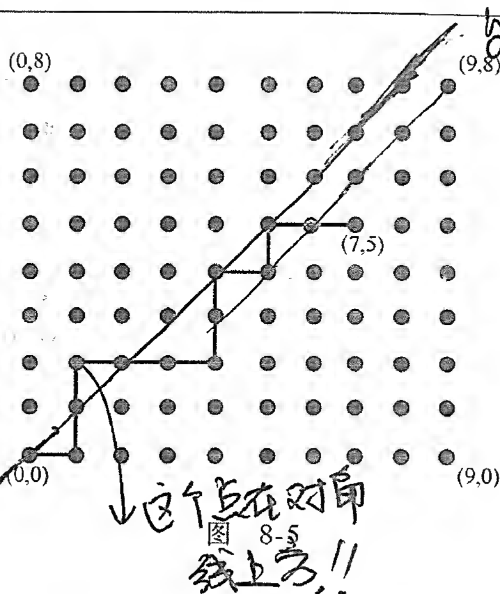


图 8-5

例　在图 8-5 中，我们显示一条从 $(0, 0)$ 到 $(7, 5)$ 的矩形格路径，它由 7 个水平步进和 5 个垂直步进组成。给定路径开始于 $(0, 0)$，那么它就由 7 个 H 和 5 个 V 的序列

$$H, V, V, H, H, H, V, V, H, V, H, H$$

唯一确定。

□

定理 8.5.1　从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径的条数等于二项式系数

$$\binom{p-r+q-s}{p-r}=\binom{p-r+q-s}{q-s}$$

证明： 在定理叙述中两个二项式系数是相等的。从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径由它的 $p-r$ 个水平步进 H 和 $q-s$ 个垂直步进 V 的序列唯一确定，而每一个这样的序列都确定一条从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径。因此，路径的条数等于 $p-r+q-s$ 个元素的排列数，在这些元素中 $p-r$ 个是 H 而 $q-s$ 个是 V。从 3.4 节可知，这个数是二项式系数 $\binom{p-r+q-s}{p-r}$。　□

考虑从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径，其中 $p \geqslant r$ 且 $q \geqslant s$。这样的路径恰好用到 $(p-r)+(q-s)$ 个步进，不失一般性可假设 $(r, q)=(0, 0)$。这是因为可以通过变换把 (r, s) 变换到 $(0, 0)$ 以及把 (p, q) 变换到 $(p-r, q-s)$，于是在从 (r, s) 到 (p, q) 的矩形格路径和从 $(0, 0)$ 到 $(p-r, q-s)$ 的矩形格路径之间得到一一对应。根据定理 8.5.1，如果 $p \geqslant 0$ 且 $q \geqslant 0$，则从 $(0, 0)$ 到 (p, q) 的矩形格路径条数等于

$$\binom{p+q}{p}=\binom{p+q}{q}$$

现在考虑从 $(0, 0)$ 到 (p, q) 的矩形格路径，我们限制路径在坐标平面的直线 $y=x$ 上或在它的下面。称这样的路径为下对角线矩形格路径(subdiagonal rectangular lattice path)。图 8-6 显示了一条从 $(0, 0)$ 到 $(9, 9)$ 的下对角线路径。

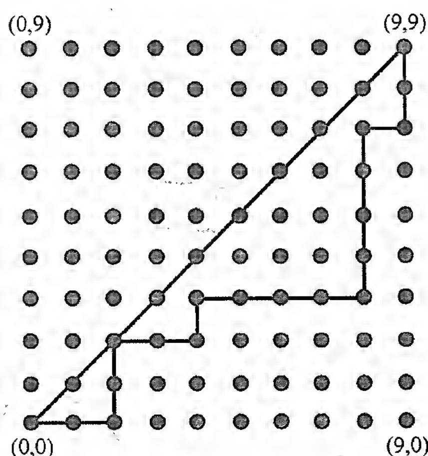


图　8-6

在 8.1 节，我们已经证明了下面的定理。

定理 8.5.2　令 n 为非负整数，则从 (0，0) 到 (n，n) 的下对角线矩形格路径的条数等于第 n 个 Catalan 数

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$ □

更一般地，只要 $p\geqslant q$，我们就可以计算从 (0，0) 到 (p，q) 的下对角线矩形格路径的条数。当然，如果 $q>p$，则不可能存在从 (0，0) 到 (p，q) 的下对角线矩形格路径。

定理 8.5.3　令 p 和 q 是两个正整数且 $p\geqslant q$，则从 (0，0) 到 (p，q) 的下对角线矩形格路径的条数等于

$$\frac{q-p+1}{q+1}\binom{p+q}{q}$$

证明：为了证明，我们将 8.1 节给出的证明推广，那个证明指出，Catalan 数 C_n 表示从 (0，0) 到 (n，n) 的下对角线矩形格路径的条数，特别是定理 8.1.1 的证明。为了得到结果，我们来确定从 (0，0) 到 (p，q) 穿过对角线的矩形格路径 γ 的条数 l (p，q)，然后用总的从 (0，0) 到 (p，q) 的矩形格路径的总条数 $\binom{p+q}{q}$ 减去 l (p，q)。数 l (p，q) 和从 (0，-1) 到 (p，$q-1$) 接触到（很可能穿过）对角线 $y=x$ 的矩形格路径 γ' 的条数相同。它通过将路径下移一个单位得到，因此将路径 γ 移动到路径 γ'，从而在两类路径之间建立了一一对应。

考虑一条从 (0，-1) 到 (p，$q-1$) 接触到对角线 $y=x$ 的路径 γ'。令 γ'_1 是 γ' 的子路径，它是从 (0，-1) 到 γ' 接触到的第一个对角线上的点 (d，d)。令 γ'_2 是 γ' 从 (d，d) 到 (p，$q-1$) 的子路径。将 γ'_1 关于直线 $y=x$ 反射，得到从 (-1，0) 到 (d，d) 的路径 γ_1^*。用 γ_2 接续 γ_1^*，得到从 (-1，0) 到 (p，$q-1$) 的路径 γ^*，如图 8-7 所示。

现在，从 (-1，0) 到 (p，$q-1$) 的每一条矩形格路径 θ 都必然穿过对角线 $y=x$，因为 (-1，0) 在对角线上方而 (p，$q-1$) 在对角线下方。如果我们将 θ 的从 (-1，0)

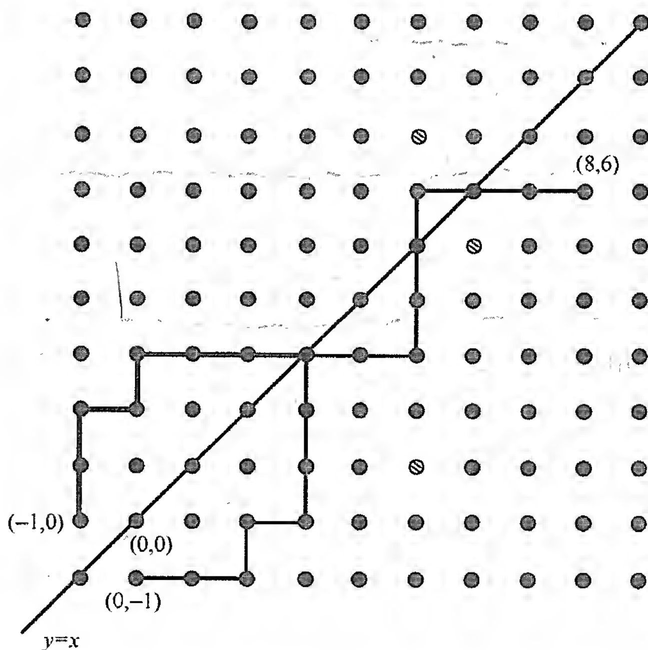


图 8-7

到第一个穿越点的部分反射，则得到从 (0, −1) 到 (p, $q-1$) 且触到直线 $y=x$ 的一条路径。这表明 γ'到γ^*之间一一对应，因此 l (p, q) 等于从 (−1, 0) 到 (p, $q-1$) 的矩形格路径的条数。由定理 8.5.1，有

$$l(p,q)=\binom{p+1+q-1}{q-1}=\binom{p+q}{q-1}$$

因此，从 (0, 0) 到 (p, q) 的下对角线矩形格路径的条数等于

$$\binom{p+q}{q}-l(p,q)=\binom{p+q}{q}-\binom{p+q}{q-1}=\frac{(p+q)!}{p!\ q!}-\frac{(p+q)!}{(q-1)!\ (p+1)!}$$

简化成

$$\frac{p-q+1}{p+1}\binom{p+q}{q}$$

□

现在考虑除允许水平步进 $H=(1, 0)$ 和垂直步进 $V=(0, 1)$ 外还允许对角步进 $D=(1, 1)$的格路径。令 p 和q 是两个非负整数，并令 K (p, q) 为由水平步进、垂直步进和对角步进构成的从 (0, 0) 到 (p, q) 的格路径的条数，再令 K (p, $q:rD$) 为恰好用到 r 个对角步进D 的路径的条数。于是，K (p, $q:0D$) 等于从 (0, 0) 到 (p, q) 的矩形格路径的条数；因此，由定理 8.5.1 有

$$K(p,q:0D)=\binom{p+q}{p}$$

若 $r>\min\{p, q\}$，则还有 K (p, $q:rD$) $=0$。

定理8.5.4　令 $r\leqslant\min\{p;\ q\}$，则

$$K(p,q:rD)=\binom{p+q-r}{p-r\quad q-r\quad r}=\frac{(p+q-r)!}{(p-r)!\ (q-r)!\ r!}$$

和

$$K(p,q)=\sum_{r=0}^{\min\{p,q\}}\frac{(p+q-r)!}{(p-r)!(q-r)!r!}$$

证明：用到 r 个对角步进 D 的从（0，0）到（p，q）的格路径必然用到 $p-r$ 个水平步进 H 和 $q-r$ 个垂直步进 V，并由其 $p-r$ 个 H、$q-r$ 个 V 以及 r 个 D 的序列唯一确定。于是，这样的路径的条数就是多重集

$$\{(p-r)\cdot H,(q-r)\cdot V,r\cdot D\}$$

的排列数。从第 3 章知道，该排列数为定理叙述中的多项式数。如果我们不指定对角步进数 r，那么从 $r=0$ 到 $r=\min\{p,\ q\}$ 将 $K(p,\ q:rD)$ 求和，可得到定理中所给出的 $K(p,\ q)$。　□

现在令 $p\geqslant q$ 并令 $R(p,\ q)$ 为从（0，0）到（p，q）的下对角线格路径的条数。另外，令 $R(p,\ q:rD)$ 为恰好使用 r 个对角步进 D 的从（0，0）到（p，q）的下对角线格路径的条数。我们有

$$R(p,q)=\sum_{r=0}^{q}R(p,q:rD)$$

定理 8.5.5　令 p 和 q 为两个正整数且 $p\geqslant q$，并令 r 为满足 $r\leqslant q$ 的非负整数。则

$$R(p,q:rD)=\frac{q-p+1}{q-r+1}\ \frac{(p+q-r)!}{r!\ (p-r)!\ (q-r)!}$$
$$=\frac{q-p+1}{q-r+1}\binom{p+q-r}{r\quad (p-r)\quad (q-r)}$$

和

$$R(p,q)=\sum_{r=0}^{q}\frac{q-p+1}{q-r+1}\ \frac{(p+q-r)!}{r!(p-r)!(q-r)!}$$

证明：由步进 H、V、D 组成的具有 r 个对角步进 D 的从（0，0）到（p，q）的下对角线格路径 γ 在除去 r 个对角步进 D 后变成从（0，0）到（$p-r$，$q-r$）的下对角线矩形格路径 π。反之，从（0，0）到（$p-r$，$q-r$）的下对角线矩形格路径 π，通过向水平步进和垂直步进的前、后、之间的 $p+q-2r+1$ 处地方任意插入 r 个对角步进，变成了从（0，0）到（p，q）带有 r 个对角步进的下对角线格路径。在 π 中插入对角步进 D 的方法数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_{p+q-2r+1}=r$$

非负整数解的个数，从 3.5 节可以知道这个数是

$$\binom{p+q-2r+1+r-1}{r}=\binom{p+q-r}{r} \tag{8-29}$$

这样，对应每条从（0，0）到（$p-r$，$q-r$）的下对角线矩形格路径，存在从（0，0）到（p，q）带有 r 个对角步进的下对角线格路径，路径的条数由式（8-29）给出。因此，有

$$R(p,q:rD)=\binom{p+q-r}{r}R(p-r,q-r:0D)$$

利用定理 8.5.3 可以得到

$$R(p,q:rD)=\binom{p+q-r}{r}\frac{q-p+1}{q-r+1}\binom{p+q-2r}{q-r}$$

简化成

$$\frac{q-p+1}{q-r+1}\frac{(p+q-r)!}{r!\ (p-r)!\ (q-r)!}=\frac{q-p+1}{q-r+1}\binom{p+q-r}{r\quad (p-r)\quad (q-r)}$$

从 $r=0$ 到 q 将 R（p，$q:rD$）求和，得到定理中给出的 R（p，q）的公式。 □

注意，在定理 8.5.5 中取 $r=0$，可得到定理 8.5.3。

现在设 $p=q=n$，称从（0，0）到（n，n）的下对角线格路径为 Schröder 路径（Schröder path）[⊖]。大 Schröder 数 R_n 是从（0，0）到（n，n）的 Schröder 路径的条数。于是，根据定理 8.5.5，有

$$R_n=R(n,n)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{n-r+1}\frac{(2n-r)!}{r!((n-r)!)^2} \tag{8-30}$$

大 Schröder 数的序列 R_0，R_1，R_2，…，R_n，…开始几个如下：

$$1,2,6,22,90,394,1806,\cdots$$

现在转而讨论小 Schröder 数，它由称为加括号（bracketing）的结构定义。令 $n\geqslant 1$ 并令 a_1，a_2，…，a_n 是 n 个符号的序列，我们把 8.2 节描述的 a_1，a_2，…，a_n 的乘法格式的概念推广到序列 a_1，a_2，…，a_n 的加括号的概念。对于乘法格式，有一种结合两个量的二元运算"×"，乘法格式就是一种往序列 a_1，a_2，…，a_n 中添加 $n-1$ 套括号的方法，使得每套括号对应两个量的一次乘法。在加括号结构中，一套括号可以括入任意个数的符号。为简明起见，现在将放弃符号"×"，因为它的使用引起某种二义性。在给出加括号的正式定义之前，我们对 $n=1$，2，3，4 列出括号，同时引入我们为简明的目的采用的某些简化做法。

例　如果 $n=1$，则只存在一种加括号的方法，即 a_1。为了准确，应该把它写成（a_1），不过为了简明，我们将除去单个元素两边的括号，让括号呈隐式状态。对于 $n=2$，只有一

⊖ 名称取自 Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder（1841—1902）。见 R. P. Stanley：Hipparchus，Plutarch，Schröder，and Hough，*American Mathematical Monthly*，104（1997），344-350。也见 L. W. Shapiro and R. A. Sulanke：Bijections for Schröder numbers，*Mathematics Magazine*，73（2000），369-376。这一节主要参考的是这两篇文章。

种加括号的方法，即（a_1a_2），或更简单地写成 a_1a_2。一般来说，我们把将剩余符号最后括起来所对应的最后一套括号省略。对于 $n=3$，有三种加括号的方法：

$$a_1a_2a_3,(a_1a_2)a_3,a_1(a_2a_3)^{㊀}$$

对于 $n=4$，有 11 种加括号的方法：

$$a_1a_2a_3a_4,(a_1a_2)a_3a_4,(a_1a_2a_3)a_4,a_1(a_2a_3)a_4,a_1(a_2a_3a_4),a_1a_2(a_3a_4)$$

和

$$((a_1a_2)a_3)a_4,(a_1(a_2a_3))a_4,a_1((a_2a_3)a_4),a_1(a_2(a_3a_4)),(a_1a_2)(a_3a_4)^{㊁}$$ □

现在给出对序列 a_1，a_2，…，a_n 加括号的正式递归定义。每个符号 a_i 本身是一种加括号的方式；由一对括号括起来的任意连续两个或更多添加的括号视为一次添加括号。于是，与 8.2 节乘法格式不同的是，一对括号未必对应两个符号的一次乘法。使用这个定义，可以通过以一切可能的方式执行下面的递归算法构造对序列 a_1，a_2，…，a_n 的所有加括号的方法。

构造添加括号的算法

从序列 a_1，a_2，…，a_n 开始。

ⅰ）令 γ 等于 $a_1a_2\cdots a_n$。

ⅱ）当 γ 至少含有 3 个符号时，做下列工作：

　a）添加一套括号括起任意 $k\geqslant 2$ 个连续符号，比如 $a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}$，形成一个新的符号（$a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}$）。

　b）用以（$a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}$）为一个新的符号的表达式代替 γ㊂。

ⅲ）输出当前的表达式。

a_1，a_2，…，a_n 的一个乘法格式是二元加括号操作（binary bracketing），即添加一套括号，该括号内的每套括号括入两个符号。

例　介绍该算法应用的例子。令 $n=9$，这样可以从 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ 开始。进行下列选择而完成加括号操作：

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 &\rightarrow a_1a_2a_3(a_4a_5a_6)a_7a_8a_9\\ &\rightarrow (a_1a_2)a_3(a_4a_5a_6)a_7a_8a_9\\ &\rightarrow (a_1a_2)a_3((a_4a_5a_6)a_7a_8)a_9\\ &\rightarrow (a_1a_2)(a_3((a_4a_5a_6)a_7a_8)a_9)\end{aligned}$$

㊀ 不做任何简化，这些加括号的方法可以写成（$a_1\times a_2\times a_3$），（（$a_1\times a_2$）$\times a_3$），（$a_1\times$（$a_2\times a_3$））。最后两个是乘法格式，因为它们中的每一对括号对应两个量的一次乘法。第一个括号不是乘法格式，因为一套括号括起来 3 个数。

㊁ 只有最后 5 个是乘法格式。

㊂ 不过要记住，如果我们选择整个符号序列，则不添加括号，因为 $k\geqslant 2$ 时不再将一个符号用括号括起来。

这种加括号的操作不是二元加括号操作，因为有一套括号插入多于两个的符号；例如，$(a_4a_5a_6)$ 就是这样，$((a_4a_5a_6)\ a_7a_8)$ 也是这样（它括起来 3 个符号：$(a_4a_5a_6)$、a_7 和 a_8，而 $(a_3((a_4a_5a_6)\ a_7a_8)\ a_9)$ 括起来的 3 个符号为 a_3、$((a_4a_5a_6)\ a_7a_8)$ 和 a_9。

□

对于 $n\geqslant 1$，小 Schröder 数 s_n 定义为 n 个符号的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的添加括号的方法数。我们已经看到，$s_1=1$，$s_2=1$，$s_3=3$ 和 $s_4=11$。事实上，序列 $(s_n: n=1, 2, 3, \cdots)$ 开始的几项为：

$$1,1,3,11,45,197,903,\cdots$$

将它和大 Schröder 数比较得到实验性的结论：对 $n\geqslant 1$ 且 $R_0=1$，$R_n=2s_{n+1}$。

下面通过计算大、小 Schröder 数的生成函数来给出这个结论的证明。

定理 8.5.6　小 Schröder 数序列 $(s_n: n\geqslant 1)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{4}\left(1+x-\sqrt{x^2-6x+1}\right)$$

证明：令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$ 为小 Schröder 数序列的生成函数，加括号的递归定义意味着

$$\begin{aligned} g(x) &= x+g(x)^2+g(x)^3+g(x)^4+\cdots \\ &= x+g(x)^2(1+g(x)+g(x)^2+\cdots) \\ &= x+\frac{g(x)^2}{1-g(x)} \end{aligned}$$

这给出

$$(1-g(x))g(x)=(1-g(x))x+g(x)^2$$

于是，有

$$2g(x)^2-(1+x)g(x)+x=0$$

因此，$g(x)$ 是二次方程

$$2y^2-(1+x)y+x=0$$

的一个解。该方程的两个解是

$$y_1(x)=\frac{(1+x)+\sqrt{(1+x)^2-8x}}{4}$$

和

$$y_2(x)=\frac{(1+x)-\sqrt{(1+x)^2-8x}}{4}$$

由于 $g(0)=0$，$y_1(0)=1/2$ 且 $y_2(0)=0$，于是有

$$g(x)=y_2(x)=\frac{1+x-\sqrt{x^2-6x+1}}{4}$$

□

在定理 8.5.6 中算出，生成函数 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n$ 可以用来得到有利于计算的小 Schröder 数的递推关系。回忆在定理 8.5.6 证明中出现的二次方程

$$2y^2-(1+x)y+x=0$$

如果对该方程关于 x 微分，则得到

$$4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y-(1+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0$$

因此，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-1}{4y-1-x}$$
$$=\frac{(x-3)y-x+1}{x^2-6x+1}$$

最后的等式可以通过交叉相乘然后利用二次方程 $2y^2-(1+x)y+x=0$ 而得到验证。现在我们有

$$(x^2-6x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-3)y+x-1=0 \tag{8-31}$$

在式(8-31)中代入 $y=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}s_nx^n$，经过简化后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)s_nx^{n+1}-3\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)s_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}ns_nx^{n-1}+x-1=0$$

它可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)s_nx^{n+1}-3\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)s_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)s_{n+2}x^{n+1}+x-1=0$$

置 x^{n+1} 的系数在 $n\geqslant1$ 时等于 0，可以得到

$$(n+2)s_{n+2}-3(2n+1)s_{n+1}+(n-1)s_n=0\quad(n\geqslant1) \tag{8-32}$$

递推关系（8-32）是具有非常数系数的 2 阶齐次线性递推关系。

现在我们计算大 Schröder 数序列的生成函数。

定理 8.5.7　大 Schröder 数序列 $(R_n:n\geqslant0)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}R_nx^n=\frac{1}{2x}\left(-(x-1)-\sqrt{x^2-6x+1}\right)$$

证明：令 $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}R_nx^n$ 为大 Schröder 数的生成函数。从 (0, 0) 到 (n, n) 的下对角线格路径是：ⅰ）空路径（若 $n=0$）；ⅱ）从一个对角步进 D 开始；ⅲ）从一个水平步进 H 开始。类型ⅱ）的路径条数等于从 (1, 1) 到 (n, n) 的下对角线格路径数，从而等于 R_{n-1}。类型ⅲ）的路径从水平步进 H 开始，然后跟着一条从 (1, 0) 到 (n, n) 的路径 γ

而不到达连接（1，1）到（n，n）的对角线的上面。由于 γ 终止于对角线上的点（n，n），因此存在 γ 在对角线上的第 1 个点（k，k），其中 $1\leqslant k\leqslant n$。由于（k，k）是 γ 在对角线上的第 1 个点，因此 γ 通过一个垂直步进 V 从点（k，$k-1$）到达（k，k）。γ 在从（1，0）到（k，$k-1$）的部分是一条格路径 γ_1，这条路径不会到连接（1，0）到（k，$k-1$）的对角线的上面去。γ 从（k，k）到（n，n）的部分是格路径 γ_2，它不会到连接（k，k）到（n，n）的对角线的上面去。γ_1 存在 R_{k-1}个选择，而 γ_2 存在 R_{n-k}个选择，从而类型 ⅲ）的格路径数等于 $R_{k-1}R_{n-k}$。求和，则得到递推关系

$$R_n = R_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}R_{n-k} \quad (n \geqslant 1) \tag{8-33}$$

或等价地

$$R_n = R_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} R_k R_{n-1-k} \quad (n \geqslant 1) \tag{8-34}$$

其中 $R_0 = 1$。于是，有

$$x^n R_n = x(x^{n-1}R_{n-1}) + x\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k R_k x^{n-1-k} R_{n-1-k}\right) \quad (n \geqslant 1)$$

由于 $R_0=1$，因此前面的方程意味着大 Schröder 数的生成函数 $h(x)$ 满足

$$h(x) = 1 + xh(x) + xh(x)^2 \tag{8-35}$$

因此，$h(x)$ 是二次方程

$$xy^2 + (x-1)y + 1 = 0$$

的一个解。这个二次方程的两个解是

$$y_1(x) = \frac{-(x-1)+\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$$

和

$$y_2(x) = \frac{-(x-1)-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$$

其中的第 1 个不可能是大 Schröder 数的生成函数，因为它不给出非负整数。于是有

$$h(x) = y_2(x) = \frac{1-x-\sqrt{x^2-6x+1}}{2x}$$

□

比较大、小 Schröder 数的生成函数，可以得到下列推论。

推论 8.5.8　大、小 Schröder 数的生成函数之间的关系为

$$R_n = 2s_{n+1} \quad (n\geqslant 1)$$

在 7.6 节和 8.1 节，我们考虑过借助于在其区域内部不相交的对角线将一个凸多边形划分成一个一个的三角形。现在指出，将一个具有 $n+1$ 条边的凸多边形区域如此三角形化的

方法数等于按特定顺序给出的 n 个数的乘法格式数，它们都等于 Catalan 数

$$C_{n-1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

这样，第 n 个 Catalan 数 C_n 等于将 $n+2$ 条边的凸多边形区域三角形化的方法数。现在可以给出对加括号操作的组合学几何解释。

考虑具有 $n+1$ 条边的凸多边形区域Π_{n+1}，以及序列 a_1，a_2，…，a_n。Π_{n+1}的基边标记为 base，而其余的 n 条边标记为 a_1，a_2，…，a_n，从基边的左侧标记为 a_1 的边开始按顺时针顺序进行标记。a_1，a_2，…，a_n 的添加括号操作与Π_{n+1}的剖分方式一一对应，这里，Π_{n+1}的剖分指的是通过插入在区域内部不相交的对角线所得到的将Π_{n+1}分成的区域的划分。与三角形化不同，将Π_{n+1}划分的区域不限制是三角形。

在图 8-8 中使用我们用算法构造的加括号的例子解释这种对应：

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 &\to a_1a_2a_3(a_4a_5a_6)a_7a_8a_9 \\ &\to (a_1a_2)a_3(a_4a_5a_6)a_7a_8a_9 \\ &\to (a_1a_2)a_3((a_4a_5a_6)a_7a_8)a_9 \\ &\to (a_1a_2)(a_3((a_4a_5a_6)a_7a_8)a_9) \end{aligned}$$

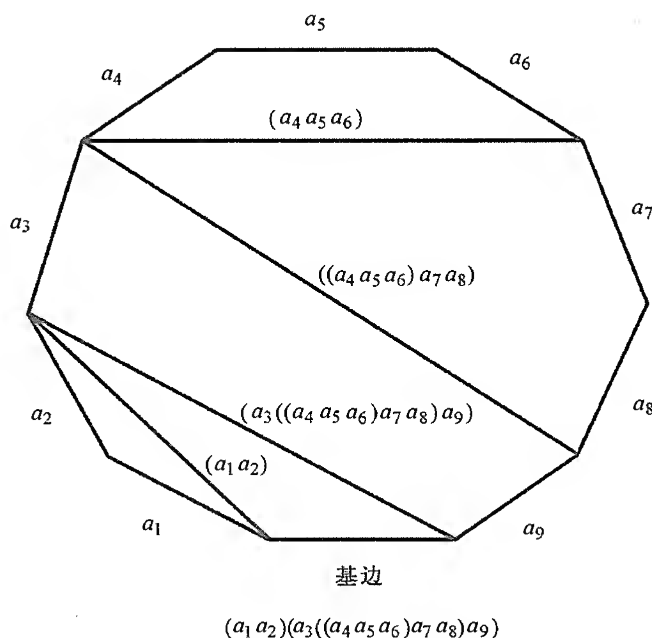


图 8-8

这个对应一般是成立的，它在加括号操作和剖分之间建立了一一对应，而且还证明了下面的定理。我们约定两条边的多边形区域是一条线段并且恰好只有一个剖分（即空剖分）。

定理 8.5.9 令 n 为一正整数，则 $n+1$ 条边的凸多边形区域的剖分数等于小 Schröder 数 s_n。 □

根据多边形区域Π_{n+1}可知，我们为 n 个符号构造添加括号的算法是显而易见的。

构造$\prod_{n+1}$的剖分的算法

从凸多边形区域$\prod_{n+1}$和基边开始，其边按照顺时针方向标记为 a_1，a_2，…，a_n。

i）令 $\Gamma=\prod_{n+1}$。

a）当 Γ 有多于3条边时，插入 Γ 的一条对角线，由此将 Γ 划分成两个区域。

b）用包含基边的部分代替 Γ（这部分将至少少一边）。

ii）输出完全剖分的多边形区域$\prod_{n+1}$。

8.6 练习题

1. 设在圆上选择 $2n$ 个（等间隔的）点。证明将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数等于第 n 个 Catalan 数 C_n。
2. 证明，能够由数 1，2，…，$2n$ 构造且满足

$$x_{11}<x_{12}<\cdots<x_{1n}$$
$$x_{21}<x_{22}<\cdots<x_{2n}$$

以及

$$x_{11}<x_{21},x_{12}<x_{22},\cdots,x_{1n}<x_{2n}$$

的2行 n 列数组

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

的个数等于第 n 个 Catalan 数 C_n。

3. 写出四个数的所有乘法格式并对应它们的凸五边形的三角形划分。
4. 确定对应下列乘法格式的凸多边形区域的三角形划分：

i）$(a_1\times(((a_2\times a_3)\times(a_4\times a_5))\times a_6))$

ii）$(((a_1\times a_2)\times(a_3\times(a_4\times a_5))\times((a_6\times a_7)\times a_8)))$

*5. 令 m 和 n 是非负整数且 $n\geqslant m$。有 $m+n$ 个人站成一排要进入剧院，入场费为50美分。这 $m+n$ 个人中 n 个人有50美分硬币，而 m 个人只有1美元钞票。售票处开门时使用一个空的现金收录机。证明，人们能够排队使得需要的时候总有零钱可找的列队方式数是

$$\frac{n-m+1}{n+1}\binom{m+n}{m}$$

（$m=n$ 的情况已在8.1节处理）

6. 设序列 h_0，h_1，…，h_n，…由 $h_n=2n^2-n+3$（$n\geqslant 0$）定义。确定其差分表，并求出 $\sum_{k=0}^{n} h_k$ 的公式。
7. 序列的一般项 h_n 是 n 的一个3次多项式。如果其差分表的第0行的前4个数是1，-1，

3，10，确定 h_n 及计算 $\sum_{k=0}^{n} h_k$ 的公式。

8. 求前 n 个正整数的五次幂的和。

9. 证明序列 h_0，h_1，…，h_n，…的下列 k 阶差分的公式：

$$\Delta^k h_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} h_{n+j}$$

10. 如果 h_n 是 n 的 m 次多项式，证明使得

$$h_n = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + \cdots + c_m \binom{n}{m}$$

的常数 c_0，c_1，…，c_m 是唯一确定的(参见定理 8.2.2)。

11. 计算第二类 Stirling 数 $S(8, k)$ $(k=0, 1, \cdots, 8)$。

12. 证明第二类 Stirling 数满足关系

ⅰ) $S(n,1)=1(n\geqslant 1)$

ⅱ) $S(n,2)=2^{n-1}-1(n\geqslant 2)$

ⅲ) $S(n,n-1)=\binom{n}{2}(n\geqslant 1)$

ⅳ) $S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}(n\geqslant 2)$

13. 令 X 是 p-元素集并令 Y 是 k-元素集。证明，把 X 映射到 Y 的函数 f：$X \to Y$ 的个数等于

$$k!\ S(p,k)=S^{\#}(p,k)$$

*14. 求出并验证

$$\sum_{k=0}^{n} k^p$$

含有第二类 Stirling 数的一般公式。

15. 将 n 个元素的集合划分成不可辨别的 k 个盒子（其中一些可能是空盒）的划分的个数是 k^n。通过用不同的方式计算证明

$$k^n = \binom{k}{1} 1!\ S(n,1) + \binom{k}{2} 2!\ S(n,2) + \cdots + \binom{k}{n} k!\ S(n,n)$$

（如果 $k>n$，定义 $S(n, k)$ 为 0。）

16. 计算 Bell 数 B_8（参见练习题 11）。

17. 计算直到 $n=7$ 的第一类 Stirling 数 $s(n, k)$ 的三角形。

18. 作为 n 的多项式，对 $k=1, 2, \cdots, 7$ 写出 $[n]_k$。

19. 证明第一类 Stirling 数满足

ⅰ) $s(n,1)=(n-1)!\ (n\geqslant 1)$

ⅱ) $s(n,n-1)=\binom{n}{2}(n\geqslant 1)$

20. 验证 $[n]_n=n!$，作为 n 的多项式，用第一类 Stirling 数写出 $n!$。对于 $n=6$ 直接写出之。

21. 对每一个整数 $n=1, 2, 3, 4, 5$，构造通过优超确定偏序的 n 的分拆集 $\mathcal{P}_n$ 的图。

22. ⅰ) 计算 p (6) 并构造通过优超确定偏序的集 $\mathcal{P}_6$ 的图。

    ⅱ) 计算 p (7) 并构造通过优超确定偏序的集 $\mathcal{P}_7$ 的图。

23. 有限集上的全序有唯一的极大元（最大的元素）和唯一的极小元（最小的元素）。在 $\mathcal{P}$ (n) 上字典序的最大分拆和最小分拆是什么？

24. 有限集上的偏序可以有多个极大元和极小元。在通过优超确定偏序的 n 的分拆集 $\mathcal{P}_n$ 中，证明存在唯一的极大元和唯一的极小元。

25. 令 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 是互异的正整数，并令 $q_n=q_n$ $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 等于 n 的所有部分取自 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 的分拆数。定义 $q_0=1$。证明 $q_0, q_1, \cdots, q_n, \cdots$ 的生成函数是

$$\prod_{k=1}^{m}(1-x^{t_k})^{-1}$$

26. 确定下列每个分拆的共轭分拆：

    ⅰ) $12=5+4+2+1$

    ⅱ) $15=6+4+3+1+1$

    ⅲ) $20=6+6+4+4$

    ⅳ) $21=6+5+4+3+2+1$

    ⅴ) $29=8+6+6+4+3+2$

27. 对每个整数 $n>2$；确定 n 的至少有两个部分的自共轭分拆。

28. 证明共轭倒转优超的顺序；就是说，如果 λ 和 μ 是 n 的两个分拆并且 λ 被 μ 所优超，则 μ^* 被 λ^* 优超。

29. 计算 k-维空间被 $k-1$ 个一般位置上的超平面所分成的区域的个数 $h_{k-1}^{(k)}$。

30. 利用递推关系 (8-32) 计算小 Schröder 数 s_8 和 s_9。

31. 利用递推关系 (8-34) 计算大 Schröder 数 R_7 和 R_8。验证 $R_7=2s_8$，$R_8=2s_9$，如推论 8.5.8 所述。

32. 利用大 Schröder 数的生成函数计算前几个大 Schröder 数。

33. 利用小 Schröder 数的生成函数计算前几个小 Schröder 数。

34. 证明，大 Schröder 数 R_n 等于从 (0, 0) 到 $(2n, 0)$ 步进为 (1, 1) 和 (1, −1) 从不会到水平轴上方的格路径数（有时称这些路径为 Dyck 路径）。

*35. 大 Schröder 数 R_n 表示从 (0, 0) 到 (n, n) 的下对角线格路径数。小 Schröder 数表示 $n+1$ 条边的凸多边形区域剖分数。由于对 $n\geqslant 1$，有 $R_n=2s_{n+1}$，因此从 (0, 0) 到 (n, n) 的下对角线格路径数和具有 $n+1$ 条边的凸多边形区域的剖分数一样多。求出这些格路径和这些部分之间的一一对应。

第 9 章　二分图中的匹配

我们以下面三个问题开始本章的内容。

问题 1　考虑其上有某些方格禁止落子的 m 行 n 列棋盘。能够被放到棋盘上的非攻击型车的最多个数是多少?

在前面几章，我们考虑了把 n 个非攻击型车放到 n 行 n 列棋盘上的方法数的计数问题。这个数当时假设是正的。现在我们不仅关心有没有可能把 n 个非攻击型车放到棋盘上，而且更一般地，还关心能够放到棋盘上的非攻击型车的最大个数的问题。

问题 2　再考虑其上有某些方格被禁止落子的 m 行 n 列棋盘。能够放到棋盘上的多米诺牌使得每一块多米诺牌都盖住两个允许落子的方格，并且没有两块多米诺牌交叠（盖住同一个方格）的最大牌数是多少?

在第 1 章，我们考虑过这个问题的特殊情况，它涉及具有禁止落子方格的棋盘什么时候有完美覆盖的问题。对于完美覆盖，必须让每一个允许落子的方格都要被多米诺牌盖住。如果 p 是允许落子的方格总数，那么存在完美覆盖当且仅当 p 是偶数，而问题 2 的答案是 $p/2$。

问题 3　一个公司有 n 个工作空缺，每项工作需要具有一定资格条件的人承担。今有 m 个人申请这 n 项工作。如果一个工作空缺只能由一名满足该工作资格条件的人填补，那么从这 m 个申请人中能够填补的工作的最大个数是多少?

前两个问题表面上属于娱乐的性质。然而，第三个问题显然具有更严肃和实用的特点。实际上，问题 1 和问题 3 是同一个抽象问题的不同表述，而问题 2 则是其特殊情况。在这一章，我们要解决这个抽象问题，从而解决问题 1、问题 2 和问题 3。当然，在问题 3 中，不仅要知道能够填补的工作的最大个数，而且还要知道如何指派这些申请人去做这些工作（对问题 1 和问题 2 有类似的评注），因此，我们也将讨论如何求得使最大数目的工作被申请人填补的指派方式。

9.1　一般问题表述

问题 1、2 和 3 中的每一个都可归入下面的结构。令

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$$

和

$$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

分别是有 m 个元素和 n 个元素的有限集。假设集合 X 和 Y 没有公共元素，即

$$X\cap Y=\varnothing$$

令 Δ 是元素对

$$e=\{x,y\}$$

的集合，其中，x 是 X 的元素，y 是 Y 的元素。三元组

$$G=(X,\Delta,Y)$$

叫做二分图[⊖]。$X\cup Y$ 的元素叫做 G 的顶点，而 X，Y 叫做 G 的顶点的二分化(分成两部分的划分)。尽管我们通常把 X 的顶点写在左边，把 Y 的顶点写在右边，但还是把 X，Y 和 Y，X 看作是相同的二分化，而不区分(X，Δ，Y)和(Y，Δ，X)。集 Δ 中的元素对 $e=\{x,y\}$ 叫做 G 的边。注意，每条边$e=\{x,y\}$都是两个顶点的集合，一个顶点 x 来自 X，另一个顶点 y 来自 Y。我们说边 e 连接顶点 x 和 y，并说顶点 x 和 y 与边 e 关联。于是，二分图可描述为

ⅰ)顶点的集合；

ⅱ)将该顶点集分成两部分的一个划分；

ⅲ)连接一部分的一个顶点与另一部分的一个顶点的边的集合。

例　令$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，并令

$$\Delta=\{\{x_1,y_1\},\{x_1,y_3\},\{x_2,y_1\},\{x_3,y_2\},\{x_3,y_3\},\{x_4,y_3\}\}$$

顶点 x_1 与两条边，即$\{x_1, y_1\}$和$\{x_1, y_3\}$关联。顶点 y_3 与三条边关联。我们可以将二分图$G=(X,\Delta,Y)$画出，如图 9-1 所示。

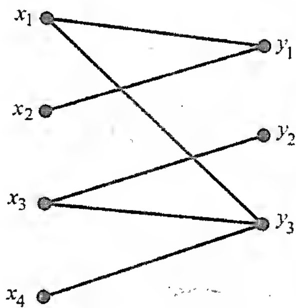


图　9-1

在这个图中，每个顶点用一个圆点表示，X 的顶点放在左边，Y 的顶点放在右边。每一条边用连接其所含二顶点的线段来表示，但要记住，一条边恰由两个顶点组成。 □

每一个二分图都可以用类似于前面例子中的方法画出。因此，我们把 X 的顶点叫做左顶点，把 Y 的顶点叫做右顶点。每条边连接一个左顶点和一个右顶点。按照不区分（X，Δ，Y）和（Y，Δ，X）的约定，我们把 X 叫做右顶点的集合，把 Y 叫做左顶点的集合也无不可。

令 $G=$（X，Δ，Y）为一个二分图。G 的匹配定义为边集 Δ 的子集 M，具有性质：M 中没有两条边有公共顶点。因此，如果 M 是一个匹配，那么每一个左顶点至多与 M 的一条边关联，类似地，每一个右顶点至多与 M 的一条边关联。在图 9-1 所画出的二分图中，三条边

$$\{x_1,y_3\},\{x_2,y_1\},\{x_3,y_2\}$$

形成大小为 3 的匹配（注意：在图中，边 $\{x_1, y_3\}$ 和 $\{x_2, y_1\}$ 相交无关紧要，而这个交点也确实不是图 9-1 所确定的二分图抽象定义的一部分。我们关心的是这三条边没有两条交于一个顶点上）。

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1		×			
x_2			×		×
x_3	×		×		×
x_4	×				

图　9-2

例　考虑 4 行 5 列棋盘，其禁止落子位置如图 9-2 所示。

把这个棋盘与二分图作如下联系。对应于棋盘的每一行，有一个左顶点：

⊖　正如名称所意味的，二分图是称为图的更一般对象的实例。一般的图在后面几章讨论。

$$x_i \text{ 是对应行 } i \text{ 的左顶点} \quad (i=1,2,3,4)$$

对应于棋盘的每一列，有一个右顶点：

$$y_j \text{ 是对应列 } j \text{ 的右顶点} \quad (j=1,2,3,4,5)$$

左顶点和右顶点的集分别为

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \text{和 } Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$$

在 G 中，用一条边连接顶点 x_i 和顶点 y_j 当且仅当在行和列交叉处的方格是允许落子的。令 Δ 是用这种方法所得到的边的集，然后，由

$$G=(X,\Delta,Y)$$

定义一个二分图 G。G 的边的集 Δ 与棋盘允许落子的方格一一对应。对应于图 9-2 中的棋盘的图 G 如图 9-3 所示。

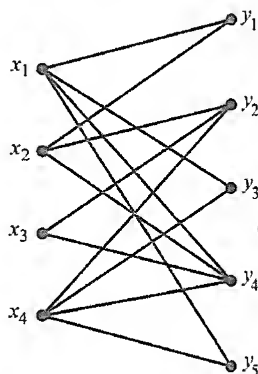


图 9-3

考虑 G 的匹配

$$M=\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_4\},\{x_4,y_2\}\}$$

M 的三条边中的每一条都对应棋盘一个允许落子的方格。由于 M 没有两条边共一个左顶点，这些方格也就没有两个在同一行上。由于 M 没有两条边共一个右顶点，这些方格也就没有两个在同一列上。因此，如果把车放在对应于 M 的边的三个方格上，那么，在棋盘上就有三个非攻击型车。反之，棋盘上非攻击型车的集合给出了二分图的一个匹配。因此，在棋盘上非攻击型车的集合与相联系的二分图的匹配的集合之间存在着一一对应。在这个一一对应中，非攻击型车的个数等于匹配的边数。 □

将对前面例子的讨论应用到一般的情况。我们可以把二分图 $G=(X, \Delta, Y)$ 与带有禁止落子位置的任意 m 行 n 列棋盘 B 联系起来，叫做车-二分图。这个图有对应棋盘的行的顶点 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 以及对应列的顶点 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$。顶点对 $\{x_i, y_j\}$ 是 Δ 的边当且仅当在行 i 和列 j 相交处的方格是允许落子的。棋盘 B 上的非攻击型车对应二分图 G 中的匹配。此外，能够被放到棋盘 B 上的非攻击型车的最大个数等于二分图 G 的匹配的最大边数。每一个二分图都是带有禁止落子位置的某块棋盘的车-二分图（见练习 3)。

若 G 是任意二分图，我们现在定义

$$\rho(G)=\max\{|M|: M \text{ 是匹配}\}$$

为 G 的最大匹配 M 的边数。问题 1 等价于确定对应带有禁止落子位置的棋盘的车-二分图 G 的 ρ (G)。

例 考虑其方格交错涂成黑色或白色的 4 行 5 列棋盘，然后，禁止在与上一例相同的方格处（见图 9-2）落子。为了辨别，我们将可以落子的白方格标记为 w_1，w_2，$\cdots$，w_7，黑色方格标为 b_1，b_2，$\cdots$，b_6，如图 9-4 所示。

w_1	×	w_2	b_1	w_3
b_2	w_4	×	w_5	×
×	b_3	×	b_4	×
×	w_6	b_5	w_7	b_6

图　9-4

除黑白标签外，这是与图 9-2 相同的棋盘。我们用不同的二分图 $G=(X, \Delta, Y)$ 与这个棋盘相联系。这次我们令

$$X=\{w_1,w_2,\cdots,w_7\}$$

是白方格的集合，令

$$Y=\{b_1,b_2,\cdots,b_6\}$$

是黑方格的集合。于是 G 的左顶点是白方格，右顶点是黑方格。在 Δ 中存在连接白方格 w_i 和黑方格 b_j 的边 $\{w_i, b_j\}$，当且仅当这两个方格有一条公共边。因此，两个方格被 G 中的边连接当且仅当一张多米诺牌同时盖住这两个方格。于是，G 的每一条边对应棋盘上可能的一张多米诺牌，而棋盘上每一张可能的多米诺牌对应一条边，刚才定义的二分图如图 9-5 所示。

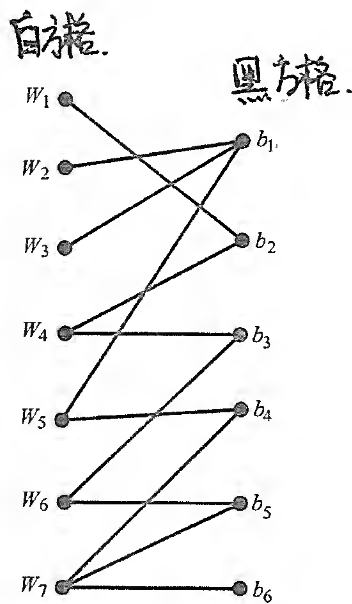


图　9-5

考虑 G 的匹配

$$M=\{\{w_1,b_2\},\{w_3,b_1\},\{w_6,b_3\},\{w_7,b_4\}\}$$

M 的每一条边对应一张多米诺牌，因为在 M 中没有两边共一个顶点，所以也就没有两张这样的多米诺牌交叠。反之，从棋盘上不相交叠的多米诺牌得到 G 的一个匹配。因此，在棋盘上不相交叠的多米诺牌的集合以所指出的方式与棋盘相联系的二分图的匹配集合之间存在一一对应。在这个一一对应中，多米诺牌数等于匹配的边数。　□

更一般地，将前面例子的讨论应用到确定放到带有禁止落子位置的棋盘 B 上的不交叠多米诺牌的最大数的问题中。我们将给定的带有禁止落子位置的 m 行 n 列棋盘 B 与多米诺二分图 $G=(X, \Delta, Y)$ 相联系，其中

$$X=\{w_1,w_2,\cdots,w_p\}$$

是白方格的集合，

$$Y=\{b_1,b_2,\cdots,b_q\}$$

是黑方格的集合，而在 Δ 中存在一条边 $\{w_i, b_j\}$ 当且仅当一张多米诺牌能够同时覆盖 w_i 和 b_i。棋盘 B 上不交叠多米诺牌对应二分图 G 的匹配边。能够放到棋盘上的不交叠多米诺牌的最大个数等于 G 的匹配中的最大边数 $\rho(G)$。因此，问题 2 等价于确定对应带有禁止位置棋盘的多米诺二分图 G 的 $\rho(G)$。与车-二分图不同的是，不是每一个二分图都是带有禁止落子位置的棋盘的多米诺二分图。这是因为，在棋盘上，一个方格最多只能和另外四个方

格有公共边。这意味着，在对应的多米诺二分图中，每个顶点最多只能与四条边关联（见练习题 4）。

例　四个人 x_1，x_2，x_3，x_4 申请五项工作 y_1，y_2，y_3，y_4，y_5。设

x_1 适合做 y_1，y_3，y_4，y_5；

x_2 适合做 y_1，y_2，y_4；

x_3 适合做 y_2，y_4；

x_4 适合做 y_2，y_3，y_4，y_5。

我们用一种看起来相当自然的方式构造二分图 $G=(X, \Delta, Y)$。令 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 是（申请工作）人的集合，令 $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ 是工作的集合，在 Δ 中放入边 $\{x_i, y_j\}$ 当且仅当 x_i 适合做工作 y_j。由此得出的二分图与图 9-3所示的二分图相同（即图 9-2中棋盘的车-二分图）。在二分图 G 的匹配与适合做工作的人的指派之间存在一一对应。例如，匹配

$$M=\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_4\},\{x_4,y_2\}\}$$

对应指派

人	指派	工作
x_1	→	y_1
x_2	→	y_4
x_4	→	y_2

在把非攻击型车放到图 9-2 棋盘上的问题中，这个匹配对应于将车放在第 1 行第 1 列、第 2 行第 4 列以及第 4 行第 2 列的那些交叉方格上。于是我们看到，指派人做其适合的工作实际上与把车放到棋盘上使得没有车能够攻击另外的车一样是同一个抽象数学问题！ □

鉴于上面的详细讨论，可以把二分图 (X, Δ, Y) 与任何一组人 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和任何一组工作 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 联系起来，其中存在连接 x_i 和 y_j 的边 $\{x_i, y_j\}$ 当且仅当人 x_i 适合于工作 y_j。在 G 的匹配和适合于工作的人的可能的指派之间存在着一一对应。匹配 M 中没有两条边与 X 的同一顶点关联的事实意味着每个人最多被指派一项工作。M 中没有两条边与 Y 的同一顶点关联的事实意味着两个不同的人不被指派同一项工作。这个指派问题也可以看作是一个非攻击型车问题：如果人 x_i 不适合于工作 y_j，那么第 i 行第 j 列的交叉方格就是禁止落子的方格，否则就是允许落子的方格。

总而言之，所有三个引论性问题都是关于确定二分图 (X, Δ, Y) 中匹配的边的最大条数 $\rho(G)$ 的问题。下一节我们讨论如何求出 $\rho(G)$。

9.2　匹配

考虑二分图

$$G=(X,\Delta,Y)$$

其中

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\text{和 }Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

回忆在匹配中边的最大条数是由 $\rho(G)$ 来表示的。我们的目标不仅是要确定 $\rho(G)$，而且还要确定满足

$$|M^*|=\rho(G) \tag{9-1}$$

的匹配 M^*。

根据鸽巢原理，匹配最多可以有 m 条边，如果要是多于 m 条边，就会有两条边与同一个左顶点关联。类似地，一个匹配最多可以有 n 条边。于是，得到简单的不等式

$$\rho(G)\leqslant\min\{m,n\} \tag{9-2}$$

每个匹配 M 均满足 $|M|\leqslant\rho(G)$。我们称满足（9-1）的匹配 M^* 为最大匹配，即它是 G 的所有匹配中具有最大可能的边数的匹配 M。如果我们知道 $\rho(G)$，我们就可以通过数任一匹配 M 的边数 $|M|$ 并验证是否 $|M|=\rho(G)$ 来确定 M 是否是最大匹配。

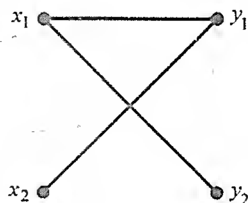


图　9-6

例　考虑图 9-6 中的二分图 G。边 $\{x_1, y_2\}$ 和 $\{x_2, y_1\}$ 形成大小为 2 的匹配，由于 $\rho(G)$ 不能多于 2，我们有 $\rho(G)=2$。注意，边 $\{x_1, y_1\}$ 确定具有一条边的匹配 M。不存在为了得到具有两条边的匹配而往该匹配 M 加上另一条边的可能。因此，不能得出这样的结论：仅仅知道不可能通过添加更多的边来扩大匹配便断定这个匹配有最大的边数。 □

现在讨论在不知道 $\rho(G)$ 值的情况下，识别一个匹配是否是最大匹配的问题。当然，一旦能够断定某个匹配是最大匹配，就会知道 $\rho(G)=|M|$，并确定 $\rho(G)$。

令 u 和 v 是二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 的任意两个顶点。连接 u 和 v 的**路径**是互异顶点（除去 u 可能等于 v 外）的序列：

$$\gamma: u=u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{p-1},u_p=v \tag{9-3}$$

使得任意两个相邻的顶点被一条边所连接。于是，为使（9-3）是一个路径，

$$\{u_0,u_1\},\{u_1,u_2\},\cdots,\{u_{p-1},u_p\} \tag{9-4}$$

必须都是 Δ 中的边。式（9-4）中的边叫做**路径 γ 的边**。路径 γ 的长就是它的边数 p。顶点 u 和 v 叫做路径的**端点**。路径中的顶点必须交错地为左顶点和右顶点。端点既可以都是左顶点，又可以都是右顶点，还可以一个是左顶点，一个是右顶点。如果在式（9-3）中 $u=v$，那么路径就叫做**圈**。二分图中的圈必须要有偶数长。

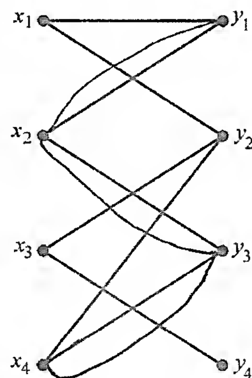


图　9-7

例　在图 9-7 所画出的二分图 G 中，

$$x_1,y_2,x_3,y_4$$

是连接 x_1 和 y_4 的长为 3 的路径；

$$y_1,x_2,y_3,x_4$$

是连接 y_1 和 x_4 的路径；而

$$x_3, y_2, x_4, y_3, x_2$$

是连接 x_3 和 x_2 的路径。还有，

$$x_1, y_1, x_2, y_3, x_4, y_2, x_1$$

是长为 6 的圈。 □

现在令 M 为二分图$G=(X,\Delta,Y)$中的一个匹配。令 $\overline{M}$ 是M 的补集，即 G 的不属于M 的边的集合。令 u 和 v 为顶点，其中，u 和 v 一个是左顶点，一个是右顶点。连接 u 和 v 的路径 γ 如果满足下列性质，则是对于匹配 M 的交错路径，简称 M-交错路径：

ⅰ）γ 的第一、第三、第五、…边不属于匹配 M（从而属于 $\overline{M}$）。

ⅱ）γ 的第二、第四、第六、…边属于匹配 M。

ⅲ）u 和 v 都不与匹配M 的边关联。

注意，M 交错路径 γ 的长是奇数 $2k+1$，$k\geqslant 0$，同时注意 γ 的 $k+1$ 条边是 $\overline{M}$ 的边，而 γ 的 k 条边是M 的边。进一步引入记号如下：

M_γ 表示 γ 的属于M 的边的集

和

$\overline{M}_\gamma$ 表示 γ 的不属于M 的边的集

从我们上面的讨论得出

$$|\overline{M}_\gamma| = |M_\gamma| + 1$$

例 考虑图 9-7 中的二分图 G。集

$$M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_4\}\}$$

是三条边的匹配。路径

$$\gamma: u = x_4, y_3, x_2, y_1, x_1, y_2 = v$$

是 M-交错路径。我们有

$$M_\gamma = \{\{x_2, y_3\}, \{x_1, y_1\}\}$$

和

$$\overline{M}_\gamma = \{\{x_4, y_3\}, \{x_2, y_1\}, \{x_1, y_2\}\}$$

如果从 M 中取走M_γ 的边并用$\overline{M}_\gamma$ 的边代替之,则得到四条边的匹配

$$\begin{aligned} M' &= (M - M_\gamma) \cup \overline{M}_\gamma \\ &= \{\{x_3, y_4\}, \{x_4, y_3\}, \{x_2, y_1\}, \{x_1, y_2\}\} \end{aligned}$$

□

如上例所述,如果 M 是一个匹配并且存在M-交错路径 γ,那么

$$(M - M_\gamma) \cup \overline{M}_\gamma$$

是比 M 多一条边的匹配，因此，M 不是最大匹配。现在我们证明，反过来也成立，即匹配 M 不是最大匹配的唯一可能是存在M-交错路径。

定理 9.2.1　令 M 为二分图 $G=(X, \Delta, Y)$ 中的一个匹配。则 M 是最大匹配当且仅当不存在 M-交错路径。

证明： 正如上面所观察的，如果 M 是最大匹配，那么不存在 M-交错路径。

为了建立逆命题，现在设 M 不是最大匹配并证明存在 M-交错路径。令 M' 为满足

$$|M'|>|M|$$

的匹配，我们考虑二分图

$$G^{*}=(X,\Delta^{*},Y)$$

其中

$$\Delta^{*}=(M-M')\cup(M'-M)$$

二分图 G^{*} 具有与 G 相同的左顶点和右顶点。G^{*} 的边是 G 的那些或者属于 M 但不属于 M'（即 $M-M'$ 的边）或者属于 M' 但不属于 M（即 $M'-M$ 的边）的边。于是，为了得到 G^{*}，从 G 中除去所有那些既不属于 M 也不属于 M' 的边以及既属于 M 又属于 M' 的边。由于 $|M'|>|M|$，我们有

$$|M'-M|>|M-M'| \tag{9-5}$$

二分图 G^{*} 具有如下性质：它的每一个顶点最多与两条边关联；由于 M 是匹配故 G^{*} 的每一个顶点最多与 $M-M'$ 的一条边关联，由于 M' 是匹配故 G^{*} 的每一个顶点最多与 $M'-M$ 的一条边关联。G^{*} 的这个性质意味着 G^{*} 的边集可以被划分成一些路径和圈。在这个划分的每个路径和圈中，边在 $M-M'$ 和 $M'-M$ 之间交替。这些路径和圈为下列四种类型。这个划分中的路径具有性质：它的第一个顶点和最后一个顶点均只与 G^{*} 的一条边关联。

类型 1　其第一条和最后一条边都在 $M'-M$ 中（如图 9-8 所示。在这个图和其他的图中，粗线表示 M 的边）。这些路径具有奇数长并且含有 M' 的边比含 M 的边多一条。在类型 1 的路径间包含有长为 1 的路径，这些路径的第一条边和最后一条边是同一条边。

类型 2　其第一条和最后一条边都在 $M-M'$ 中（如图 9-9 所示）。这些路径也有奇数长，但它们包含的 M 的边比所含 M' 的边多一条。

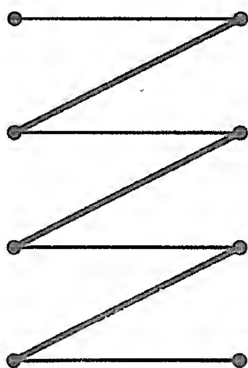


图 9-8　1 型路径

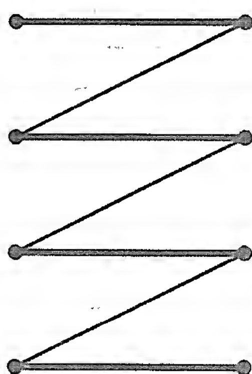


图 9-9　2 型路径

类型 3 其第一条边在 $M-M'$ 中而最后一条边在 $M'-M$ 中（或是相反的情况）。如图 9-10 所示，这些路径具有偶数长并且含有 M 的边数与含有 M' 的边数相同。

类型 4 一个圈（如图 9-11 所示）。这些圈具有偶数长且包含 M 的边数与所含 M' 的边数相同。

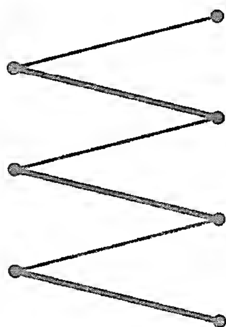


图 9-10 3 型路径

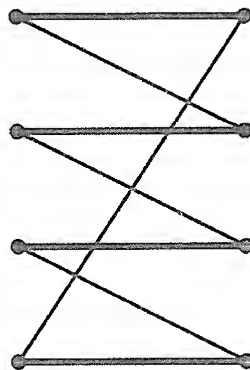


图 9-11 4 型路径

在 2 型路径中，$M-M'$ 的边比 $M'-M$ 的边多，但在类型 3 的路径和类型 4 的圈中，$M-M'$ 的边数与 $M'-M$ 的边数相同。在类型 1 的路径中，$M'-M$ 的边比 $M-M'$ 的边多。根据式（9-5），$M'-M$ 的边比 $M-M'$ 的边多。因此，在 G^* 中必然存在类型 1 的路径。但是类型 1 的路径根据定义是 M-交错路径。因此，如果匹配 M 不是最大匹配，则存在 M-交错路径。 □

定理 9.2.1 在二分图的所有匹配中刻画了最大匹配的特征。它的作用在于，给定一个匹配 M，为了确定 M 是否为最大匹配，只需要搜索一个 M-交错路径 γ 即可。如果找到这样一个路径 γ，那么通过从 M 除去 γ 中属于 M 的这些边并用 γ 不属于 M 的边代替之，就得到匹配 M'，它有比 M 多的边。如果不能找到 M-交错路径 γ，那么根据定理 9.2.1，M 就是最大匹配。

定理 9.2.1 的不足在于上面最后的叙述。在搜索 M-交错路径并且没找到以后，我们需要知道，没有找到是因为它不存在而不是因为寻找得不够彻底！我们不能期望为了确定是否存在 M-交错路径而考察所有的路径。这样的工作一般会需要太多的时间和努力。我们寻找的是建立容易验证一个匹配是最大匹配的方法。换句话说，我们寻找一种能够容易地验证匹配是最大匹配的认证方法。我们现在讨论这样一种认证方法。

令 $G=(X, \Delta, Y)$ 是一个二分图。G 的顶点集 $X\cup Y$ 的子集 S 叫做一个覆盖，如果 G 的每一边至少在 S 中有它的两个顶点中的一个顶点：

$$\{x,y\}\cap S\neq\varnothing \quad 对\ \Delta\ 中所有的\ \{x,y\}$$

G 的左顶点集 X 是一个覆盖，这是因为每一边都有一个左顶点。右顶点集也是一个覆盖。G 的所有顶点的集 $X\cup Y$ 当然也是覆盖。然而，我们的兴趣却在于那些小的覆盖。

例 令 G 是图 9-12 中描述的二分图。除覆盖 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 和 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 外，还有只含三个顶点的覆盖 $S=\{x_1, x_3, y_2\}$。S 是覆盖意味着，不存在左顶点是 $\{x_2, x_4\}$ 之一且右顶点是 $\{y_1, y_3, y_4\}$ 之一的边，而这很容易通过检查来验证。 □

我们定义 G 的覆盖数为

$$c(G)=\min\{|S|:S\text{ 是 }G\text{ 的覆盖}\}$$

即 G 的覆盖的最小顶点个数。每一个覆盖 S 均满足

$$|S|\geqslant c(G)$$

我们把 G 的满足

$$|S|=c(G)$$

的覆盖 S，即具有最小数目的顶点的覆盖，叫做最小覆盖。

例　令 G 是图 9-12 所描绘的二分图。正如已经观察到的

$$S=\{x_1,x_3,y_2\}$$

是 G 的一个覆盖。直接验证可知 $c(G)=3$ 且 S 是最小覆盖：如果我们在覆盖中不加入 x_1，那么三个顶点 y_1，y_2 和 y_4（到 x_1 的边所连的顶点）就只能都在该覆盖中。如果在覆盖中不加入 y_2，那么就只能把三个顶点 x_1，x_2 和 x_4 都放进该覆盖中。由于 $\{x_1, y_2\}$ 不是覆盖，因此每个覆盖至少包含三个顶点。 □

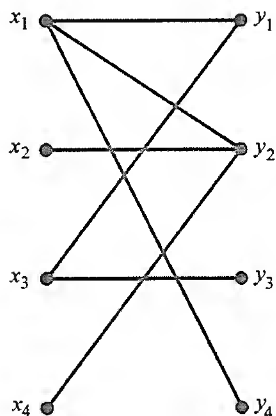


图　9-12

在下面的引理中，我们证明匹配数不可能超过覆盖数。

引理 9.2.2　如果 G 是一个二分图，那么

$$\rho(G)\leqslant c(G) \tag{9-6}$$

即 G 的匹配的边的最大数目不超过 G 的覆盖的顶点的最小数目。

证明：令 G 为二分图 (X, Δ, Y)，并令 S^* 为满足 $|S^*|=c(G)$ 的一个覆盖。令 M 为一匹配。由于 S^* 是覆盖，于是 M 的每一条边至少有 S^* 的一个顶点。设 $|M|>|S^*|$。则由鸽巢原理，M 有两条不同的边包含 S^* 的同一个顶点。但这与 M 是匹配的事实矛盾。因此

$$|M|\leqslant|S^*|=c(G)$$ □

引理 9.2.2 有下列推论。假设不管用什么方法在二分图中找到了一个匹配，而且认为它有可能是最大匹配。如果找出一个覆盖 S 使得

$$|M|=|S|$$

那么 M 就是最大匹配（且 S 是最小覆盖）。这个事实是不等式

$$c(G)\leqslant|S|=|M|\leqslant\rho(G) \tag{9-7}$$

的一个推论，它意味着 $c(G)\leqslant\rho(G)$。应用式(9-6)，我们断言 $c(G)=\rho(G)$。而式(9-7)意味着

$$|M|=\rho(G)\text{和}|S|=c(G)$$

即 M 是最大匹配且 S 是最小覆盖。因此，在这种情况下，S 作为一种证据证明不存在比 M 边数还多的匹配。

例　继续考察图 9-12 的二分图，我们看到

$$M=\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\}\}$$

是三条边的匹配。业已得知 $S=\{x_1,x_3,y_2\}$ 是有三个顶点的覆盖。于是

$$3=|M|\leqslant\rho(G)\leqslant c(G)\leqslant|S|=3$$

我们得到的是纯粹的等式，从而 M 是最大匹配，S 是最小覆盖，并且 $\rho(G)=c(G)=3$。

□

现在开始证明，我们总能够找到一个匹配和一个最小覆盖满足

$$|M|=|S| \tag{9-8}$$

由此，我们将可以像上面那样得出结论：$\rho(G)=c(G)$，M 是最大匹配而 S 则是最小覆盖。因此，我们搜索它们的证据就是与匹配 M 有同样大小的覆盖 S。

令 $G=(X,\Delta,Y)$ 是一个二分图，并令 M 为 G 中的匹配。我们描述系统搜索 M-交错路径的算法。该算法或者产生 M-交错路径（并且我们使用定理 9.2.1 的证明来获得比 M 多含一条边的匹配），或者不产生 M-交错路径，但却产生 $|M|=|S|$ 的最小覆盖 S（于是我们可以断定，M 是最大匹配而 S 则是 M 的凭证；因为没有这样的交错路径存在，所以算法不产生 M-交错路径）。下述算法是 Ford 和 Fulkerson 的更一般的网络算法的特例[⊖]。

匹配算法

令 $G=(X,\Delta,Y)$ 是一个二分图，其中，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$。令 M 为 G 中的任一匹配。

ⅰ）将 X 的所有不与 M 的边关联的顶点标上（*），并称所有的顶点为未被扫描的。转到ⅱ）。

ⅱ）如果在上一步没有新的标记加到 X 的顶点上，则停止。否则转到ⅲ）。

ⅲ）当存在 X 被标记但未被扫描的顶点时，选择一个这样的顶点，比如 x_i，用（x_i）标记 Y 的所有那些被不属于 M 的边连到 x_i、以前尚未标记的顶点。现在，顶点 x_i 是被扫描的。如果不存在被标记但未被扫描的顶点，则转到ⅳ）。

ⅳ）如果在步骤ⅲ）没有新的标记被标到 Y 的顶点上，则停止。否则，转到ⅴ）。

ⅴ）当存在 Y 被标记但未被扫描的顶点时，选择 Y 的一个被标记但未被扫描的顶点，比如 y_j，并且用（y_j）标记 X 的任一被属于 M 的边连到 y_j 但是以前尚未标记的顶点。现在，顶点 y_j 是被扫描的。如果不存在被标记但未被扫描的顶点，则转到ⅱ）。

由于每一个顶点最多被标记一次且由于每一个顶点最多被扫描一次，本匹配算法在有限步内终止。存在两种可能性需考虑：

突破点： 存在 Y 的被标记的点，该点不与 M 的边关联。

非突破点： 该算法已经终止，但突破点还未出现；也就是说，Y 的每一个被标记的顶点都与 M 的某边关联。

在突破点的情况，该匹配算法已经成功找到一个 M-交错路径 γ。γ 的一个顶点就是 Y

⊖ L.R.Ford, Jr. and D.R.Fulkerson: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton (1962)。也见 12.2 节。

的被标记但不与 M 任何边关联的顶点 v。γ 的另一个端点是用（*）标记的 X 的顶点 u（因此它不与 M 的任何边关联）。M-交错路径 γ，可以通过从顶点 v 开始并往回经过这些标记直到带有标记（*）的顶点 u 而得到。利用突破点和 M-交错路径 γ，我们能够得到（如定理 9.2.1 的证明）比 M 多一条边的匹配。

如果非突破点发生，则我们指出这是因为 M 是最大匹配，即按照定理 9.2.1，不存在任何 M-交错路径。因此，恰在 M 不是最大匹配时突破点出现，并当突破点出现时，我们有一种方法得到 M-交错路径，从而得到比 M 多一条边的匹配。

定理 9.2.3　设非突破点在匹配算法中发生。令 X^{un} 由 X 的所有未被标记的顶点组成，并令 Y^{lab} 由 Y 的所有被标记的顶点组成。则下列两个结论均成立：

ⅰ）$S = X^{un} \cup Y^{lab}$ 是二分图 G 的最小覆盖。

ⅱ）$|M| = |S|$ 且 M 是最大匹配。

证明：假设存在一条边 $e = \{x, y\}$，它的两个顶点均不属于 S，通过推出矛盾来证明 S 是一个覆盖。因此，假设 x 在 $X - X^{un}$ 中，y 在 $Y - Y^{lab}$ 中，$e = \{x, y\}$ 是一条边。由于 x 不在 X^{un} 中，x 就是被标记的；由于 y 不在 Y^{lab} 中，y 则是未被标记的。e 或者属于 M 或者不属于 M。如果 e 不属于 M，那么在使用算法的第 ⅲ）步时，y 就会得到一个标记 (x)，矛盾。现在假设 e 属于 M。由于 x 与 M 的边 e 关联，由 ⅰ）步得到，x 的标记不是（*）。但这就从算法得出，x 有标记（y）（见第 ⅴ）步）。再由该算法，仅当 y 已经被标记过的时候顶点 y 才可以把标记（y）给 X 的一个顶点 x。由于 y 没有被标记，又得出矛盾。由于两种可能情况均导致矛盾，因此，我们断定 S 是一个覆盖。

我们通过证明 $|M| = |S|$ 来完成定理的证明。如我们已经阐述的，这个等式还意味着 S 是最小覆盖及 M 是最大匹配。在 S 的顶点与 M 的边之间建立一一对应，从而证明 $|M| = |S|$。令 y 是 Y^{lab} 被标记的顶点。由于突破点没有出现，y 与 M 的边且恰好是一条边比如 $\{x, y\}$ 关联。由算法的第 ⅴ）步，x 得到标记(y)，因此 x 不在 X^{un} 中。这样，Y^{lab} 的每一个顶点与 M 的一条边关联，这些边的另一顶点属于 $X - X^{un}$。现在考虑 X^{un} 的顶点 x'。由于 x' 未被标记，从第 ⅰ）步得出，x' 与 M 的一条边且恰好只与 M 的一条边，比如 $\{x', y'\}$ 关联（否则 x' 就会有标记(*)）。顶点 y' 不会在 Y^{lab} 中，因为我们上面已经证明 M 唯一一条与 Y^{lab} 中的顶点关联的边已经在 $X - X^{un}$ 中有另一个顶点。因此，我们就证明了，对于 $X^{un} \cup Y^{lab}$ 的每一个顶点，存在 M 的唯一一条包含该顶点的边，并且所有这些边都是互异的。因此

$$|S| = |X^{un} \cup Y^{lab}| \leqslant |M|$$

从而我们断定 $|S| = |M|$。 □

下列重要的推论叫做 König 定理。

推论 9.2.4　令 $G = (X, \Delta, Y)$ 是一个二分图。则

$$\rho(G) = c(G)$$

即匹配的边的最大条数等于覆盖的顶点的最小个数。

证明：根据引理 9.2.2，

$$\rho(G) \leqslant c(G)$$

由定理 9.2.3，存在匹配 M 和覆盖 S，使得 $|M|=|S|$。因此

$$\rho(G)\geqslant|M|=|S|\geqslant c(G)$$

于是我们断定 $\rho(G)=c(G)$。 □

匹配算法可以用来得到二分图 (X,Δ,Y) 的最大匹配如下。我们首先以贪婪的方式选择一个匹配：取任一边 e_1，然后取任意一条不与 e_1 相邻的边 e_2，再取任意一条不与 e_1 和 e_2 相邻的边 e_3，如此继续进行直到再无法选出为止[㊀]。我们称所得匹配为 M^1，应用匹配算法对其继续进行。如果非突破点产生，根据定理 9.2.3，M^1 就是最大匹配。如果突破点出现，则得到匹配 M^2，它的边比 M^1 的边多。现在我们再用匹配算法于 M^2。以这种方法得到匹配序列 M^1，M^2，M^3，…，每一个都比前一个有更多的边。应用有限步匹配算法之后，得到匹配 M^k，匹配算法对它将产生非突破点，从而，M^k 是最大匹配。

例 确定在图 9-13 里二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 中的最大匹配。选择边 $\{x_2,y_2\}$，$\{x_3,y_3\}$ 和 $\{x_4,y_4\}$，得到边数为 3 的匹配 M^1。M^1 的边在图 9-13 中是粗线段。现在应用匹配算法于 M^1，得到在图 9-13 的结果如下：

a） ⅰ）步：顶点 x_1，x_5 和 x_6，它们不与 M^1 的边关联，以（*）标记之。

b） ⅲ）步：依次扫描 x_1，x_5 和 x_6，并用（x_1）标记 y_3，（x_5）标记 y_4。由于连接到 x_6 的所有顶点都已经有一个标记，Y 则没有顶点被标记（x_6）。

c） ⅴ）步：扫描在b)中被标记的顶点 y_3 和 y_4，并用(y_3)标记 x_3，用(y_4)标记 x_4。

d） ⅲ）步：扫描在c)中被标记的顶点 x_3 和 x_4，并用（x_3）标记 y_2。

e） ⅴ）步：扫描在d)中被标记的顶点 y_2，并用（y_2）标记 x_2。

f） ⅲ）步：扫描在e)中被标记的顶点 x_2，并用（x_2）标记 y_1，y_5 和 y_6。

g） ⅳ）步扫描在f)中被标记的顶点 y_1，y_5 和 y_6，发现不可能再有新的标记。

算法至此结束，由于我们已经标记 Y 的不与 M^1 的边关联的顶点，事实上，三个顶点 y_1，y_5 和 y_6 都具有这个性质，我们得到突破点[㊁]。如果我们用标记作向导从 y_1 向后追踪，则找到 M^1-交错路径

$$\gamma: y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_1$$

有

$$M_\gamma^1=\{\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\}\}$$

和

$$\overline{M}_\gamma^1=\{\{y_1,x_2\},\{y_2,x_3\},\{y_3,x_1\}\}$$

此时

$$\begin{aligned}M^2&=(M^1-M_\gamma^1)\cup(\overline{M}_\gamma^1)\\&=\{\{x_4,y_4\},\{y_1,x_2\},\{y_2,x_3\},\{y_3,x_1\}\}\end{aligned}$$

㊀ 或许，因为再无明显的选择，我们停止。

㊁ 只要突破点得到，算法即可终止。

为四条边的匹配。

现在对 M^2 使用匹配算法。顶点的最后标记如图 9-14 所示。在这种情况下突破点没有出现。根据定理 9.2.3，M^2 是大小为 4 的最大匹配，而大小为 4 的集合

$$S=\{x_2, x_3, y_3, y_4\}$$

是最小覆盖，它是由 X 的未被标记的顶点和 Y 的被标记的顶点组成。 □

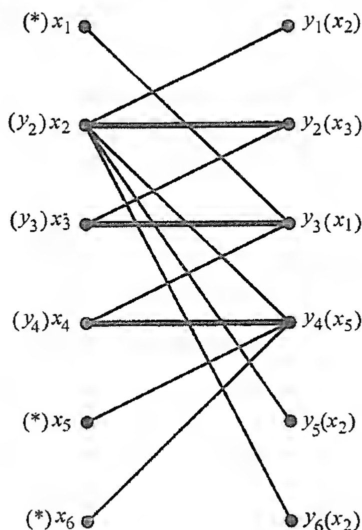


图 9-13

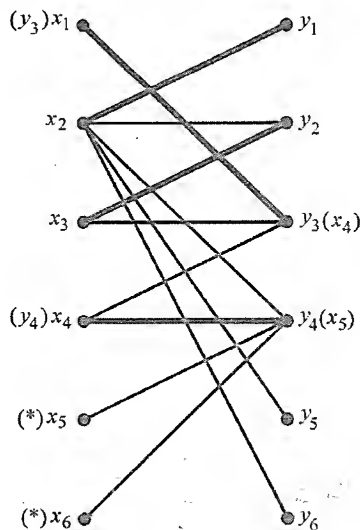


图 9-14

匹配理论随着本节的深入解决了本章开始讨论的每个问题：问题 1、问题 2 和问题 3。

令 $G=(X, \Delta, Y)$ 为一个二分图，使左顶点集 X 和右顶点集 Y 有同样的大小 n。G 中的匹配最多可以包含 n 条边。G 中具有 n 条边的匹配 M 叫做完美匹配。X 的每一个顶点和 Y 的每一个顶点恰与完美匹配 M 的一条边关联。因此，完美匹配建立了 X 的顶点和 Y 的顶点间的一一对应

$$f: X \to Y$$

其中

$$f(x)=y \quad 若\{x, y\}是 M 的边$$

从推论 9.2.4 得到，G 有完美匹配当且仅当不存在少于 n 个顶点的集覆盖 G 的所有的边。在一些实例中这个条件不难验证。

如果二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 的每一个顶点恰与 p 条边关联，那么它就叫做是 p 阶正则的。如果 G 是 $p\geqslant 1$ 阶正则的，那么 X 和 Y 必须有相同的大小 n。这是因为通过数左顶点的边数，我们看到 G 的边的总数是 $p|X|$，而数右顶点则边的总数是 $p|Y|$。使这两数相等，得到

$$p|X|=p|Y|$$

由于 $p\neq 0$，得到 $|X|=|Y|$。

定理 9.2.5　$p\geqslant 1$ 阶正则的二分图 $G=(X, \Delta, Y)$ 总有完美匹配。

证明： 令 X 和 Y 每个含 n 个顶点。令 S 为 G 的任一覆盖。因为 S 是覆盖，所以 G 的每一边至少与 S 的一个顶点关联。由于 G 是 p 阶正则的，S 的每一顶点恰与 p 条边关联。

因此，G 的边的总数至多是 $p|S|$[1]。但是，G 的边的总数是 pn。因此

$$p|S| \geqslant pn$$

于是

$$|S| \geqslant n$$

因此，G 的每个覆盖至少有 n 个顶点，由推论 9.2.4，G 有美完匹配。 □

例 在一次聚会上，有 n 个小伙和 n 位姑娘。设存在一个正整数 p，使得每个小伙事先已被介绍给 p 位姑娘，而每位姑娘事先已被介绍给 p 个小伙。证明小伙和姑娘可以配成对使得每一对小伙和姑娘相识。

构造二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 如下。左顶点集 X 由 n 个小伙组成，右顶点集 Y 由 n 位姑娘组成。将一个小伙与一位姑娘用一条边连接当且仅当他们相识。题目的假设意味着 G 是正 p 阶正则的。根据定理 9.2.5，G 有完美匹配 M，该匹配描述了相识配对。 □

9.3 互异代表系统

令 Y 为一有限集，令 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 为 Y 的 n 个子集的族[2]。Y 的元素的族 $(e_1, e_2,\cdots,e_n)$ 叫做 $\mathcal{A}$ 的代表系统，如果

$$e_1 \text{ 在 } A_1 \text{ 中}, e_2 \text{ 在 } A_2 \text{ 中}, \cdots, e_n \text{ 在 } A_n \text{ 中}$$

在代表系统中，元素 e_i 属于 A_i 从而"代表"集 A_i。如果在代表系统中元素 e_1，e_2，…，e_n 是互异的，则 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 称为互异代表系统(system of distinct representatives)，简记为 SDR。

例 令 (A_1,A_2,A_3,A_4) 是由

$$A_1=\{a,b,c\}, A_2=\{b,d\}, A_3=\{a,b,d\}, A_4=\{b,d\}$$

定义的集 $Y=\{a,b,c,d,e\}$ 的子集族。则 (a,b,b,d) 是代表系统，而 (c,b,a,d) 是 SDR。 □

非空集合的族 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 总有代表系统。我们只需从每一个集合中取出一个元素就可得到代表系统。然而，族 $\mathcal{A}$ 未必有 SDR，即使族中的所有集合都是非空的。例如，如果在族中存在两个集合，比如 A_1 和 A_2，每个集合只含一个元素，而 A_1 的元素与 A_2 的元素相同；即

$$A_1=\{x\}, A_2=\{x\}$$

则族 $\mathcal{A}$ 没有 SDR。这是因为在任何代表系统中，x 必然同时代表 A_1 和 A_2，从而 SDR 不存在（无论 A_3，…，A_n 等于什么）。然而，一个族 $\mathcal{A}$ 可能因某些更复杂的原因而没有 SDR。

例 令族 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 由

$$A_1=\{a,b\}, A_2=\{a,b\}, A_3=\{a,b\}, A_4=\{a,b,c,d\}$$

定义。则 $\mathcal{A}$ 没有 SDR，因为在任何代表系统中，A_1 必然被 a 或 b 代表，A_2 必然被 a 或 b

---

[1] 边数至多是 $p|S|$ 的原因是，某些边可能两个端点都在 S 中，而这些边被数了两次。

[2] 族和序列实际上是一样的。这里的项是集合的序列。与数列一样，不同的项可以相等；就是说，这些集不必是不同的。

代表，A_3 必然被 a 或 b 代表。于是我们有两个元素即 a 和 b，三个集合即 A_1，A_2 和 A_3 的代表均必须从这两个元素中抽取。根据鸽巢原理，这三个集合 A_1，A_2 和 A_3 中的两个必然被同一个元素所代表。 □

通过推广上面例子中的结论得到 SDR 存在的必要条件。令 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 为集的族。k 是一个整数，满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 。为使 $\mathcal{A}$ 有 SDR，族 $\mathcal{A}$ 的每 k 个集必须至少包含 k 个元素。假设相反，即存在 k 个集，比如 A_1，A_2，$\cdots$，A_k，它们共含有少于 k 个元素：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=F$ ，其中

$$|F|<k$$

此时，k 个集 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 中每一个的代表必须从集 F 的元素中抽取。由于 F 少于 k 个元素，由鸽巢原理得到，该 k 个集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 中有两个必然用同一个元素作为代表。因此，不可能存在 SDR。我们把这个必要条件总结成下列引理。

引理 9.3.1 *为使集合的族 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 有 SDR，必须下列条件成立：*

(MC)：*对每个 $k=1$，2，$\cdots$，n 以及从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选择 k 个互异指标 i_1，i_2，$\cdots$，i_k 的每一种选择，都有*

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k \tag{9-9}$$

引理 9.3.1 中的条件（MC）常被叫做成婚条件，其理由源自下列互异代表系统问题娱人的和经典的讨论。

例（配对问题） 有 n 位男士和 m 位女士，所有的男士都急于想结婚。如果对谁娶谁没有限制，那么只要求女士人数 m 至少与男士人数 n 一样多就可以使所有男士结上婚。但是，我们一般预料每一位男士会坚持与配偶的某种和谐从而会排除某些女士作为可能的配偶。这样，每一位男士就会从这些女士中得到可接受的配偶的某个集合（女士也可以从她发现不可接受的任一位男士可能的配偶集中删除她自己）。令 $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是女士的子集的族，其中 A_i 表示第 i 位男士可接受的配偶集（$i=1$，2，$\cdots$，n）。男士们的完备婚姻对应（A_1，A_2，$\cdots$，A_n）的一个 SDR（w_1，w_2，$\cdots$，w_n）。它对应第 i 位男士娶女士 w_i（$i=1$，2，$\cdots$，n）。由于 w_i 是在 A_i 中，w_i 就是第 i 位男士可接受的一位配偶。既然 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是互异代表系统，那就不会有两个男士娶同一位女士[⊖]。在本例的前后叙述中，成婚条件断言，任意 k 位男士的可能配偶集合取并后列出的名单至少含有 k 位女士，而这是这些男士完备婚姻的必要条件。 □

成婚条件(9-9)不仅是 SDR 存在的必要条件，还是充分条件。因此，它提供了 SDR 存在的特征。我们从推论 9.2.4 得到成婚条件对于 SDR 的充分性。

将二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 与集 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 的每一个子集族 $\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 相联系。取 X 等于集 $\{1,2,\cdots,n\}$，即族 $\mathcal{A}$ 的成员的下标集，并由

$$\Delta=\{\{i,y_j\}:y_j\text{ 在 }A_i\text{ 中}\}$$

定义边集 Δ。于是，顶点 i 和 y_j 被 G 的边连接当且仅当 y_j 是集合 A_i 的元素。换句话说，顶点 i 被边连接到 Y 的那些可能作为 A_i 的代表的元素上。$\mathcal{A}$ 的代表系统对应 n 条边的集，该

⊖ 我们忘了说，不允许女士拥有两位配偶！

集与 X 的每一顶点关联，但是，由于在代表系统中同一个元素可能代表两个不同的集合，因此，可能有多于一条的边与 Y 的一个顶点关联。一个 SDR 对应一个 n 条边的集，它与 X 的每一个顶点关联，但最多与 Y 的每个顶点关联。因此我们断言：集族$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$有 SDR 当且仅当相关的二分图 G 有 n 条边的匹配M。由于 X 只有 n 个顶点，故 G 不能有多于 n 条边的匹配。因此，$\mathcal{A}$有 SDR 当且仅当$\rho(G)=n$ 。

定理 9.3.2　集族$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$有 SDR 当且仅当成婚条件（MC）成立。

证明：根据引理 9.3.1 我们知道，如果$\mathcal{A}$有 SDR，则成婚条件成立。现在假设成婚条件成立，并证明$\mathcal{A}$有 SDR。令$G=(X,\Delta,Y)$为与族$\mathcal{A}$相关的二分图，如本定理前面的一段所述。现在需要证明$\rho(G)=n$ 。根据推论 9.2.4，可以断定，如果证明$c(G)=n$ ，就是说，如果证明不存在少于 n 个顶点组成的G 的覆盖，则$\rho(G)=n$ 。假设相反，则存在 G 的覆盖S，且$|S|<n$。令

$$S=S_1\cup S_2$$

其中，$S_1=S\cap X$ 是S 中的左顶点，$S_2=S\cap Y$ 是S 的右顶点。由于$|S|<n$ ，有

$$|S_1|+|S_2|<n \tag{9-10}$$

因为 S 是覆盖，所以不存在连接 $X-S_1$ 的顶点和 $Y-S_2$ 的顶点的边。令

$$k=|X-S_1|=n-|S_1|$$

并令

$$X-S_1=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$$

由于不存在连接 $X-S_1$ 的顶点和 $Y-S_2$ 的顶点的边，因此$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$都是$S_2$ 的子集。于是

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}\subseteq S_2$$

进而

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\leqslant|S_2|$$

由式(9-10)

$$|S_2|<n-|S_1|=k$$

因此

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|<k$$

与成婚条件矛盾。于是，不存在 G 的少于 n 个顶点的覆盖 S，$\rho(G)=n$ ，从而$\mathcal{A}$有 SDR。□

以大致相同的方法，推论 9.2.4 可以用来得到下列具有 SDR 的族中的最大数目的集合的特征。

定理 9.3.3　令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$为集 Y 的子集族，则$\mathcal{A}$的能够选择以使得有 SDR 的子集的最大个数 ρ 等于由表达式

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+n-k$$

对于$k=1,2,\cdots,n$的所有选择和取自$\{1,2,\cdots,n\}$的k个互异下标i_1，i_2，…，i_k的所有选择得到的最小值。

定理 9.3.3 定义的数ρ是与族$\mathcal{A}$相联系的二分图G的匹配数$\rho(G)$。

例 通过

$$A_1=\{a,b,c\},A_2=\{b,c\},A_3=\{b,c\},$$
$$A_4=\{b,c\},\quad A_5=\{c\},\quad A_6=\{a,b,c,d\}$$

定义$\{a,b,c,d,e,f\}$的子集族$\mathcal{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$。我们有

$$|A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=|\{b,c\}|=2$$

于是

$$|A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|+6-4=4$$

因此，对于$n=6$和$k=4$，由定理 9.3.3 可知，至多可以选择$\mathcal{A}$的四个集合，使它们有 SDR。由于(A_1,A_2,A_5,A_6)有(a,b,c,d)作为 SDR，于是 4 是具有 SDR 的集合的最多个数。用婚姻的术语来说就是，如果每一位男士都要娶他可以接受的女士的话，则 4 是能够结婚的男士的最大人数。 □

9.4 稳定婚姻

在这一节[㊀]，我们考虑前一节讨论的配对问题的一种变形。

在一个社团里有n位女士和n位男士。每位女士按照其对每位男士作为配偶的偏爱程度给每位男士排名次。不允许并列名次出现，因此，如果一位女士在两位男士之间分不出差别，我们还是要求她表示出某种偏爱。这种偏爱应是纯顺序的，这样每位女士将这些男士排成顺序 1，2，…，n。类似地，每位男士也将这些女士排成顺序 1，2，…，n，使这些男士和女士配成完备婚姻的方式有n！种。如果存在两位女士A和B及两位男士a和b，使得

ⅰ)A和a结婚；

ⅱ)B和b结婚；

ⅲ)A更偏爱b（名次更优先）而非a；

ⅳ)b更偏爱A而非B。

那么我们说这个完备婚姻是不稳定的。因此，在不稳定的完备婚姻中，A和b可能背着别人相伴逃走，因为他俩都认为，与当前配偶比起来每人都更偏爱各自的新伴侣。因此，一男一女以对他们双方都有利的方式共同行动而打乱婚姻的情况下，这种完备婚姻是“不稳定的”。如果完备婚姻不是不稳定的，则称其为稳定的。由此产生的第一个问题是：是否总存在稳定的完备婚姻？

再一次用二分图来为这个问题建立数学模型。令$G=(X,\Delta,Y)$是一个二分图，其中

㊀ 本节部分内容根据的是 D. Gale 和 L. S. Shapely 的文章“College admissions and the stability of marriage”，*American Mathematical Monthly*，69（1962），9-15。此处所考虑的问题的综合处理见 D. Gusfield 和 R. W. Irving 的书 *The stable marriage problem*：*Structure and algorithms*，The MIT Press，Cambridge（1989）。

$$X=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$$

为 n 位女士的集合，而

$$Y=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$$

为 n 位男士的集合。将每一个女-顶点（女士在左边）连接到每一个男-顶点（男士在右边）。所得的二分图在包含双方顶点集之间的所有可能的边的意义下是完备的㊀。对应每条边$\{w_i, m_j\}$，存在一个数对 p，q，其中 p 表示在 w_i 给男士排序中 m_j 的位置，q 表示在 m_j 给女士排序中 w_i 的位置。这些女士和男士的完备婚姻对应二分图 G 的（n 条边的）完美匹配。

在记法上，使用优先秩评定矩阵所提供的模型会更方便。该矩阵为一 n 行 n 列的阵列，n 行对应每一位女士 w_1，w_2，…，w_n，n 列对应每一位男士 m_1，m_2，…，m_n。在第 i 行和第 j 列交叉位置处放上分别代表 w_i 给 m_j 排的名次和 m_j 给 w_i 排的名次的数对 p，q。一个完备婚姻对应该矩阵上 n 个位置的集合，该集合恰好包含每一行的一个位置和每一列的一个位置㊁。

例 令 $n=2$，并令优先秩评定矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,2 & 2,2 \\ 2,1 & 1,1 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是，第一行第一列处的元素 1，2 指的是 w_1 已将 m_1 放到她备选配偶表的第一位，而 m_1 则将 w_1 放到他的表中的第二位上。存在两个可能的完备婚姻：

ⅰ）$w_1 \longleftrightarrow m_1$，　$w_2 \longleftrightarrow m_2$

ⅱ）$w_1 \longleftrightarrow m_2$，　$w_2 \longleftrightarrow m_1$

容易看出，第一个完备婚姻是稳定的。由于 w_2 更偏爱 m_2 而非她的配偶 m_1，m_2 更偏爱 w_2 而非他的配偶 w_1，因此，第二个婚姻是不稳定的。 □

例 令 $n=3$，并令优先秩评定矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1,\ 3 & 2,\ 2 & 3,\ 1 \\ 3,\ 1 & 1,\ 3 & 2,\ 2 \\ 2,\ 2 & 3,\ 1 & 1,\ 3 \end{bmatrix} \tag{9-11}$$

存在 3！=6 种可能的完备婚姻。一种是

$$w_1 \longleftrightarrow m_1,\quad w_2 \longleftrightarrow m_2,\quad w_3 \longleftrightarrow m_3$$

由于每一位女士都得到她的第一选择，这个完备婚姻是稳定的，不过每一位男士得到的却都是最末位的选择。另一种稳定的完备婚姻是通过使每一位男士都得到他的第一选择而得到的。但是要注意，一般可能不存在每一位男士（或每一位女士）均得到第一选择的完备婚姻。

㊀ 在第 11 章，该图叫做完全二分图 $K_{n,n}$。

㊁ 敏锐的读者无疑已经注意到，完备婚姻对应 n 个非攻击型车，其中将 n 行 n 列矩阵当作 n 行 n 列棋盘处理。

例如，当所有的女士有相同的第一选择同时所有的男士也有相同的第一选择时就发生这种情况。 □

现在证明稳定的完备婚姻总是存在的，并在证明的同时得到确定稳定的完备婚姻的算法。这样可以避免完全混乱的情况！

定理 9.4.1　对于每一个优先秩评定矩阵都存在稳定的完备婚姻。

证明：我们定义一种确定完备婚姻的算法——延迟认可算法[1]：

延迟认可算法

从每一位女士被标记落选记号开始。

当存在落选女士时，做：

ⅰ）每一位落选的女士在所有尚未拒绝她的男士中选择一位被她排名最优先的男士。

ⅱ）每一位男士在所有已经选择他并且他尚未拒绝的女士中挑选被他排名最优先的女士，对她推迟决定，并于此时拒绝其余女士。

于是，在算法执行期间[2]，女士向男士求婚，一些男女订婚，但是，如果收到更好的求婚，男士可以悔婚。一旦男士订婚，他就在算法执行始终保持订婚状态，但是他的未婚妻可以改变；在他看来这种改变总是一种改进。然而，女士则在算法执行期间可以订婚若干次；每一次新的订婚对她来说都将导致更不理想的伴侣。从算法的描述得出，只要不存在被拒绝的女士，那么每一位男士就恰与一位女士订婚，并且由于男女人数相同，每一位女士也恰与一位男士订婚。现在将每一位男士与他订婚的女士配成一对并得到一种完备婚姻。现在我们证明该完备婚姻是稳定的。

考虑女士 A 和 B 及男士 a 和 b，使 A 与 a 配对，B 与 b 配对，但是 A 更偏爱 b 而不是 a。我们证明 b 不可能比起偏爱 B 来更偏爱 A。由于在算法的某个阶段 A 在 a，b 间更偏爱 b，A 选择 b，但 A 因 b 将某位女士排得更优先而被 b 拒绝过。但是，在算法过程中与男士 b 配对的女士实际上至少与他拒绝过的任何女士有同等的优先级。既然 A 被 b 拒绝过，b 必然更偏爱 B 而不是 A。因此，不存在不稳定的配对，该完备婚姻是稳定的。 □

例　我们将延迟认可算法用于式（9-11）中的优先秩评定矩阵，指定女士分别为 A，B，C，男士分别为 a，b，c[3]。在第ⅰ）步，A 选择 a，B 选择 b，C 选择 c。不存在拒绝，算法中止，A 娶 a，B 娶 b，C 娶 c，以后他们一直幸福地生活。 □

例　将延迟认可算法用于优先秩评定矩阵

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1,2 & 2,1 & 3,2 & 4,1 \\ 2,4 & 1,2 & 3,1 & 4,2 \\ 2,1 & 3,3 & 4,3 & 1,4 \\ 1,3 & 4,4 & 3,4 & 2,3 \end{array}\right] \end{array} \tag{9-12}$$

---

[1] 也叫做 Gale-Shapley 算法。

[2] 注意我们已将男人作为求婚者这一男女之间传统角色颠倒。

[3] 大写者对应小写者。

算法结果为：

ⅰ）A 选择 a，B 选择 b，C 选择 d，D 选择 a；a 拒绝 D。

ⅱ）D 选择 d；d 拒绝 C。

ⅲ）C 选择 a；a 拒绝 A。

ⅳ）A 选择 b；b 拒绝 B。

ⅴ）B 选择 a；a 拒绝 B。

ⅵ）B 选择 c。

在ⅵ）中，不存在拒绝，因而

$$A \longleftrightarrow b, \ B \longleftrightarrow c, \ C \longleftrightarrow a, \ D \longleftrightarrow d$$

是稳定的完备婚姻。 □

在延迟认可算法中，如果我们交换男女的角色，让男士按照他们排列的优先级别选择女士，那么我们得到一个稳定的完备婚姻，该婚姻可能但不是必须不同于让女士选择男士所得到的稳定完备婚姻。

例 将延迟认可算法用于式(9-12)中的优先秩评定矩阵，其中男士选择女士。结果为：

ⅰ）a 选择 C，b 选择 A，c 选择 B，d 选择 A；A 拒绝 d。

ⅱ）d 选择 B；B 拒绝 d。

ⅲ）d 选择 D。

完备婚姻

$$a \longleftrightarrow C, \ b \longleftrightarrow A, \ c \longleftrightarrow B, \ d \longleftrightarrow D$$

是稳定的。这是以相反的方式利用该算法所得到的相同的完备婚姻。 □

例 将延迟认可算法用于式（9-11）中的优先秩评定矩阵，其中男士选择女士。结果为：

a 选择 B，b 选择 C，c 选择 A。

由于不存在拒绝，因此所得的稳定的完备婚姻为

$$a \longleftrightarrow B, \ b \longleftrightarrow C, \ c \longleftrightarrow A$$

这不同于以相反的方式应用该算法得到的完备婚姻。 □

在一个稳定的完备婚姻中，如果一位女士得到作为配偶的男士比她在每一其他的稳定完备婚姻所得到的配偶在她的排序表中至少有同样高的优先级，那么，这个稳定的完备婚姻叫做是*对该女士最优的*。换句话说，不存在使得该女士得到在她的排序表中具有更高级别排序的配偶的稳定完备婚姻。如果一稳定的完备婚姻对每一位女士都是最优的，则称该完备婚姻是*对女士最优的*。我们用类似的方法定义*对男士最优的*稳定完备婚姻。然而，存在女士最优的和男士最优的稳定完备婚姻就不是明显的了。事实上，如果每一位女士独立地得到所有稳定完备婚姻中最好的伴侣，结果导致一次男女配对，这个结论是不明显的（可以想象用这种方法的结果有可能会导致两位女士会得到相同的男人）。显然，可能只存在一种女士最优的完备婚姻和只存在一种男士最优的完备婚姻。

定理 9.4.2 *通过延迟认可算法，用女士选择男士得到的稳定完备婚姻是女士最优的。如果在延迟认可算法中男士选择女士，则所得完备婚姻是男士最优的。*

证明： 在某个稳定完备婚姻中，如果男士 M 是女士 W 的配偶，则称男士 M 对女士 W 是可行的。我们将通过归纳法证明，使用延迟认可算法所得到的完备婚姻具有性质：拒绝某特定女士的那些男士对该女士不是可行的。由于算法的本质意味着每一位女士得到对她可行的所有男士中排名最高的男士作为配偶，从而这个完备婚姻是女士最优的。

归纳法是对算法的轮数进行的。为开始进行归纳，我们证明在第一轮的末尾没有女士被对她可行的男士拒绝。设女士 A 和 B 都选择了男士 a，而 a 拒绝 A 以利于 B。此时任何使 A 与 a 配对的完备婚姻都不是稳定的，因为 a 偏爱 B，且 B 和与其实际上配对的任何男士比较都更偏爱 a。

现在继续用归纳法证明并假设在某 $k \geqslant 1$ 轮终了时没有女士被对她可行的男士所拒绝。设在第 $k+1$ 轮终了时女士 A 被男士 a 拒绝以利于女士 B。则 B 在所有拒绝过 B 的未拒绝过她的男士中更偏爱 a。根据归纳假设，这些拒绝过 B 的男士对 B 都不是可行的。因此，不存在将 B 与在前 k 轮拒绝过她的男士配对的稳定的完备婚姻。于是，在任何稳定的完备婚姻中与 B 配对的男士在 B 的排序表中不会高于 a。现在假设存在稳定的完备婚姻使得 A 与 a 配对。此时 a 更偏爱 B 而不是 A，由最后的注释，B 更偏爱 a 而不管与她配对的是哪位男士。因此与这个完备婚姻是稳定的矛盾。这就完成了归纳的步骤并证明由延迟认可算法得到的稳定完备婚姻是对女士们最优的。 □

现在证明，在女士最优的完备婚姻中，每一位男士的伴侣是他在任何稳定完备婚姻中所能得到的伴侣中最差的。

推论 9.4.3 *在女士最优的稳定完备婚姻中，每一位男士与一位他在稳定完备婚姻中所有对他可能的伴侣中排序级别最低的女士配对。*

证明： 令男士 a 与女士 A 在女士最优稳定完备婚姻中配对。根据定理 9.4.2，对于在稳定完备婚姻中可能适合她的所有男士来说，A 更偏爱 a。设有一稳定完备婚姻 a 与女士 B 配对，其中 a 将 B 排列的级别低于 A。在这个稳定婚姻中，A 与异于 a 的某男士 b 配对，因此，她为他排的级别低于 a。但此时 A 更偏爱 a，且 a 更偏爱 A，从而该完备婚姻不稳定，与假设矛盾。因此，不存在稳定的完备婚姻使得 a 得到比 A 更差的伴侣。 □

设男士最优和女士最优稳定完备婚姻是同一个婚姻配对。则由推论 9.4.3 得出，在女士最优完备婚姻中，每一位男士得到在所有稳定完备婚姻中他的既是最好又是最差的伴侣（类似的结论对女士同样成立）。因此，在这种情况下，恰好存在一个稳定的完备婚姻。当然，反过来也成立：如果存在唯一的稳定完备婚姻，那么男士最优和女士最优稳定完备婚姻是同一个完备婚姻。

自 1952 年以来，延迟认可算法就一直用于匹配美国的居民区和医院[⊖]。我们可以把医院当作是女士而把居民区看作是男士。但是，由于现在一所医院一般坐落在几个居民区，因此一位女士可以有多个配偶的一妻多夫制是允许的。

我们用类似问题的讨论来结束本节：稳定婚姻的存在性不再被保证。

例　设偶数 $2n$ 个姑娘想要配对作为同室室友。每一个姑娘将其她姑娘排成偏爱顺序 $1, 2, \cdots, 2n-1$。在这种情况下的完备婚姻是把这些姑娘配成 n 对。如果存在两个姑娘她们

⊖ 它也可用于匹配学生和学校等等。

不是室友但却比偏爱当前室友更偏爱对方，那么这个完备婚姻是不稳定的。如果完备婚姻不是不稳定的，那么它就是稳定的。稳定的完备婚姻总是存在的吗？

考虑 4 个姑娘 A，B，C，D 的情况，其中 A 将 B 排在第一，B 将 C 排在第一，C 将 A 排在第一，而且 A，B，C 都把 D 排在最后。此时，不论其余次序怎样排，都不存在稳定的完备婚姻，如下述论证所示。设 A 和 D 是室友。则 B 和 C 也是室友。但是 C 更偏爱 A 而不是 B，由于 A 将 D 排在最后，A 更偏爱 C 而不是 D。因此，该完备婚姻是不稳定的。如果 B 和 D 是室友或如果 C 和 D 是室友，则类似的结论仍然成立。由于 D 有一个室友，因此不存在稳定的完备婚姻。 □

9.5 练习题

1. 考虑如图 9-15 所示带有禁止落子位置的棋盘 B。构造与 B 相关的车-二分图 G。找出 B 上 6 个非攻击型车的 6 个位置，确定 G 中的对应匹配。

			×	×	
×			×		
×					×
×	×	×	×	×	
×	×	×			
		×	×		

图 9-15

2. 构造与图 9-15 中棋盘 B 相关的多米诺-二分图 G。确定 G 中具有 10 条边的匹配以及相关的通过多米诺牌对棋盘的完美覆盖。
3. 证明每一个二分图均为某个棋盘的车-二分图。
4. 给出不是任何棋盘的多米诺-二分图的二分图的例子。
5. 考虑 m 行 n 列棋盘，其中 m 和 n 都是奇数。该棋盘一种颜色比如黑色的方格比白色方格多一个方格。证明，如果棋盘上恰有一个黑方格禁止落子，那么该棋盘有一个用多米诺牌的完美覆盖。
6. 考虑 m 行 n 列棋盘，其中 m 和 n 至少有一个是偶数。该棋盘有相等个数的黑方格和白方格。证明，如果 m 和 n 至少是 2 并且恰有一个白方格和一个黑方格禁止落子，则棋盘有一个用多米诺牌的完美覆盖。
7. 令 $G=(X,\Delta,Y)$ 为一个二分图。设有正整数 p，使 X 的每一个顶点至少与 p 条边关联，并且 Y 的每一个顶点最多与 p 条边关联。通过对 G 的总边数计数证明，Y 至少与 X 有同样多的顶点。
8. 令 $G=(X,\Delta,Y)$ 为一个二分图，它是 $p\geqslant 1$ 阶正则的。利用定理 9.2.5 和归纳法证明，G 的边可以被分成 p 个完美匹配。
9. 考虑带有禁止落子位置的 n 行 n 列棋盘，其中存在一个正整数 p，使每一行和每一列恰有 p 个方格允许落子。证明，在棋盘上能够放置 n 个非攻击型车。
10. 用匹配算法确定图 9-16 中两个二分图的匹配 M 的边的最大条数。在每一种情形找出使 $|S|=|M|$ 的覆盖 S。
11. 一个公司有 7 个空缺 y_1，y_2，…，y_7 和 10 位申请人 x_1，x_2，…，x_{10}。每位申请人有资格从事的空缺工作的集合分别由 $\{y_1,y_2,y_6\}$，$\{y_2,y_6,y_7\}$，$\{y_3,y_4\}$，$\{y_1,y_5\}$，$\{y_6,y_7\}$，

$\{y_3\},\{y_2,y_3\},\{y_1,y_3\},\{y_1\},\{y_5\}$给出。确定能够被有资格申请人填补的空缺的最大数目，并证明你答案的正确性。

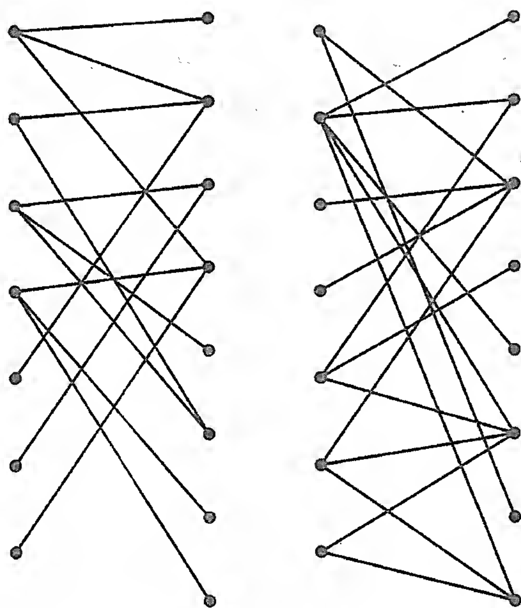


图　9-16

12. 令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$，其中

$$A_1=\{a,b,c\},A_2=\{a,b,c,d,e\},A_3=\{a,b\},$$
$$A_4=\{b,c\},A_5=\{a\},A_6=\{a,c,e\}$$

族$\mathcal{A}$有 SDR 吗？如果没有，具有 SDR 的族中集合的最大个数是多少？

13. 令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$，其中

$$A_1=\{1,2\},A_2=\{2,3\},A_3=\{3,4\},$$
$$A_4=\{4,5\},A_5=\{5,6\},A_6=\{6,1\}$$

确定$\mathcal{A}$具有的不同的 SDR 的个数，推广到 n 个集合的情况。

14. 令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是具有 SDR 的集合的族。令 x 是A_1 的元素。证明，存在一个含有 x 的 SDR，并通过例子证明可能找不出一个 SDR 使得 x 代表A_1。

15. 令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是“过于满足”成婚条件的集合的族。更准确地说，设

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k+1$$

对每一个 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 和k 个不同的指标$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$ 的每一种选择成立。令 x 是A_1 的一个元素。证明，$\mathcal{A}$有一个使 x 代表A_1 的 SDR。

16. 令 $n>1$ 并令$\mathcal{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$为$\{1,2,\cdots,n\}$的子集族，其中

$$A_i=\{1,2,\cdots,n\}-\{i\},(i=1,2,\cdots,n)$$

证明，$\mathcal{A}$有一个 SDR 并且 SDR 的个数为第 n 个错位排列数D_n。

17. 考虑带有禁止落子位置的棋盘，它具有如下性质：如果一个方格禁止落子，那么其右边的每一个方格和其下面的每一个方格也禁止落子。证明，该棋盘有用多米诺牌的完美覆

盖当且仅当允许落子的白方格的个数等于允许放子的黑方格的个数。

*18. 令 A 为一 n 列矩阵，其整数元素取自集合 $S=\{1,2,\cdots,k\}$。设 S 中的每一个整数 i 恰好在 A 中出现 nr_i 次，其中，r_i 为一整数。证明，能够排列 A 的每一行上的元素得到矩阵 B，使在 B 中 S 的每一个整数 i 在每一列中出现 r_i 次[⊖]。

19. 求 2 行 2 列优先秩评定矩阵使其两个完备婚姻都是稳定的。

20. 考虑优先秩评定矩阵，其中女士 A 将男士 a 排在第一位，而男士 a 将 A 排在第一位。证明在每一个稳定婚姻中 A 都与 a 配对。

21. 考虑优先秩评定矩阵

$$\begin{bmatrix} 1,n & 2,n-1 & 3,n-2 & \cdots & n,1 \\ n,1 & 1,n & 2,n-1 & \cdots & n-1,2 \\ n-1,2 & n,1 & 1,n & \cdots & n-2,3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3,n-3 & 4,n-3 & 5,n-4 & \cdots & 2,n-1 \\ 2,n-2 & 3,n-2 & 4,n-3 & \cdots & 1,n \end{bmatrix}.$$

证明，对每一个 $k=1, 2, \cdots, n$，使每一位女士得到她的第 k 个选择的完备婚姻是稳定的。

22. 对于优先秩评定矩阵

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,3 & 2,3 & 3,2 & 4,3 \\ 1,4 & 4,1 & 3,3 & 2,2 \\ 2,2 & 1,4 & 3,4 & 4,1 \\ 4,1 & 2,2 & 3,1 & 1,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

使用延迟认可算法同时得出女士最优的和男士最优的稳定完备婚姻。推断对于给定的优先秩评定矩阵只存在一个稳定的完备婚姻。

23. 证明，在每次使用延迟认可算法于 n 位女士和 n 位男士时，至多存在 n^2-n+1 种求婚方案。

*24. 将延迟认可算法推广到男士多于女士的情形。在这样的情形下，不是所有的男士都能得到伴侣。

25. 利用练习题 22 证明，在非完备婚姻中任何人确实都有可能得到其第一选择。

26. 应用延迟认可算法得出下列优先秩评定矩阵

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,3 & 2,2 & 3,1 & 4,3 \\ 1,4 & 2,3 & 3,2 & 4,4 \\ 3,1 & 1,4 & 2,3 & 4,2 \\ 2,2 & 3,1 & 1,4 & 4,1 \end{bmatrix} \end{array}$$

⊖ E.Kramer, S.Magliveras, T.Van Trung, and Q.Wu: "Some perpendicular arrays for arbitrary large t," *Discrete Math.*, 96 (1991), 101-110。

的稳定完备婚姻。

27. 考虑 $n\times n$ 棋盘，在其上第 i 行第 j 列（$1\leqslant i$，$j\leqslant n$）的方格内有一个非负数 a_{ij}。设每一行和每一列上的数的和等于1。证明，将 n 个非攻击型车放到棋盘被正数所占据的位置上是可能做到的。

第10章 组合设计

组合设计，或简称设计，是将集合的元素分成满足某些所述性质的子集的排列方法。这是非常一般的定义，它包含大量的组合学理论。第1章引入的许多例子都可以看作为组合设计：带有禁止位置的棋盘被多米诺牌的完美覆盖，在那里，把允许放子的方格安排成对，使每一对方格可以被一张多米诺牌覆盖；幻方，将1到n^2的整数排列成n行n列的阵列，使某些和数相等；拉丁方，将1到n的整数排成n行n列的阵列，使每一个整数都在每一行出现一次同时在每一列出现一次。我们将第1章扼要引入的拉丁方和正交性概念在本章进行更彻底的讨论。

组合设计领域是高度发展的领域，许多有趣的和基础性的问题还没有答案。许多构造设计的方法依赖于被称作有限域的代数结构以及更一般的运算系统。在本章第一节，我们给出主要涉及模运算的"有限算术"的简要介绍。我们的讨论不追求面面俱到，而是以在这些系统中能够方便地进行运算为标准。

10.1 模运算

令Z表示整数的集合，

$$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$$

并令$+$和$\times$表示通常的整数加法和乘法。之所以如此谨慎指出通常加法和乘法的记号在于，我们即将引入整数集Z的某些子集上的新的加法和新的乘法，而不希望读者把它们与通常的加法和乘法相混淆。

设n是满足$n\geqslant 2$的正整数，令

$$Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$$

是小于n的非负整数集。我们可以把Z_n中的整数看成是任意整数被n除所得的可能的余数。

如果m是整数，那么存在唯一的整数q（商数）和r（余数）使得

$$m=q\times n+r,\quad 0\leqslant r\leqslant n-1$$

将上述结论铭记在心，我们定义集合Z_n上加法$\oplus$和乘法$\otimes$如下：

对于Z_n的任意两个整数a和b，$a\oplus b$是通常的和$a+b$被n除所得的（唯一的）余数，而$a\otimes b$则是通常乘积$a\times b$被n除所得的（唯一的）余数。

这种加法和乘法依赖于整数n的选择，我们本应像$\oplus_n$和$\otimes_n$这样记之，但是这样的记号有些麻烦[⊖]。因此，我们只是告诫读者$\oplus$和$\otimes$依赖于n，并且称之为mod n（模n）加法和mod n（模n）乘法，用这种加法和乘法得到模n整数系统[⊜]。通常用与表示其元素集合的相

⊖ 在读者熟悉这些新的加法和乘法以后，就要用通常的记号$+$和$\times$来代替记号$\oplus$和$\otimes$，并在计算前冠以短语：它们以mod n进行。

⊜ mod是modulo的缩写，意为关于模数（一个量，这里指的是量n）。例如，为了计算$a\otimes b$，先进行通常的乘法$a\times b$，然后为得到Z_n中的整数，从$a\times b$减法n的足够大的倍数。后者有时称为"模掉"（modding out）n。

同的记号 Z_n 来表示模 n 整数运算系统。

例 最简单的情形是 $n=2$。我们有 $Z_2=\{0,1\}$，而模2的加法和乘法在下列算表中给出：

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

⊗	0	1
0	0	0
1	0	1

注意，除 $1\oplus 1=0$ 外，模2运算就像通常的运算。这是因为 $1+1=2$ 再减去2便落入 Z_2。 □

例 整数模3的加法和乘法算表为：

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

⊗	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

特别地，$2\otimes 2=1$，因为 $2\times 2=4$ 而 $4=1\times 3+1$。 □

例 模6整数系统的加法和乘法的某些实例如下：

$$4\oplus 5=3$$
$$2\oplus 3=5$$
$$2\otimes 2=4$$
$$3\otimes 5=3$$
$$3\otimes 2=0$$
$$5\otimes 5=1$$
□

正如这些例子所指出的，有时候模 n 的加法或乘法像通常的加法或乘法（这发生在通常结果为 Z_n 中的整数的时候）。另外一些时候，模 n 的加法或乘法则明显不同于通常的加法和乘法，可能结果看起来相当奇怪。如上例所显示的，在模6整数下，有 $5\otimes 5=1$，它指出5的倒数就是它自己；即用5乘得到1的数就是5本身！在模6整数下，还有 $3\otimes 2=0$，它至少提醒我们要小心，因为在通常的乘法下，两个非零的数相乘绝不会得出0。

在继续讨论以前，回忆算术和代数涉及模 n 整数的一些基本概念。首先，观察到[⊖]模 n 的加法和乘法满足通常的交换律、结合律和分配律。Z_n 中的整数 a 的加法逆元是 Z_n 中使 $a\oplus b=0$ 的整数 b。存在 a 的明显的加法逆元：如果 $a=0$，则其逆元为0；如果 $a\neq 0$，那么，$n-a$ 在1和 $n-1$ 之间，从而 $n-a$ 是 a 的加法逆元，事实上

$$a+(n-a)=n=1\times n+0 \text{ 意味着 } a\oplus(n-a)=0$$

⊖ 实际上，这不仅仅是观察，如果不觉冗长乏味，验证这些性质成立是些初等的运算。观察这个词的含义在于，我们不想为检验这些性质增添麻烦。以前从未做过这种工作的学生恐怕至少要验证其中的某些性质。

在所有情形下，加法逆元都是唯一确定的。遵循通常的习惯，a 的加法逆元用 $-a$ 表示，但要记住，$-a$ 表示[㊀] $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 中的一个整数。Z_n 中所有整数都有加法逆元的事实意味着总能够在 Z_n 中进行减法，因为从 a 减去 b 与把 $-b$ 加到 a 是一样的：$a \ominus b = a \oplus (-b)$。

Z_n 中的整数 a 的乘法逆元是 Z_n 中使得 $a \otimes b = 1$ 的整数 b。与加法逆元不同的是不存在 a 的明显的乘法逆元。事实上，某些非零的 a 可能没有乘法逆元并不奇怪。在整数系统 Z 中，由于不存在整数 b 使得 $2 \times b = 1$[㊁]，因此，整数 2 没有乘法逆元。实际上，在 Z 中有乘法逆元的仅有的整数是 1 和 -1。按照通常的习惯，如果存在的话，用 a^{-1} 表示 Z_n 中整数 a 的乘法逆元。

例　在模 10 的整数中，加法逆元如下：

$$
\begin{array}{lllll}
-0=0 & -1=9 & -2=8 & -3=7 & -4=6 \\
-5=5 & -9=1 & -8=2 & -7=3 & -6=4
\end{array}
$$

注意，我们得到一种特殊的情况 $-5=5$，但要记住，-5 表示 Z_{10} 中的整数，将其加到 5 上 (mod 10) 结果为 0，而 5 确实具有性质：$5 \oplus 5 = 0$。还要注意，如果 $-a=b$，则 $-b=a$；换句话说，$-(-a)=a$。

通过简单地验证所有可能的情况，可以看到，Z_{10} 中乘法逆元的情况如下：

$$
\begin{array}{ll}
1^{-1}=1 & \text{(1 的乘法逆元总是 1)} \\
3^{-1}=7 & (3 \otimes 7 = 1) \\
7^{-1}=3 & (7 \otimes 3 = 1) \\
9^{-1}=9 & (9 \otimes 9 = 1)
\end{array}
$$

3×7.

0，2，4，5，6 和 8 在 Z_{10} 中均无乘法逆元。于是，在 Z_{10} 中四个整数有乘法逆元，另六个整数没有乘法逆元。　□

一般地，在 Z_n 中的整数可能有也可能没有乘法逆元。由于对 Z_n 中所有的 b 都有 $0 \times b = 0$，当然 0 不可能有乘法逆元。我们的第一个定理指出 Z_n 中那些有乘法逆元的整数的特征，当该特征条件满足时，定理证明指出求乘法逆元的方法。这个方法依赖于下列计算两个正整数 a 和 b 的最大公因数（GCD）的简单算法。

计算 a 和 b 的 GCD 的算法

与以前有点不同!!!

置 $A=a$ 和 $B=b$。
当 $A \times B \neq 0$ 时，做
　　如果 $A \geq B$，则用 $A-B$ 替换 A；
　　否则，用 $B-A$ 替换 B。
置 GCD $=B$。

用语言叙述，即该算法就是要从当前的 A 和 B 中的大数减去小数。反复进行直到 A 和 B 中的一个为 0（为 0 的将是 A，因为在二者相同的情况下从 A 减去 B）。此时令 GCD 等于

㊀ 假如遵循上述的记号，a 的加法逆元应该用 $\ominus a$ 表示。

㊁ 当然，2 在有理数系中有一个乘法逆元，即 1/2，但 1/2 不是整数。

B 的终值。

在下面的引理中，我们证明算法经有限步终止并正确算出 a 和 b 的 GCD。

引理 10.1.1 上述算法经有限步终止并正确算出 a 和 b 的 GCD。

证明： 我们首先观察到确实在 A 的值等于 0 时终止。之所以如此是由于 A 和 B 总是非负整数，并且在每一步它们当中都要有一个在减少。由于在 $A=B$ 的时候从 A 减去 B，因此，A 在 B 成为 0 以前将达到 0 值。下面我们观察到，给定两个正整数 m 和 n 且 $m \geqslant n$，则

$$\mathrm{GCD}\{m,n\}=\mathrm{GCD}\{m-n,n\}$$

这是因为 m 和 n 的任一公因子也是 $m-n$ 和 n 的公因子(如果 p 能整除 m 及 n，则 p 也能整除它们的差 $m-n$)；反过来，$m-n$ 和 n 的任一公因子也是 m 和 n 的公因子(如果 p 能整除 $m-n$ 及 n，则 p 也能整除它们的和 $(m-n)+n=m$)。因此，整个算法中虽然 A 和 B 的值在变化，但是它们的 GCD 却是一个常数 d。由于初始 $A=a$ 和 $B=b$，因此 d 就是 a 和 b 的 GCD。在算法终止时有 $A=0$ 和 $B>0$。由于一个为 0 另一个是正的两个整数的 GCD 就是这个正整数，因此在终止时 a 和 b 的 GCD 就是 B 的值。 □

上述算法是计算两个非负整数 a 和 b 的 GCD 的非常简单的算法，它只是重复进行减法。正如下一个例子中所阐述的，该算法的一个推论是，a 和 b 的 GCD 为 d，可以写成 a 和 b 的整系数的线性组合：存在整数 x 和 y 使得

$$d=a\times x+b\times y$$

例 计算 48 和 126 的 GCD。

应用该算法以表的形式显示结果如下：

A	B
48	126
48	78
48	30
18	30
18	12
6	12
6	6
0	6

我们得到，48 和 126 的 GCD 为 B 的终值 $d=6$。

如上面发生的那样，若应用该算法计算两个正整数 a 和 b 的 GCD 时，从 B 连续地减了若干次 A 或从 A 连续地减了若干次 B，则可以将这些连续的步骤合并，把它们当作一次除法来处理[㊀]。当使用该算法手算 GCD 时，一般以这种方式运用该算法更为有效。计算 48 和

㊀ 一个正整数被另一个正整数所除，最终正是连续的减法。例如，当用 5 除 23 时得到商 4 和余数 3。这可以被表示为 $23=4\times5+3$，它的含义为：能够从 23 减去 4（且不能再多）个 5 而不致得出负的数。

126 的 GCD 的结果见下表。

A	B	
48	126	$126=2\times48+30$
48	30	$48=1\times30+18$
30	18	$30=1\times18+12$
12	18	$18=1\times12+6$
12	6	$12=2\times6+0$
0	6	$d=6$

这些除法最后的非零余数就是 48 和 126 的 GCD $d=6$。

为了把 6 写成 48 和 126 的线性组合，现在在上表中使用一些方程：

$$6=18-1\times12$$
$$6=18-1\times(30-1\times18)=2\times18-1\times30$$
$$6=2\times(48-1\times30)-1\times30=2\times48-3\times30$$
$$6=2\times48-3\times(126-2\times48)=8\times48-3\times126$$

最后的方程 $6=8\times48-3\times126$ 把 6 表示为 48 和 126 的整线性组合。 □

现在我们阐述如何确定 Z_n 中哪些整数具有乘法逆元。

定理 10.1.2　令 n 是一个整数，且 $n\geqslant2$，并令 a 为 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 中的非零整数。则 a 在 Z_n 中有乘法逆元当且仅当 a 和 n 的最大公因数（GCD）是 1。如果 a 有乘法逆元，则该逆元唯一。

证明：我们首先证明，对于 Z_n 中的整数 a 最多可能存在一个乘法逆元。利用我们已经指出的 mod n 的加法和乘法的法则，即交换律和结合律。设 b 和 c 都是 a 的乘法逆元并证明 $b=c$。于是，设 $a\otimes b=1$ 和 $a\otimes c=1$。于是

$$c\otimes(a\otimes b)=c\otimes1\qquad=c$$
$$c\otimes(a\otimes b)=(c\otimes a)\otimes b=1\otimes b=b$$

这样得到 $b=c$，从而 Z_n 中的每个整数 a 最多有一个乘法逆元。

下面我们证明，如果 a 和 n 的 GCD 不是 1，则 a 没有乘法逆元。令 $m>1$ 是 a 和 n 的 GCD。于是 n/m 为 Z_n 中的非零整数，由于 $a\times(n/m)$ 是 n 的一个倍数（因为在 a 中存在因子 m），因此有

$$a\otimes(n/m)=0$$

设存在乘法逆元 a^{-1}。此时，使用结合律[⊖]，得到

$$a^{-1}\otimes(a\otimes(n/m))=a^{-1}\otimes0\qquad=0$$
$$a^{-1}\otimes(a\otimes(n/m))=(a^{-1}\otimes a)\otimes(n/m)=1\otimes n/m=n/m$$

⊖ 对于那些认为算术结合律没有什么了不起或许甚至认为有些讨厌的学生，现在已经看到它的两个重要应用。而且还有更多的应用会出现！

因此，有 $n/m=0$，但由于 $1\leqslant n/m<n$，所以这是不可能的。即 a 没有乘法逆元 。

最后，假设 a 和 n 的 GCD 是 1，并证明 a 有乘法逆元。上述 GCD 算法的一个推论是：在 Z 中存在整数 x 和 y，使

$$a\times x+n\times y=1 \tag{10-1}$$

整数 x 不可能是 n 的倍数，否则上述方程意味着 1 是 n 的倍数，与假设 $n\geqslant 2$ 矛盾。因此 x 被 n 除就有一个非零余数。就是说，存在整数 q 和 r，$1\leqslant r\leqslant n-1$，使

$$x=q\times n+r$$

带入方程(10-1)，得到

$$a\times(q\times n+r)+n\times y=1$$

重写之后变为

$$a\times r=1-(a\times q+y)\times n$$

这样一来，$a\times r$ 与 1 相差 n 的一个倍数，从而

$$a\otimes r=1$$

且 r 是 a（根据已经证明的结果是唯一的）在 Z_n 中的乘法逆元。 □

推论10.1.3 令 n 是素数。则 Z_n 中的每一个非零整数都有一个乘法逆元。

证明： 由于 n 是素数，因此 n 与 1 到 $n-1$ 间的任意整数 a 的 GCD 都是 1，此时再应用定理10.1.2 即可。 □

通常把其 GCD 是 1 的两个整数叫做是*互素*的。因此，由定理10.1.2 可知，Z_n 中有乘法逆元的整数个数等于 1 到 $n-1$ 之间与 n 互素的整数的个数。

将计算两个数的 GCD 的算法用到 Z_n 中的非零整数 a 和 n，就得到确定 a 是否在 Z_n 中有乘法逆元的算法：根据定理10.1.2，a 有乘法逆元当且仅当这个 GCD 等于 1。像定理10.1.2 证明的那样，使用该算法的结果确定 a 的乘法逆元。在下面的例子中叙述这种方法。

例 确定 11 是否在 Z_{30} 中有乘法逆元，如果有，计算出这个乘法逆元。我们将计算 GCD 的算法用于 11 和 $n=30$ 并把结果显示在下表中。

A	B	
30	11	$30=2\times 11+8$
8	11	$11=1\times 8+3$
8	3	$8=2\times 3+2$
2	3	$3=1\times 2+1$
2	1	$2=2\times 1+0$
0	1	$d=1$

因此，11 和 30 的 GCD 为 $d=1$，由定理10.1.2，11 在 Z_{30}中有乘法逆元。为了得到定理证明中形如(10-1)的方程，我们使用上表中的一些方程：

$$1=3-1\times 2$$
$$1=3-1\times(8-2\times 3)=3\times 3-1\times 8$$
$$1=3\times(11-1\times 8)-1\times 8=3\times 11-4\times 8$$
$$1=3\times 11-4\times(30-2\times 11)=11\times 11-4\times 30$$

最后的方程把 GCD 1 表示成 11 和 30 的线性组合，即

$$1=11\times 11-4\times 30$$

它告诉我们，在 Z_{30}中

$$1=11\otimes 11$$

从而

$$11^{-1}=11$$

当然，由于知道这个事实，我们可以验证：$11\times 11=121$，而 121 被 30 所除余数为 1。 □

例　求 16 在 Z_{45}中的乘法逆元。

我们将计算显示在下表中。

A	B	
45	16	$45=2\times 16+13$
13	16	$16=1\times 13+3$
13	3	$13=4\times 3+1$
1	3	$3=3\times 1+0$
1	0	$d=1$

注意，与计算 GCD 的算法规则不同，我们让 B 等于 0。用这种方式建立算法的原因是为了(使计算机程序)知道到哪里去寻找 GCD。但是，如果用手工计算，那么我们既可以使 A 等于 0 也可以使 B 等于 0（从而选择另一个作为 GCD）。

由于 GCD 是 1，因此我们断定 16 在 Z_{45}中有乘法逆元。结果的方程满足：

$$1=13-4\times 3$$
$$1=13-4\times(16-1\times 13)=5\times 13-4\times 16$$
$$1=5\times(45-2\times 16)-4\times 16=5\times 45-14\times 16$$

得到 $16^{-1}=-14=Z_{45}$中的 31。 □

令 n 是素数。由推论10.1.3，在 Z_n 中的每个非零整数都有乘法逆元。这意味着不仅能够在 Z_n 中进行加、减、乘，还能够用 Z_n 中的非零整数去除：

$$a\div b=a\times b^{-1}\quad(b\neq 0)$$

此外，乘法逆元意味着如果 n 是素数，则下列性质在 Z_n 中成立：

(ⅰ)(消去法则 1) $a\otimes b=0$ 蕴涵着 $a=0$ 或 $b=0$;

[如果 $a\neq0$ 则用 a^{-1}相乘得到

$$0=a^{-1}\otimes(a\otimes b)=(a^{-1}\otimes a)\otimes b=1\otimes b=b]$$

ⅱ)(消去法则 2) $a\otimes b=a\otimes c$，$a\neq0$ 则 $b=c$

[我们应用消去法则 1 于 $a\otimes(b-c)=0$ 即可]

ⅲ)(线性方程组的解) 如果 $a\neq0$，则方程

$$a\otimes x=b$$

有唯一的解 $x=a^{-1}\otimes b$。

[用 a^{-1}乘以方程，再使用结合律则证明仅有的可能的解是 $x=a^{-1}\otimes b$，将 $x=a^{-1}\otimes b$ 代入到方程，看到

$$a\otimes(a^{-1}\otimes b)=(a^{-1}\otimes a)\otimes b=1\otimes b=b]$$

从讨论中我们得到的结论是，如果 n 是素数，那么在实数或有理数运算系统中习惯于认为理所当然的算律对于 Z_n 也成立。如果 n 不是素数，则正如我们已经看到的，许多但不是所有的算律仍然在 Z_n 中成立。例如，如果 n 有非平凡分解 $n=a\times b$（$1<a$，$b<n$），那么在 Z_n 中 $a\otimes b=0$，a 和 b 都没有乘法逆元。关于这些运算系统的特殊之处在于它们都只有有限多个元素（不同于有理数、实数和复数的无限多元素）。

现在，我们停止使用 mod n 加法和乘法的麻烦记号$\oplus$和$\otimes$而相应地改用 + 和 ×。

然而，还存在其他一些方法来得到有限运算系统，这些运算系统满足我们所习惯的算律。这样的运算系统的名字叫做域[1]。这种方法是对从实数得到复数方法的推广，总结如下：

我们知道，多项式 x^2+1（具有实系数）在实数系中没有根[2]。复数通常由实数“添加” $x^2+1=0$ 的一个根而得到，这个根通常记为 i。复数系由所有形如 $a+bi$ 的数组成，其中 a 和 b 是实数，此时通常的算律也成立，并且 $i^2+1=0$，即 $i^2=-1$。于是，例如

$$(2+3i)\times(4+i)=8+2i+12i+3i^2=8+14i-3=5+14i$$

对于每一个素数 p 和整数 $k\geqslant2$，这种方法可以从域 Z_p 开始构造具有 p^k 个元素的域。我们通过构造具有 4 个和 27 个元素的域来阐述这种方法。

例　构造具有 4 个元素的域。从 Z_2 和以 Z_2 的元素为系数的多项式 x^2+x+1 开始。由于仅有的取值可能只有 0 和 1，而 $0^2+0+1=1$ 和 $1^2+1+1=1$，因此这个多项式在 Z_2 中没有根。因为这个多项式是二次的，所以断定它不能以任何非平凡的方式被分解。我们把该多项式的一个根 i[3]加到 Z_2 中去，得到 $i^2+i+1=0$，或等价地

$$i^2=-i-1=i+1$$

（回忆在 Z_2 中我们有 $-1=1$）所得的域中的元素是 4 个元素

$$\{0,1,i,1+i\}$$

其加法表和乘法表给出如下：

---

[1] 使运算系统成为域而必须满足的那些性质可以在大多数抽象代数书中找到。

[2] 因为实数的平方不可能是负数 -1。但这就指出，这并不是我们通常使用的算律之一。例如，在 Z_5 中有 $2^2=4=-1$；事实上，在这里，负数的概念不重要，因为 $-1=4$，$-2=3$，$-3=2$ 而 $-4=1$。不应该把加法逆元看作是负数！

[3] 为了强调与复数的类似，我们用 i 作为这个根的符号。这里并不成立 $i^2=-1$。

+	0	1	i	$1+i$
0	0	1	i	$1+i$
1	1	0	$1+i$	i
i	i	$1+i$	0	1
$1+i$	$1+i$	i	1	0

×	0	1	i	$1+i$
0	0	0	0	0
1	0	1	i	$1+i$
i	0	i	$1+i$	1
$1+i$	0	$1+i$	1	i

这样，例如，由于$i\times(1+i)=i+i^2=i+(1+i)=1$，因此 $i^{-1}=1+i$。 □

例　构造 $3^3=27$ 个元素的域。从 mod 3 的整数集 $Z_3=\{0,1,2\}$开始。寻找一个系数在 Z_3 中并且不能用非平凡的方法被分解的 3 次多项式。一个 3 次多项式具有这种性质当且仅当它在 Z_3 中没有根[⊖]。多项式 x^3+2x+1 的系数在 Z_3 中但在 Z_3 中没有根（只需验证 Z_3 中的三个元素 0，1 和 2 即可）。于是，我们把这个方程的一个根添加进来，得到 $i^3+2i+1=0$，或等价地，

$$i^3=-1-2i=2+i$$

（回忆在 Z_3 中我们有 $-1=2$ 和 $-2=1$。）现在使用通常的运算法则，不过，只要有 i^3 出现就用 $2+i$ 代替它。所得到的域是 27 个元素的集

$$\{a+bi+ci^2: a, b \text{ 和 } c \text{ 在 } Z_3 \text{ 中}\}$$

由于有 27 个元素，要把加法表和乘法表都写出来就不再现实了。但是，我们可以叙述该系统中的某些运算如下：

$$(2+i+2i^2)+(1+i+i^2)=(2+1)+(1+1)i+(2+1)i^2=0+2i+0i^2=2i$$

$$(1+i)(2+i^2)=1\times2+i^2+2i+i\times i^2=1+i^2$$

$$\begin{aligned}(1+2i^2)(1+i+2i^2)&=1+i+2i^2+2i^2+2i^3+2\times2i^4\\&=1+i+2i^2+2i^2+2\ (2+i)\ +\ (i\times i^3)\\&=1+i+i^2+(1+2i)+i\times(2+i)\\&=1+i+i^2+1+2i+2i+i^2\\&=2+2i+2i^2\end{aligned}$$

⊖ 这并不是一个一般的法则。如果一个 2 次或 3 次多项式被非平凡地分解，那么其中就有一个因子是线性的，从而多项式有一个根。但是，例如一个 4 次多项式可能被分解成两个二次多项式，而它们都没有根。

直接验证得到

$$i^{-1}=1+2i^2 \text{ 和 } (2+i+2i^2)^{-1}=1+i^2 \qquad \square$$

我们用下面的评述结束本节。对于每一个素数 p 和每一个整数 $k\geqslant 2$，存在一个系数在 Z_p 中且没有非平凡分解的 k 次多项式。于是，可以用上面两个例子中所表述的方式构造具有 p^k 个元素的域。反之，可以证明，如果存在具有有限 m 个元素的域，即满足通常算律的有限系统，则 $m=p^k$ 对某个正整数 k 和某个素数 p 成立，并且它从 Z_p 以上面描述的方式得到（如果 $k=1$ 则是 Z_p）。因此，只对数目为素数的幂的个数的元素来说才存在相应的有限域。

10.2 区组设计 (考试重点)

我们用统计分析中的试验设计的简化例子来开始本节。

例 设一个产品有 7 种样品用来测试消费者的接受程度。制造商计划请一些随机（或典型）的顾客来比较一些不同的样品。一种方式是让每一位参与试验的顾客进行全面的测试：比较所有 7 种样品。但是，制造商清楚地意识到比较所耗费的时间以及参与测试的个人的耐性这一问题，因此，决定让每一位顾客进行非全面的测试：只比较其中的某些样品。于是，制造商要求每一个人比较 3 件样品。为了能够得出基于结果的统计分析的有意义的结论，测试要具有这样的性质：7 种样品中的每一对样品恰被一人比较。能否设计这样一种测试试验？

我们把这 7 种样品标记为 0，1，2，3，4，5 和 6[⊖]。这 7 种样品总共配有 $\binom{7}{2}=21$ 对。每个测试人得到 3 种样品，进行 $\binom{3}{2}=3$ 次比较。由于每一对恰被比较一次，故测试者的人数为

$$\frac{21}{3}=7$$

在这种情况下，参与试验的人数与被测样品数相同。幸好，上面的商是一个整数，否则我们就不得不说，不能用所给的限制设计出一个试验。现在要寻找的是这 7 种样品的 7 个（每一位参与测试的人一个）子集 B_1，B_2，…，B_7，我们称之为区组，具有性质：每一对样品恰好在一个区组内。下面是这样的 7 个区组的一个集合：

$$B_1=\{0,1,3\},B_2=\{1,2,4\},B_3=\{2,3,5\},B_4=\{3,4,6\},B_5=\{0,4,5\},$$
$$B_6=\{1,5,6\},B_7=\{0,2,6\}$$

描述该试验设计的另一种方式以下面的列表给出。在该列表中，对于这 7 种样品的每一种都有一列与之对应，对于 7 个区组的每一个都有一行与之对应。i 行 j 列（$i=1$，2，…，7；$j=0$，1，…，6）上的 1 意味着样品 j 属于区组 B_i，0 意味着样品 j 不属于区组 B_i。每个区组含有三个样品的事实在表中通过每一行含有三个 1 反映出来。每一对样品同在一个区组等价于表中每两列恰在一行上同时有 1 的性质。

⊖ 当然，可以随便用我们选取的任何方式来标记这些样品。我们选择 0，1，2，3，4，5，6 的原因在于可以把这些样品看作是 Z_7 中的数，即 mod 7 的整数。

	0	1	2	3	4	5	6
B_1	1	1	0	1	0	0	0
B_2	0	1	1	0	1	0	0
B_3	0	0	1	1	0	1	0
B_4	0	0	0	1	1	0	1
B_5	1	0	0	0	1	1	0
B_6	0	1	0	0	0	1	1
B_7	1	0	1	0	0	0	1

□

从这个表中看到，每一种样品均出现在 3 个区组中。这个列表是试验设计的关联阵列。

在讨论更多的例子以前，我们先来定义某些术语并讨论设计的一些初等性质。令 k，λ 和 v 为正整数，且

$$2 \leqslant k \leqslant v$$

令 X 是 v 个叫做样品的元素的任一集合，而令 $\mathcal{B}$ 为 X 的 k 个元素子集 B_1，B_2，…，B_b 的集合，这些子集叫做区组[1]。如果 X 的每一对元素恰好同时出现在 λ 个区组中，则 $\mathcal{B}$ 就是 X 的一个平衡区组设计。数 λ 叫做设计指数。上面对于 k 至少为 2 的假设防止平凡解的出现：如果 $k=1$，那么区组不含有元素对且 $\lambda=0$。

令 $\mathcal{B}$ 是一个平衡区组设计。如果 $k=v$，即样品的完全集存在于每一个区组中，则设计 $\mathcal{B}$ 叫做完全区组设计。如果 $k<v$ 且 $\mathcal{B}$ 是平衡的，则 $\mathcal{B}$ 是一个平衡不完全区组设计（balanced incomplete block design)，简称为 BIBD[2]。一个完全设计对应使每个人都要比较每一对样品的测试试验。从组合学的观点来看，它们是平凡的，因为形成了一个全都等于 X 的集合的集，而我们今后处理不完全设计，即那些使得 $k<v$ 的设计。

令 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个 BIBD。如在上例所看到的，把一个关联矩阵（关联阵列）A 与 $\mathcal{B}$ 相联系。矩阵 A 有 b 行，它们对应每一个区组 B_1，B_2，…，B_b 和 v 列，即对应 X 中的每一个样品 x_1，x_2，…，x_v，位于 i 行 j 列交叉处的元素 a_{ij} 是 0 或 1：

$$\begin{cases} a_{ij}=1，若 x_j 在 B_i 中 \\ a_{ij}=0，若 x_j 不在 B_i 中 \end{cases}$$

尽管关联矩阵依赖于我们排列区组的顺序和排列样品的顺序，我们还是称其为 $\mathcal{B}$ 的关联矩阵。关联矩阵的行表示含于每个区组中的样品。关联矩阵的列表示包含每个样品的区组。除标记样品和区组外，关联矩阵还包含关于 BIBD 的全部信息。由于每个区组包含 k 个样品，故关联矩阵 A 的每一行均含有 k 个 1。由于有 b 个区组，因此 A 中 1 的总数等于 bk。现在我们证明，每个样品均含于相同个数的区组中，即 A 的每一列都含有相同个数的 1。

引理 10.2.1 在一个 BIBD 中每个样品含于

$$r=\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

[1] 虽然找出所有区组都是不同的设计更具挑战性，但我们并不排除某些区组相等的可能性。因此，区组的集合一般是区组的一个多重集。

[2] BIBD 由 F. Yates 引入：Complex experiments (with discussion)，*J. Royal Statistical Society*，Suppl.2，(1935)，181-247。

个区组中。

证明：使用以两种方法计数，然后，让这两种计数结果相等的重要技巧。令 x_i 为任一样品，并设 x_i 含于 r 个区组

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_r} \tag{10-2}$$

中。由于每个区组含有 k 个元素，因此这些区组中的每一个都含有 $k-1$ 个异于 x_i 的样品。现在考虑 $v-1$ 对 $\{x_i, y\}$，其中，y 是异于 x_i 的样品，对每一个这样元素对，计算包含这两个样品的区组数。每一对 $\{x_i, y\}$ 均含于 λ 个区组中（这些区组必然是式（10-2）中的 λ 个区组，因为它们是包含 x_i 的全部区组）。相加后得到

$$\lambda(v-1)$$

另一方面，式(10-2)中的每个区组均含有 $k-1$ 个元素对，其中的一个元素为 x_i。相加后得到

$$(k-1)r$$

使这两个数相等

$$\lambda(v-1) = (k-1)r$$

因此，x_i 含于 $\lambda(v-1)/(k-1)$ 个区组中。这对于每个样品 x_i 都成立，因此，每个样品均含于 $r = \lambda(v-1)/(k-1)$ 个区组中。 □

推论 10.2.2　在 BIBD 中，有

$$bk = vr$$

证明：我们已经观察到，如通过行来计数，BIBD 的关联矩阵 A 中 1 的个数为 bk。由引理 10.2.1，我们知道，A 的每一列含有 r 个 1。因此，如通过列来计数，则 A 中 1 的个数等于 vr。使这两数相等，得到 $bk = vr$。 □

推论 10.2.3　在 BIBD 中，有

$$\lambda < r$$

证明：根据定义，在 BIBD 中，$k < v$，从而 $k-1 < v-1$。使用引理 10.2.1，我们断定 $\lambda < r$。 □

作为引理 10.2.1 的产物，我们得到 5 个不全独立的参数，它们与一个 BIBD 相关联：

- b：区组数；
- v：样品数；
- k：在每个区组中样品的个数；
- r：包含每个样品的区组的个数；
- λ：包含每对样品的区组的个数。

我们称 b，v，k，r，λ 为 BIBD 的参数。在我们的引例中，设计的参数是：$b=7$，$v=7$，

$k=3, r=3, \lambda=1$。

例　是否存在其参数 $b=12$，$k=4$，$v=16$ 以及 $r=3$（不指定参数 λ）的 BIBD？

由于两边的值均为 48，所以推论 10.2.2 中的方程 $bk=vr$ 成立。根据引理 10.2.1，如果存在这样的设计，那么它的指数 λ 满足

$$\lambda=\frac{r(k-1)}{v-1}=\frac{3\times 3}{15}=\frac{9}{15}$$

因为它不是整数，所以，不可能存在所给定的四个参数的设计。 □

例　在本例中，用参数 $b=12$，$v=9$，$k=3$，$r=4$ 以及 $\lambda=1$ 表示一个设计。最方便的方法是用 12 行 9 列的关联矩阵定义这个设计：

$$A=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

直接验证可知，这个矩阵定义了所给出参数的一个 BIBD。 □

例　考虑 4 行 4 列棋盘上的方格，如下所示：

令样品为棋盘上的 16 个方格。我们定义区组如下：对于每个方格，我们取与其在同一行或在同一列上的 6 个方格[⊖]（但不包括该方格本身）。因此，棋盘上的这 16 个方格中的每一个方格都以这种方式确定一个区组。于是，有 $b=16$，$v=16$ 以及 $k=6$。由于每个方格都与其他 3 个方格在同一行并与另外 3 个方格在同一列，因此，每个方格属于 6 个区组。这样又

⊖ 我们可以把样品看作 4 行 4 列棋盘上的一只车，并把区组看作是棋盘上的车能够攻击到的所有的方格。

有 $r=6$。但是，我们尚未证明有一个 BIBD。因此，取一对方格 x 和 y。存在三种可能性：

ⅰ）x 和 y 在同一行。此时 x 和 y 同在该行上其他 2 个方格所确定的两个区组中。

ⅱ）x 和 y 在同一列。此时 x 和 y 同在该列上其他 2 个方格所确定的两个区组中。

ⅲ）x 和 y 位于不同的行和不同的列。此时 x 和 y 同在两个区组中，其中一个区组由 x 所在行和 y 所在列交叉处的方格确定，另一个区组由 x 所在列和 y 所在行交叉处的方格确定（见下面的阵列，其中，这些区组由 * 所标记的方格确定）。

	*	x	
	y	*	

由于每一对样品同在 2 个区组中，因此，得到一个 $\lambda=2$ 的 BIBD。 □

下列设计的基本性质表明，在一个 BIBD 中，区组的数目必然至少与样品的数目一样多。该性质称为 Fisher 不等式[㊀]。

定理 10.2.4 在一个 BIBD 中，$b \geq v$。

证明：对那些熟悉线性代数的读者，我们概述这个线性代数的证明。令 A 为 BIBD 的 b 行 v 列关联矩阵。由于每个样品在 r 个区组中，每一对样品在 λ 个区组中，因此，用 A 乘以[㊁] A 的转置矩阵[㊂] A^T 所得到的 v 行 v 列矩阵 A^TA 主对角线上的每个元素均等于 r，主对角线外的每个元素均等于 λ：

$$A^TA = \begin{bmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix}$$

根据推论 10.2.3 知 $\lambda<r$，可以证明矩阵 A^TA 的行列式不等于零[㊃]，从而该矩阵是可逆的。这样，A^TA 的秩等于 v。因此，A 的秩至少是 v。由于 A 是一个 b 行 v 列矩阵，我们得到 $b \geq v$[㊄]。 □

使定理 10.2.4 等号成立的 BIBD，即区组个数 b 等于样品个数 v 的 BIBD 被称为是对称

㊀ R.A.Fisher：An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks，*Annals of Eugenics*，10（1940），52-75。

㊁ 具有典型元 x_{ij} 的 m 行 n 列矩阵 X 与典型元 y_{jk} 的 n 行 p 列矩阵 Y 的乘积为 m 行 p 列矩阵 Z，其典型元为 $z_{ik}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{jk}$。

㊂ m 行 n 列矩阵 X 的转置矩阵 X^T 是通过将 X 的行"变成" X^T 的列并将 X 的列"变成" X^T 的行而得到的 n 行 m 列矩阵。如在本定理证明中的 A，X 的元素是些 0 或 1，那么，在 X^TX 的 i 行 j 列上的典型元素（根据定义，它由 X 的第 i 列和第 j 列所确定）等于其在 i 列和 j 列都有 1 的行的数目。

㊃ 该行列式的值为 $(r-\lambda)^{v-1}(r+(v-1)\lambda)$，由推论 10.2.3，这个值不是零。

㊄ 如果你从未学过初等线性代数而不明白这个证明，那么我希望你现在就学习。只有到那时你才能够理解刚刚展示给你的是多么优美和简单的证明！

的[⊖]，并简称为SBIBD。在SBIBD中，区组个数b与点的个数v相同。由于BIBD满足$bk=vr$，因此，在SBIBD时通过两边消项，得到$k=r$。根据引理10.2.1，SBIBD的指数λ由

$$\lambda=\frac{k(k-1)}{v-1} \tag{10-3}$$

的v和k确定。因此，与SBIBD有关的参数是：

- b：区组个数；
- v：样品个数；
- k：在每个区组中的样品个数；
- r：那些包含每个样品的区组个数；
- λ：那些包含每一对样品的区组个数，其中λ由式（10-3）给出。

我们的某些例子已是SBIBD。

现在讨论构造SBIBD的方法，该方法用到整数mod n的运算。在这种方法中，样品是Z_n中的整数，因此，为了与我们的记法一致，这里使用v而不使用n。

这样，令$v\geqslant 2$为一整数，考虑mod v的整数集：

$$Z_v=\{0,1,2,\cdots,v-1\}$$

它的加法和乘法用通常的记号+和×标记。令$B=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$是由k个整数组成的Z_v的子集。对于Z_v中的整数j，我们定义

$$B+j=\{i_1+j,i_2+j,\cdots,i_k+j\}$$

把整数j以mod v加到B的每一个整数上，得到的Z_v的子集。集合$B+j$也包含k个整数。这是因为如果

$$i_p+j=i_q+j(\text{在 } Z_v \text{ 中})$$

消去j（通过在两边加上加法逆元$-j$），得到$i_p=i_q$。这样得到的v个集合

$$B=B+0,B+1,\cdots,B+v-1$$

叫做从区组B*发展起来的区组*，而B叫做*初始值区组*（starter block）。

例　令$v=7$，考虑

$$Z_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

考虑初始值区组

$$B=\{0,1,3\}$$

此时我们有

$$B+0=\{0,1,3\}$$
$$B+1=\{1,2,4\}$$
$$B+2=\{2,3,5\}$$
$$B+3=\{3,4,6\}$$
$$B+4=\{4,5,0\}$$

⊖　对称性必须与满足$b=v$以及如下一行所示的$k=r$的参数相关。

$$B+5=\{5,6,1\}$$
$$B+6=\{6,0,2\}$$

(该表除第一个外的每一个集合均通过 mod 7 加 1 到前一个集合而得到。此外，表中第一个集合 B 可以从最后的集合用 mod 7 加 1 而得到)。这是一个 BIBD，确实与本节引例中的是同一个。由于 $b=v$，因此得到一个 SBIBD，其中 $b=v=7$，$k=r=3$ 以及 $\lambda=1$。 □

例　同上例，令 $v=7$，但现在令初始值区组为

$$B=\{0,1,4\}$$

此时，我们有

$$B+0=\{0,1,4\}$$
$$B+1=\{1,2,5\}$$
$$B+2=\{2,3,6\}$$
$$B+3=\{3,4,0\}$$
$$B+4=\{4,5,1\}$$
$$B+5=\{5,6,2\}$$
$$B+6=\{6,0,3\}$$

在这种情况下，我们得不到 BIBD，因为样品 1 和 2 同时出现在一个区组中，而样品 1 和 5 却同时出现在两个区组中。 □

从这两个例子可以得出，从初始值区组发展起来的区组有时但不总是一个 SBIBD 的区组。为了用这种方法得到一个 SBIBD，所需要的性质包含在下面的定义中。令 B 是 Z_v 中 k 个整数的子集。如果 Z_v 中的每个非零整数在 B 的不同的元素（均以两种顺序）间的 $k(k-1)$ 个差分

$$x-y \quad (x,y \text{ 在 } B \text{ 中}; x\neq y)$$

之中都出现相同的次数 λ，则 B 叫做 mod v *差分集*。由于 Z_v 中存在 $v-1$ 个非零整数，因此，作为差分集中的一个差分，Z_v 中每个非零整数必然出现

$$\lambda=\frac{k(k-1)}{v-1}$$

次。

例　令 $v=7$ 和 $k=3$，考虑 $B=\{0,1,3\}$。计算 B 中整数的减法表，忽略对角线位置上的那些 0：

−	0	1	3
0	0	6	4
1	1	0	5
3	3	2	0

考察该表发现，Z_7 中的每个非零整数 1，2，3，4，5，6 在非对角线位置上恰好出现一次从而作为差分恰好出现一次。因此，B 是 mod 7 的一个差分集。 □

例　令 $v=7$，$k=3$，但现在令 $B=\{0,1,4\}$。计算减法表，得到：

−	0	1	4
0	0	6	3
1	1	0	4
4	4	3	0

我们看到，作为差分 1 和 6 每个出现一次，3 和 4 每个出现两次，而 2 和 5 根本不出现。因此，在这种情况下 B 不是差分集。 □

定理 10.2.5　令 B 为 Z_v 中的 $k<v$ 个元素的子集，它形成 mod v 的差分集。则从 B 作为初始值区组发展起来的区组形成一个 SBIBD，其指数

$$\lambda=\frac{k(k-1)}{v-1}$$

证明： 由于 $k<v$，故这些区组不是完全的。每个区组包含 k 个元素。此外，区组的个数与样品的个数 v 相同。因此，剩下只要证明 Z_v 的每一对元素同时属于相同个数的区组中。由于 B 是差分集，因此，Z_v 中的每个非零整数作为差分恰好出现 $\lambda=k(k-1)/(v-1)$ 次。我们证明 Z_v 的每一对元素在 λ 个区组中，而 λ 是 SBIBD 的指数。

令 p 和 q 是 Z_v 中的互异整数。则 $p-q\neq0$，由于 B 是 mod v 的差分集，从而方程

$$x-y=p-q$$

有 λ 个 x 和 y 均在 B 中的解。对每一个这样的解 x 和 y，令 $j=p-x$。于是

$$p=x+j \text{ 及 } q=y-x+p=y+j$$

这样，对于 λ 个 j 中的每一个 j，p 和 q 同在 $B+j$ 中。因此，p 和 q 同在 λ 个区组中。因为

$$v(v-1)\lambda=v(v-1)\frac{k(k-1)}{v-1}=vk(k-1)$$

由此得到，Z_v 中每一对不同的整数恰好同在 λ 个区组中。 □

例　求 Z_{11} 中大小为 5 的差分集，并用它作为初始值区组构造一个 SBIBD。

我们证明，$B=\{0,2,3,4,8\}$ 是 $\lambda=2$ 的差分集。计算减法表得到：

−	0	2	3	4	8
0	0	9	8	7	3
2	2	0	10	9	5
3	3	1	0	10	6
4	4	2	1	0	7
8	8	6	5	4	0

检查所有非对角线上的位置，我们看到，在 Z_{11} 中的每个非零整数作为差分皆出现两次，从而 B 是一个差分集。将 B 用作初始值区组得到具有参数 $b=v=11$，$k=r=5$ 和 $\lambda=2$ 的 SBIBD 的下列区组：

$$
\begin{aligned}
B+0&=\{0,2,3,4,8\}\\
B+1&=\{1,3,4,5,9\}\\
B+2&=\{2,4,5,6,10\}\\
B+3&=\{0,3,5,6,7\}\\
B+4&=\{1,4,6,7,8\}\\
B+5&=\{2,5,7,8,9\}\\
B+6&=\{3,6,8,9,10\}\\
B+7&=\{0,4,7,9,10\}\\
B+8&=\{0,1,5,8,10\}\\
B+9&=\{0,1,2,6,9\}\\
B+10&=\{1,2,3,7,10\}
\end{aligned}
$$

□

10.3 Steiner 三元系统

令 $\mathcal{B}$ 为平衡非完全区组设计，它的参数为 b，v，k，r，λ。由于 $\mathcal{B}$ 是非完全的，根据定义有 $k<v$；即每个区组中的样品数小于样品的总数。设 $k=2$。则 $\mathcal{B}$ 中每个区组恰好包含两个样品。为了使每对样品出现在 $\mathcal{B}$ 的相同个数 λ 个区组中，必须每2个样品的子集作为一个区组恰好出现 λ 次。因此，对于 $k=2$ 的 BIBD，只能取每个2样品子集并且把它写 λ 次。

例 一个 $v=6$，$k=2$ 和 $\lambda=1$ 的 BIBD 由

$$
\begin{array}{ccc}
\{0,1\} & \{0,2\} & \{0,3\}\\
\{0,4\} & \{0,5\} & \{1,2\}\\
\{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\}\\
\{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\}\\
\{3,4\} & \{3,5\} & \{4,5\}
\end{array}
$$

给出。为得到 $\lambda=2$ 的 BIBD，只要将上面的每个区组取两次。为得到 $\lambda=3$ 的 BIBD，将每个区组取三次。 □

因此，具有区组大小为2的 BIBD 是平凡的。最小的（用区组大小的术语来说）有趣情况出现在 $k=3$ 的时候。具有区组大小 $k=3$ 的平衡区组设计叫做 Steiner 三元系统[⊖]。10.2节给出的第一个例子是一个 Steiner 三元系统。它有7个样品，7个大小为3的区组，每一对样品含于 $\lambda=1$ 个区组中。这是形成 SBIBD 的 Steiner 三元系统的仅有的例子，即对该 SBIBD 而言，区组个数等于样品的个数。

Steiner 三元系统的另一个例子通过取 $v=3$ 个样品0，1和2以及一个区组 $\{0, 1, 2\}$

⊖ 遵照 J. Steiner 的说法，他是最初考虑它们的人之一：Combinatorische Aufgabe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 45 (1853), 181-182。

而得到。这样，我们有 $b=1$，显然每一对样品含于 $\lambda=1$ 个区组中。这个 Steiner 系统不是非完全的设计，因为 $v=k=3$[⊖]。每个其他的 Steiner 三元系统都是一个 BIBD。

例　下面是具有 9 个样品以及指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统：

$$\begin{array}{ccc} \{0,1,2\} & \{3,4,5\} & \{6,7,8\} \\ \{0,3,6\} & \{1,4,7\} & \{2,5,8\} \\ \{0,4,8\} & \{2,3,7\} & \{1,5,6\} \\ \{0,5,7\} & \{1,3,8\} & \{2,4,6\} \end{array}$$

□

在下面的定理中，我们得到某些在 Steiner 三元系统的参数间必须成立的关系。

定理 10.3.1　*令$\mathcal{B}$为一 Steiner 三元系统，其参数为 b，v，$k=3$，r，λ。则*

$$r=\frac{\lambda(v-1)}{2} \tag{10-4}$$

和

$$b=\frac{\lambda v(v-1)}{6} \tag{10-5}$$

如果指数 $\lambda=1$，则存在一个非负整数 n，使 $v=6n+1$ 或 $v=6n+3$。

证明： 由定理 10.2.1，对于任一 BIBD，我们有

$$r=\frac{\lambda\ (v-1)}{k-1}$$

由于 Steiner 三元系统是一个 $k=3$ 的 BIBD，因此我们得到式（10-4）。根据推论 10.2.2，对于一个 BIBD 有

$$bk=vr$$

代入式（10-4）所给出的 r 的值，再利用 $k=3$，得到式（10-5）。

式（10-4）和式（10-5）告诉我们，如果存在具有 v 个样品指数为λ 的 Steiner 三元系统，则 λ（$v-1$）是偶数并且 λv（$v-1$）能被 6 整除。现在假设 $\lambda=1$，则 $v-1$ 是偶数而 v 是奇数，v（$v-1$）可被 6 整除。后者意味着 v 或 $v-1$ 能被 3 整除。首先，设 v 可被 3 整除。由于 v 是奇数，这就是说 v 是 3 乘以一个奇数：

$$v=3\times(2n+1)=6n+3$$

现在设 $v-1$ 能被 3 整除。由于 v 是奇数，因而 $v-1$ 是偶数，我们推得 $v-1$ 是 3 乘以一个偶数：

$$v-1=3\times(2n)=6n \text{ 从而 } v=6n+1$$

□

在本节的其余部分，只考虑指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统。根据定理 10.3.1，在指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统中，样品的个数或者是 $v=6n+1$ 或者是 $v=6n+3$，其中，n 是一个非负整数。这就产生对所有非负整数 n 是否存在具有 $v=6n+1$ 和 $v=6n+3$ 个样品的 Steiner

⊖　由于我们将要用它构造不完全设计的 Steiner 三元系统，因此，有理由把它考虑为一个 Steiner 三元系统。

三元系统的问题。$n=0$ 和 $v=6n+1$ 必须排除，因为在这种情况下 $v=1$，从而没有可能存在三元组。对于所有其他情况，T.P.Kirkman 证明了[⊖]，Steiner 三元系统是可以构造出来的。该证明已超出本书范围。我们将只给出一种构造 Steiner 三元系统的方法，该系统是源于两个已知（很可能相同）的更小阶 Steiner 系统。

定理 10.3.2 如果分别存在具有 v 个样品和 w 个样品及指数 $\lambda=1$ 的两个 Steiner 三元系统，则存在具有 vw 个样品且指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统。

证明：令 $\mathcal{B}_1$ 是具有 v 个样品 a_1，a_2，…，a_v，指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统，并令 $\mathcal{B}_2$ 是具有 w 个样品 b_1，b_2，…，b_w，指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统。我们考虑 vw 个样品 c_{ij} 的集合 X（$i=1$，…，v；$j=1$，…，w），把这些样品看成 v 行 w 列矩阵的元素（或位置），矩阵的行对应 a_1，a_2，…，a_v，矩阵的列对应 b_1，b_2，…，b_w[⊖]，如下所示：

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_w \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1w} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{v1} & c_{v2} & \cdots & c_{vw} \end{bmatrix} \end{array} \tag{10-6}$$

我们定义 X 的元素的三元组的集合 $\mathcal{B}$。令 $\{c_{ir},c_{js},c_{kt}\}$ 为 X 的三个元素的集合。则 $\{c_{ir},c_{js},c_{kt}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的三元组当且仅当下述命题之一成立：

ⅰ）$r=s=t$，且 $\{a_i,a_j,a_k\}$ 是 $\mathcal{B}_1$ 的三元组。换句话说，c_{ir}，c_{js}，和 c_{kt} 在矩阵（10-6）的同一列上，且它们所在的行对应 $\mathcal{B}_1$ 的一个三元组。

ⅱ）$i=j=k$，且 $\{b_r,b_s,b_t\}$ 是 $\mathcal{B}_2$ 的三元组。换句话说，c_{ir}，c_{js} 和 c_{kt} 在矩阵（10-6）的同一行上，且它们所在的列对应 $\mathcal{B}_2$ 的一个三元组。

ⅲ）i，j，k 互异且 $\{a_i,a_j,a_k\}$ 是 $\mathcal{B}_1$ 的三元组，而 r，s，t 互异且 $\{b_r,b_s,b_t\}$ 是 $\mathcal{B}_2$ 的三元组。换句话说，元素 c_{ir}，c_{js} 和 c_{kt} 在矩阵（10-6）的三个不同的行和三个不同的列上，而它们所在的行对应 $\mathcal{B}_1$ 的一个三元组，它们所在的列对应 $\mathcal{B}_2$ 的一个三元组。

为了证明其余部分，我们将使用下面的事实作为证明的背景：没有 $\mathcal{B}$ 的三元组恰好位于矩阵（10-6）的 2 行或者恰好位于（10-6）的 2 列。现在我们证明，X 的三元组的集合 $\mathcal{B}$ 定义其指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统。为此，令 c_{ir}，c_{js} 为 X 的一对不同的元素。我们需要证明恰好存在既含 c_{ir} 又含 c_{js} 的 $\mathcal{B}$ 的三元组。即需要证明恰好存在 X 的一个元素 c_{kt}，使 $\{c_{ir},c_{js},c_{kt}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个三元组。我们考虑三种情况：

情形 1：$r=s$ 因而 $i\neq j$。在这种情形下，元素是对是位于（10-6）同一列上的 c_{ir}，c_{jr}。由于 $\mathcal{B}_1$ 是指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统，因此，存在唯一的包含互异对 a_i，a_j 的三元组 $\{a_i,a_j,a_k\}$。从而，$\{c_{ir},c_{jr},c_{kr}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的唯一包含对 c_{ir}，c_{jr} 的三元组。

情形 2：$i=j$ 因而 $r\neq s$。元素对是位于（10-6）同一行上的 c_{ir}，c_{is}。由于 $\mathcal{B}_2$ 是指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统，因此存在唯一的包含互异对 b_r，b_s 的三元组 $\{b_r,b_s,b_t\}$。从而，$\{c_{ir},c_{is},$

⊖ T.P.Kirkman: On a problem in combinations, *Cambridge and Dublin Mathematics Journal*, 2(1847), 191-204。该问题后来也被 J.Steiner 提出，但他不知道 Kirkman 的工作，只是后来 Kirkman 的工作才为人们所知，而这要比 *Steiner*（而不是 *Kirkman*）三元系统的名字流行晚很多。

⊖ 我们可以把 c_{ij} 看成序偶 (a_i,b_j)，但是由于我们要讨论无序的序偶和三元组，因此发明新的记号 c_{ij} 似乎更不至于引起混乱。

$c_{it}\}$ 是$\mathcal{B}$的唯一包含元素对 c_{ir}，c_{is}的三元组。

情形 3：$i\neq j$ 且$r\neq s$。存在$\mathcal{B}_1$ 的包含互异对 a_i，a_j 的唯一三元组$\{a_i,a_j,a_k\}$和$\mathcal{B}_2$ 的包含互异对 b_r，b_s 的唯一三元组$\{b_r,b_s,b_t\}$。因此，三元组$\{c_{ir},c_{js},c_{kt}\}$是$\mathcal{B}$的包含元素对 c_{ir}，c_{js}的唯一的三元组。

这样，就证明了$\mathcal{B}$是具有 vw 个样品，指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统。 □

例 应用定理 10.3.2 的最简单的例子是通过选择$\mathcal{B}_1$ 和$\mathcal{B}_2$ 成为具有 3 个样品的 Steiner 三元系统而得到的情形。其结果应该是具有 $3\times3=9$ 个样品的 Steiner 三元系统。

令$\mathcal{B}_1$ 是具有 3 个样品 a_1，a_2，a_3 和唯一三元组$\{a_1,a_2,a_3\}$的 Steiner 三元系统，令$\mathcal{B}_2$ 是具有 3 个样品 b_1，b_2，b_3 和唯一三元组$\{b_1,b_2,b_3\}$的 Steiner 三元系统。考虑 9 个样品的集合 X，它包含下列矩阵的元素：

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

根据定理 10.3.2 证明的构造方法，得到下列 12 个三元组的集合，它组成具有 9 个样品及指数为 1 的一个 Steiner 三元系统：

ⅰ)三行中每行的元素如下：

$$\{c_{11},c_{12},c_{13}\},\{c_{21},c_{22},c_{23}\},\{c_{31},c_{32},c_{33}\}$$

ⅱ)三列中每列的元素如下：

$$\{c_{11},c_{21},c_{31}\},\{c_{12},c_{22},c_{32}\},\{c_{13},c_{23},c_{33}\}$$

ⅲ)没有两个在同一行或同一列的三个元素[⊖]如下：

$$\{c_{11},c_{22},c_{33}\},\{c_{12},c_{23},c_{31}\},\{c_{13},c_{21},c_{32}\}$$
$$\{c_{13},c_{22},c_{31}\},\{c_{12},c_{21},c_{33}\},\{c_{11},c_{23},c_{32}\}$$

如果用 0，1，2，3，4，5，6，7，8 分别代替 c_{11}，c_{21}，c_{31}，c_{12}，c_{22}，c_{32}，c_{13}，c_{23}，c_{33}，则得到本节前面给出的具有 9 个元素的 Steiner 三元系统$\mathcal{B}$：

$$\begin{array}{cccc} \{0,1,2\} & \{0,3,6\} & \{0,4,8\} & \{2,4,6\} \\ \{3,4,5\} & \{1,4,7\} & \{2,3,7\} & \{1,3,8\} \\ \{6,7,8\} & \{2,5,8\} & \{1,5,6\} & \{0,5,7\} \end{array} \tag{10-7}$$

□

式（10-7）的列将$\mathcal{B}$的三元组划分成一些部分，使每一个样品恰好出现在每一部分的一个三元组中。具有这个性质的指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统称为可解的（resolvable）而每一部分叫做可解类。注意，每一可解类就是将样品集分成三元组的一个划分。Steiner 三元系统的可解性概念首先产生于下列由 Kirkman 提出的问题[⊜]，它被称为：

⊖ 把该矩阵看作 3 行 3 列的棋盘，则这些元素对应棋盘上 3 个非攻击型车的位置。

⊜ T.P.Kirkman：Note on an unanswered prize question，*Cambridge and Dublin Mathematics Journal*，5（1850），255-262，and Query VI，*Lady's and Gentleman's Diary* No.147，48。

Kirkman 女学生问题：学校女教师带领她班上 15 个女孩进行日常操练。这些女孩被排成 5 行，每行 3 个女生，因此每个女孩有两个队友。能否计划连续操练 7 天，使得没有女孩与她的同学在三人行中操练超过一次？

这个问题的解由 15 个女孩的 $7\times5=35$ 个三元组组成，其中，每一对女孩恰好同在一个三元组中。此外，应该能够把 35 个三元组分成 7 群，每群 5 个三元组，使得在每群中每个女孩恰好出现在一个三元组中。现在，具有 $v=15$ 个样品且指数 $\lambda=1$ 的 Steiner 三元系统的三元组的个数为

$$b=\frac{v(v-1)}{6}=35$$

这样，Kirkman 女学生问题就是求解一个具有 $v=15$ 个样品且指数 $\lambda=1$ 的可解 Steiner 三元系统。前面的例子包含了 9 个女孩情况下 Kirkman 女学生问题的解。在这种情况下，共有 9 个女孩并安排她们 4 天日常操练，每个女孩在所有 4 天中要有不同的队友。

例 Kirkman 女学生问题的解 我们所需要的就是具有 $v=15$ 个样品且指数 $\lambda=1$ 的可解 Steiner 三元系统。这样的 Steiner 系统与将它分成的 7 部分（每部分对应 7 天中的每一天）表示如下：

$$\begin{array}{llll}
\{0,1,2\} & \{0,3,4\} & \{0,5,6\} & \{0,7,8\} \\
\{3,7,11\} & \{1,7,9\} & \{1,8,10\} & \{1,11,13\} \\
\{4,9,14\} & \{2,12,13\} & \{2,11,14\} & \{2,4,5\} \\
\{5,10,12\} & \{5,8,14\} & \{3,9,13\} & \{3,10,14\} \\
\{6,8,13\} & \{6,10,11\} & \{4,7,12\} & \{6,9,12\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\{0,9,10\} & \{0,11,12\} & \{0,13,14\} \\
\{1,12,14\} & \{1,3,5\} & \{1,4,6\} \\
\{2,3,6\} & \{2,8,9\} & \{2,7,10\} \\
\{4,8,11\} & \{4,10,13\} & \{3,8,12\} \\
\{5,7,13\} & \{6,7,10\} & \{5,9,11\}
\end{array}$$

□

指数 $\lambda=1$ 的可解 Steiner 三元系统也叫做 Kirkman 三元系统。设$\mathcal{B}$是一个具有 v 个样品的 Kirkman 三元系统。由于我们必须能够把 v 个样品分成一些三元组，故必须使 v 能够被 3 整除。因此，根据定理 10.3.1，为使具有 v 个样品的 Kirkman 系统存在，v 必须是 $6n+3$ 的形式。因此，Kirkman 系统的参数为

$$\begin{aligned}
&v=6n+3 \\
&b=v(v-1)/6=(2n+1)(3n+1) \\
&k=3 \\
&r=(v-1)/2=3n+1 \\
&\lambda=1
\end{aligned}$$

在每个可解类中，三元组的个数为

$$\frac{v}{3}=2n+1$$

幸好它是一个整数（假如这个数对某个 n 不是整数，那么只能断定对这样的 n，具有 $v=6n+3$ 的 Kirkman 三元系统就不可能存在了）。对于每个非负整数 n 确定是否存在带有 $v=6n+3$ 个样品的 Kirkman 三元系统的问题悬而未决一百多年，直到 1971 年，Ray-Chaudhuri 和 Wilson㊀才证明了如何对所有的 n 构造这样的系统。

10.4 拉丁方

拉丁方在 1.5 节与欧拉 36 军官问题一起引入，读者可能希望在深入讨论之前对该节做些回顾。下面是正式的定义。令 n 为一正整数，令 S 为 n 个不同元素的集合。基于集 S 的 n 阶拉丁方是一个 n 行 n 列的阵列，阵列上的每个元素均为 S 的元素，使得 S 的 n 个元素中的每一个均在每一行出现一次（从而恰好出现一次）且在每一列出现一次。因此，拉丁方的每一行和每一列都是 S 的元素的一个排列。由鸽巢原理可知，我们可用两种方法检查基于 n 个元素的集合 S 的 n 行 n 列阵列是否是拉丁方：检查 S 的每一个元素至少在每一行出现一次并且至少在每一列出现一次，或检查没有 S 的元素在每一行出现多于一次且没有 S 的元素在每一列出现多于一次。

S 的元素的具体性质是不重要的，通常把 S 取为 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$。此时，我们将拉丁方的行列计数为 0，1，…，$n-1$，而不是更传统的 1，2，…，n。一个 1 行 1 列的阵列总是一个基于只有一个元素组成的集合的拉丁方。拉丁方的另外几个例子如下：

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix}\tag{10-8}$$

为了证实上面的约定，最后一个方阵的第 0 行是排列 0，1，2，3，而第 2 行是排列 2，3，0，1。

考虑基于 Z_n 的 n 阶拉丁方 A，并令 k 为 Z_n 的任一元素。此时 k 在 A 中出现 n 次，在每一行出现一次且在每一列出现一次。如把 n 行 n 列的阵列看成是 n 行 n 列的棋盘，则由 k 占据的那些位置就是 n 行 n 列棋盘上 n 个非攻击型车的位置。令 $A(k)$ 为 k（$k=0,1,\cdots,n-1$）所占据的位置的集合。则 $A(0)$，$A(1)$，…，$A(n-1)$ 是棋盘上 n^2 个位置的集合的一个划分。因此，n 阶拉丁方对应于将 n 行 n 列阵列的位置分成 n 个集合：

$$A(0),A(1),\cdots,A(n-1)$$

的划分，其中，每一集合均由 n 个非攻击型车的位置组成。这个观察结果容易从上面的例子得到验证。注意，如果在拉丁方中我们用 2 代替所有的 1 并用 1 代替所有的 2，其结果仍是一个拉丁方。上述结果的划分除集合 $A(1)$ 变成 $A(2)$ 并且 $A(2)$ 变成 $A(1)$ 外没有变化。更一般地，可以任意交换 $A(0)$，$A(1)$，…，$A(n-1)$，结果仍然是一个拉丁方。用这种方法可以产生 $n!$ 个拉丁方。例如，考虑（10-8）中的 4 行 4 列拉丁方 A。有

$$A(0)=\{(0,0),(1,3),(2,2),(3,1)\}\qquad A(1)=\{(0,1),(1,0),(2,3),(3,2)\}$$

㊀ D.K.Ray-Chaudhuri and R.M.Wilson: Solution of Kirkman's schoolgirl problem, *American Mathematical Society Proceedings*, *Symposium on Pure Mathematics*, 19 (1971), 187-204。

$$A(2)=\{(0,2),(1,1),(2,0),(3,3)\} \qquad A(3)=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$$

令

$$A'(0)=A(2),A'(1)=A(3),A'(2)=A(0),A'(3)=A(1)$$

得到一个新的拉丁方 A'。该结果为

$$A'=\begin{bmatrix}2&3&0&1\\3&0&1&2\\0&1&2&3\\1&2&3&0\end{bmatrix}$$

交换各元素 0，1，…，$n-1$ 所占的位置，总可以把拉丁方化成标准型，即在第 0 行上，整数 0，1，…，$n-1$ 以其自然顺序出现。式（10-8）中的三个拉丁方均为标准型。

式（10-8）中的三个拉丁方的例子是源自整数 mod n 加法表的 n 阶拉丁方一般结构的例子。

定理 10.4.1　令 n 为一正整数。令 A 为 n 行 n 列阵列，位于 i 行 j 列上的元素 a_{ij} 为

$$a_{ij}=i+j(\text{mod } n \text{ 加法}),(i,j=0,1,\cdots,n-1)$$

则 A 为基于 Z_n 的 n 阶拉丁方。

证明：该阵列的拉丁性质是 Z_n 中加法性质的推论。设阵列的某行 i，其 i 行 j 列上的元素与 i 行 k 列上的元素相等，即

$$i+j=i+k$$

两边加上在 Z_n 中 i 的加法负元 $-i$，得到 $j=k$，这就证明了在行 i 上不存在重复的元素。用类似的方法可以证明，在任一列上也不存在重复的元素。　□

在定理 10.4.1 中构造的 n 阶拉丁方只不过是 Z_n 中的加法表。存在使用 mod n 整数产生更广一类拉丁方的更一般的结构。它依赖于 Z_n 中某些元素的乘法逆元的存在性（见定理 10.1.2）。

例　考虑 Z_5，即 mod 5 的整数集。根据定理 10.1.2，在 Z_5 中 3 有乘法逆元；事实上，在 Z_5 中，$3\times2=1$。用 Z_5 中的运算构造一个 5 行 5 列阵列，它的 i 行 j 列上的元素为 $a_{ij}=3\times i+j$。结果为

$$\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}0&1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\3&4&0&1&2\\1&2&3&4&0\\4&0&1&2&3\\2&3&4&0&1\end{bmatrix}\end{array} \tag{10-9}$$

检验可知，我们得到一个 5 阶拉丁方。　□

定理 10.4.2 令 n 为一正整数，r 为 Z_n 中的非零整数，使 r 和 n 的 GCD 为 1。令 A 为 n 行 n 列阵列，其 i 行 j 列上的元素是

$$a_{ij}=r\times i+j(\bmod n \text{ 运算}),(i,j=0,1,\cdots,n-1)$$

则 A 为基于 Z_n 的 n 阶拉丁方。

证明： 该阵列的拉丁性质由 Z_n 中的加法和乘法性质得出。设对阵列的某行 i，位置 (i,j) 和 (i,k) 上的元素相等，即

$$r\times i+j=r\times i+k$$

类似于定理 10.4.1 的证明，在两边加上 $r\times i$ 的加法逆元，得到 $j=k$，从而在行 i 上不存在重复元素。为证明在任一列上不存在重复元素，我们还需要用到 r 和 n 的 GCD 为 1 的事实。由定理 10.1.2，r 在 Z_n 中有一个乘法逆元 r^{-1}。设 i 行 j 列与 k 行 j 列上的元素相等，即

$$r\times i+j=r\times k+j$$

从两边减去 j 后得到

$$r\times(i-k)=0$$

乘以 r^{-1} 得到 $i=k$，这就是说在 j 列上不存在重复元素。因此，A 是拉丁方。 □

定理 10.4.1 是通过取 $r=1$ 得到的定理 10.4.2 的特殊情形。

在定理 10.4.2 中，用 Z_n 中有乘法逆元的整数 r 所构造的 n 阶拉丁方记为

$$L_n^r$$

于是，式（10-9）中的拉丁方则是 L_5^3。如果 r 没有乘法逆元，那么所得到的阵列将不是拉丁方（见练习 39）。

存在另外的方法考虑拉丁方的拉丁性质。令

$$R_n=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1\end{bmatrix} \tag{10-10}$$

和

$$S_n=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & n-1\\ 0 & 1 & \cdots & n-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & n-1\end{bmatrix} \tag{10-11}$$

是基于 Z_n 的 n 行 n 列阵列，如上所示分别具有相同的行和列。令 A 是基于 Z_n 的任一 n 行 n 列阵列。则 A 是拉丁方当且仅当下列条件满足：

ⅰ）当阵列 R_n 和 A 并置形成阵列 $R_n\times A$ 时，产生一个由此得到的序偶的集合，该集合

等于用 Z_n 的元素能够形成的所有序偶（i，j）的集合。

ⅱ）当阵列 S_n 和 A 并置形成阵列 $S_n \times A$ 时，产生一个由此得到的序偶的集合，该集合等于用 Z_n 的元素能够形成的所有序偶的集合。

由于并置阵列含有 n^2 个序偶，而它恰好是用 Z_n 的元素所能够形成的序偶的个数，由鸽巢原理可知，上述性质可以表述为：$R_n \times A$ 中的序偶彼此互异并且 $S_n \times A$ 中的序偶也彼此互异。

例 用3阶拉丁方阐述上面的结论：

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\2&2&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}(0,0)&(0,1)&(0,2)\\(1,1)&(1,2)&(1,0)\\(2,2)&(2,0)&(2,1)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}(0,0)&(1,1)&(2,2)\\(0,1)&(1,2)&(2,0)\\(0,2)&(1,0)&(2,1)\end{bmatrix}$$

在上面每一个并置的阵列中，每个序偶恰好出现一次。 □

现在将上述构想用于两个拉丁方中。令 A 和 B 是两个基于 Z_n 中的整数的拉丁方[㊀]。在并置阵列 $A \times B$ 中，如果 Z_n 中整数的每一序偶（i，j）恰好出现一次[㊁]，则称 A 和 B 是正交的。这个正交概念是在与欧拉36军官问题相联系的节1.5中引入的，当时给出了两个3阶正交拉丁方。不难验证，不存在两个正交的2阶拉丁方。

例 通过考察并置阵列可以看出，下面两个4阶拉丁方是正交的：

$$\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\\1&0&3&2\\2&3&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}(0,0)&(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(1,3)&(0,2)&(3,1)&(2,0)\\(2,1)&(3,0)&(0,3)&(1,2)\\(3,2)&(2,3)&(1,0)&(0,1)\end{bmatrix}$$

□

正交拉丁方可以用于试验设计，为了能够得到有意义的结论，在试验设计中变差（variational differences）需要保持在最小值。我们用来自农业的一个例子阐述其应用。

例 想要测试不同水量和不同类型（或数量）的肥料对某类土壤上的小麦产量的影响。设它们是要被测试的 n 种水量和 n 种类型的小麦，因此存在水和肥料的 n^2 种可能的组合。我们有一块矩形地域供使用，该地域被分成 n^2 个小地块，它们对应 n^2 种可能的水肥组合。没有理由期望整个地域土壤的肥力都是相同的。于是，很有可能第一行的地块是高肥力的，因此，将会出现小麦的高产量，但这并不单单是由于施于其上的水量和肥料的种类所致。如果在任一行上和任一列上每一种水量出现不多于一次，类似地，在任一行上和任一列上每一种肥料出现也不多于一次，那么我们很可能把土壤肥力对小麦产量的影响降低到最小。这样，n 种水量用到 n^2 个地块上应该确定一个 n 阶拉丁方 A，n 种肥料的使用也应该确定一个 n 阶拉丁方 B。由于所有 n^2 种水-肥组合要被处理，因此，当两个拉丁方并置时，所有 n^2 种

㊀ 没有必要两个拉丁方都基于元素的同一集合。这个选择只为便于论述。

㊁ 为了强调，我们再说一遍，根据鸽巢原理，我们还可以说：每个序偶至多出现一次。

组合就应该各出现一次。这样，拉丁方 A 和 B 将是正交的。于是，这两个 n 阶正交拉丁方则确定测试水和肥料对小麦产量影响的一个试验设计，其中一个拉丁方用于 n 种用水量，而另一个用于 n 种类型的肥料。在前面例子中的两个 4 阶正交拉丁方给我们一个四种水量（标为 0，1，2 和 3）及四种肥料（也标为 0，1，2 和 3）的设计。 □

现在我们把正交的概念从两个拉丁方扩展到任意个数的拉丁方上去。令 A_1，A_2，…，A_k 均为 n 阶拉丁方。不失一般性，假设这些拉丁方都是基于 Z_n 的。我们称 A_1，A_2，…，A_k 是互相正交的，如果它们中的每一对 A_i，A_j（$i\neq j$）是正交的。我们将互相正交的拉丁方记作 MOLS。在 n 是素数的情况下，可以构造 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。

定理 10.4.3 令 n 是素数。则 L_n^1，L_n^2，…，L_n^{n-1} 是 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。

证明： 根据推论 10.1.3，由于 n 是素数，因此，Z_n 中每一非零整数均有乘法逆元。由定理 10.4.2 可知，阵列 L_n^1，L_n^2，…，L_n^{n-1} 皆为 n 阶拉丁方。令 r 和 s 为 Z_n 中互异非零整数。我们证明 L_n^r 和 L_n^s 是正交的。设在并置阵列 $L_n^r\times L_n^s$ 中某个序偶出现两次，比如，i 行 j 列上的序偶与 k 行 l 列上的序偶相同。回忆拉丁方 L_n^r 和 L_n^s 的定义，这意味着

$$r\times i+j=r\times k+l \text{ 及 } s\times i+j=s\times k+l$$

改写这个方程得到

$$r\times(i-k)=(l-j) \text{ 及 } s\times(i-k)=(l-j)$$

从而

$$r\times(i-k)=s\times(i-k)$$

设 $i\neq k$。此时 $(i-k)\neq 0$，从而在 Z_n 中有乘法逆元。用 $(i-k)^{-1}$ 乘以上面方程，消去 $(i-k)$，我们得到一个矛盾：$r=s$。因此必然 $i=k$，代入到第一个方程中，得到 $j=l$。由此推出，在 $L_n^r\times L_n^s$ 中两个位置能够含有相同序偶的唯一方法是这两个位置是同一个位置！这意味着 L_n^r 和 L_n^s 对所有的 $r\neq s$ 都是正交的，因此，L_n^1，L_n^2，…，L_n^{n-1} 是 MOLS。 □

在 10.1 节末尾，简要讨论了称为域的运算系统，它满足通常的算律。我们曾评论道，对于每一个素数 p 和每一个正整数 k 存在具有 p^k 个元素的域（而有限域中元素的个数总是一个素数的幂）。把定理 10.4.2 和 10.4.3 推广到每一个有限域。现在我们就来简要地讨论它。

令 F 为具有 $n=p^k$ 个元素的有限域，其中，p 是某个素数而 k 为正整数。令

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$$

是 F 的元素，且如所指出的，α_0 是 F 的零元。考虑 F 的任一非零元素 α_r（$r\neq 0$）并定义 n 行 n 列的阵列如下：A 的 i 行 j 列上的元素 a_{ij} 为

$$a_{ij}=\alpha_r\times\alpha_i+\alpha_j\quad(i,j=0,1,\cdots,n-1)$$

其中的运算是域 F 中的运算。此时的证明像定理 10.4.2 给出的（在那个证明中用到的只是通常的算律，而由于 F 是域，这些算律是满足的）那样，A 是基于 F 的元素的 n 阶拉丁方。

用 $L_n^{\alpha_i}$ 表示以这种方法构造的拉丁方 A。然后遵照定理 10.4.3 的证明[⊖]，得到

$$L_n^{\alpha_1}, L_n^{\alpha_2}, \cdots, L_n^{\alpha_{n-1}} \tag{10-12}$$

为 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。我们把这些事实概括为下面的定理。

定理 10.4.4 令 $n=p^k$ 是一个整数，它是素数 p 的幂。则存在 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。事实上，从具有 $n=p^k$ 个元素的有限域构造的 $n-1$ 个 n 阶拉丁方（10-12）就是 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。

例 通过得出三个 4 阶拉丁方来解释上面的结构。在 10.1 节我们构造了具有四个元素的域。该域的元素为

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=i,\quad \alpha_3=1+i$$

利用该域的运算（其加法表和乘法表在 10.1 节给出），得到下列拉丁方：

$$L_4^1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 1+i \\ 1 & 0 & 1+i & i \\ i & 1+i & 0 & 1 \\ 1+i & i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（L_4^1 正是 F 的加法表）

$$L_4^i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 1+i \\ i & 1+i & 0 & 1 \\ 1+i & i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i & i \end{bmatrix}$$

$$L_4^{1+i}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 1+i \\ 1+i & i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i & i \\ i & 1+i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

直接验证可知，L_4^1，L_4^i，L_4^{1+i} 是基于 F 的三个 4 阶 MOLS。 □

由定理 10.4.4 可知，只要 n 是素数的幂就存在 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。是否有可能找到多于 $n-1$ 个的 n 阶 MOLS 呢？这个问题的否定答案在下面的定理中给出。

定理 10.4.5 令 n 为一正整数，并令 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 是 k 个 n 阶 MOLS。则 $k\leqslant n-1$；即 n 阶 MOLS 的最大个数最多是 $n-1$。 最多是n-1阶.

证明：不失一般性，假设所给的拉丁方都是基于 Z_n 的元素的。首先观察到下面的事实。每一个拉丁方 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 都可以化成标准型，而且这并不影响它们的相互正交性。后者容易验证，因为如果把两个拉丁方化成标准型后，它们的并置阵列有一个重复的序偶，则并置阵列就必然以一个重复的序偶开始。这样，可以假设每个拉丁方 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 都是标准型。于是，对于每对 A_i，A_j，并置阵列 $A_i\times A_j$ 的第一行等于 $(0,0),(1,1),\cdots,(n-1,n-1)$。现在考虑每个 A_i 的 1 行 0 列位置上的元素。这些元素都不能等于 0，因为 0 已经出现在 0 列该元素直接上方的位置上。因此，在每个 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 中，其 1 行 0 列上

⊖ 再次强调，只用到通常的算律。

的元素为 1，2，…，$n-1$ 之一。不仅如此，A_1，A_2，…，A_k 中没有两个在该位置上相同的整数。因为，如果 A_i 和 A_j，都有 r 在这个位置上，则并置阵列 $A_i \times A_j$ 就会含有数对 (r, r) 两次，因为它已经出现在 0 行上。因此，每个 A_1，A_2，…，A_k 在 1 行 0 列位置上均含有整数 1，2，…，$n-1$ 之一，而且没有两个在这个位置上含有相同的整数。根据鸽巢原理，有 $k \leqslant n-1$，定理得证。 □

对正整数 n，令 $N(n)$ 表示 n 阶 MOLS 的最大个数。因为 1 阶拉丁方与它自己正交，所以有 $N(1)=2$[㊀]。由于没有两个 2 阶拉丁方正交，因此有 $N(2)=1$。由定理 10.4.3，10.4.4 和 10.4.5 得出

$$N(n)=n-1, \text{如果 } n \text{ 是素数的幂}$$

自然想要知道是否 $N(n)=n-1$ 对所有整数 $n \geqslant 2$ 都成立。可是，$N(n)$ 可能会小于 $n-1$（根据定理 10.4.4，如果小于 $n-1$ 发生，那么 n 就不可能是素数的幂）。不是素数幂的最小整数是 $n=6$，我们不仅有 $N(6) \neq 5$，更有 $N(6)=1$；就是说，甚至不存在两个 6 阶的正交拉丁方！这是由 Tarry[㊁]约在 1900 年前后验证的[㊂]。我们可以用 mod n 的整数证明，对于每个奇整数 n 存在一对 n 阶 MOLS。

定理 10.4.6　对于每一个奇整数 n，$N(n) \geqslant 2$。

证明：令 n 为一奇整数。我们将证明，Z_n 的加法表 A 和减法表 B 是 MOLS。A 的 i 行 j 列上的元素 a_{ij} 为 $a_{ij}=i+j$（mod n 的加法），而且由定理 10.4.1 得知，A 是一个 n 阶拉丁方。B 的 i 行 j 列上的元素 b_{ij} 为 $b_{ij}=i-j$（mod n 的减法），首先证明 B 是一个拉丁方。这是简单易行的，正如定理 10.4.1 的证明。设 B 的 i 行上 j 列和 k 列的整数相同。这就是说

$$i-j=i-k$$

两边加上 $-i$ 得到 $-j=-k$，从而 $j=k$。因此，在一行上不存在重复的元素，完全类似地可以证明，在一列上也不存在重复的元素。于是，B 是一个拉丁方。

现在我们证明 A 和 B 是正交的。设在并置阵列 $A \times B$ 中，某个序偶出现两次，比方说

$$(a_{ij}, b_{ij})=(a_{kl}, b_{kl})$$

这意味着

$$i+j=k+l \text{ 和 } i-j=k-l$$

将这两个方程相加和相减得到

$$2i=2k \text{ 和 } 2j=2l$$

记住，n 是奇数，我们观察到，2 和 n 的 GCD 为 1，由定理 10.1.2 可知 2 在 Z_n 中有乘法逆元 2^{-1}。于是，消去上面方程中的 2 得到 $i=k$ 和 $j=l$。因此，$A \times B$ 能够在两个位置上有相同的序偶的唯一方法是这两个位置相同。因而我们得到 A 和 B 是正交的结论。 □

有一种方法将 MOLS 结合起来以得到更大阶数的 MOLS。不过执行和验证这种构造的记法有些麻烦，因为必须处理序偶的序偶。但是，构造的想法却非常简单。我们通过从两个

㊀ $n \geqslant 2$ 阶拉丁方从不与它自己正交。

㊁ G. Tarry：Le problème de 36 officeurs，*Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel*，1（1900），122-123 和 2（1901），170-203。

㊂ 这确实不是简单的验算！

3 阶 MOLS 和两个 4 阶 MOLS 得出两个 12 阶 MOLS 来叙述该想法。考虑由

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}$$

给出的两个 3 阶 MOLS。它们分别对应 Z_3 的加法表和减法表。再考虑由

$$B_1=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}\qquad B_2=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\\3&2&1&0\\1&0&3&2\end{bmatrix}$$

给出的两个 4 阶 MOLS。它们是紧接在定理 10.4.4 后构造的前两个 MOLS 通过用 2 代替 i 并用 3 代替 $1+i$ 得到的。现在我们就来形成 12 行 12 列的阵列 $A_1\otimes B_1$ 和 $A_2\otimes B_2$，它们定义如下。首先用 4 行 4 列的阵列代替 A_1 中的每个元素 a_{ij}^1

$$(a_{ij}^1,\ B_1)=\begin{bmatrix}(a_{ij}^1,\ b_{00}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{01}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{02}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{03}^1)\\(a_{ij}^1,\ b_{10}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{11}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{12}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{13}^1)\\(a_{ij}^1,\ b_{20}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{21}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{22}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{23}^1)\\(a_{ij}^1,\ b_{30}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{31}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{32}^1)&(a_{ij}^1,\ b_{33}^1)\end{bmatrix}$$

结果是基于 12 个整数序偶（p，q）的 12 行 12 列阵列 $A_1\otimes B_1$，其中 p 在 Z_3 中，q 在 Z_4 中。以类似的方法从 A_2 和 B_2 得到 12 行 12 列的阵列 $A_2\otimes B_2$。验证 $A_1\otimes B_1$ 和 $A_2\otimes B_2$ 是基于 12 个序偶的集合的拉丁方以及验证它们正交的方法是初等的。我们把验证工作留作练习题。现在，为了使这些 12 行 12 列阵列基于 Z_{12}[⊖]，我们在 Z_{12}和序偶（p，q）间建立一一对应。这 12! 种对应中的任意一种均可。其中的一个对应是（这是通过以字典序选取序偶而得到的一种对应）：

$$(0,0)\to0,\quad(0,1)\to1,\quad(0,2)\to2,\quad(0,3)\to3,$$
$$(1,0)\to4,\quad(1,1)\to5,\quad(1,2)\to6,\quad(1,3)\to7,$$
$$(2,0)\to8,\quad(2,1)\to9,\quad(2,2)\to10,\quad(2,3)\to11。$$

用这种方法得到的两个 12 阶 MOLS 显示如下：

$$\begin{bmatrix}0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\1&0&3&2&5&4&7&6&9&8&11&10\\2&3&0&1&6&7&4&5&10&11&8&9\\3&2&1&0&7&6&5&4&11&10&9&8\\4&5&6&7&8&9&10&11&0&1&2&3\\5&4&7&6&9&8&11&10&1&0&3&2\\6&7&4&5&10&11&8&9&2&3&0&1\\7&6&5&4&11&10&9&8&3&2&1&0\\8&9&10&11&0&1&2&3&4&5&6&7\\9&8&11&10&1&0&3&2&5&4&7&6\\10&11&8&9&2&3&0&1&6&7&4&5\\11&10&9&8&3&2&1&0&7&6&5&4\end{bmatrix}$$

⊖ 当然，这不是必要的。这么做只是为了避免使拉丁方变成元素为序偶的集合。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 9 & 8 & 11 & 10 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 10 & 11 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 9 & 8 & 11 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 11 & 10 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

将上面的工作一般化，产生如下结果。

定理 10.4.7　如果存在一对 m 阶 MOLS 和一对 k 阶 MOLS，则存在一对 mk 阶 MOLS。更一般地

$$N(mk) \geqslant \min\{N(m), N(k)\}$$

将定理 10.4.7 与定理 10.4.4 结合得到如下结果。

定理 10.4.8　令 $n \geqslant 2$ 为一整数，并令

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_k^{e_k}$$

是将 n 分解成互异素数 p_1，p_2，…，p_k 的分解。则

$$N(n) \geqslant \min\{p_i^{e_i} - 1 : i = 1, 2, \cdots, k\}$$

证明：应用定理 10.4.7 和对 n 的互异素数因子个数 k 的简单归纳法论证，我们得到

$$N(n) \geqslant \min\{N(p_i^{e_i}) : i = 1, 2, \cdots, k\}$$

再根据定理 10.4.4，有

$$N(p_i^{e_i}) = p_i^{e_i} - 1$$

定理得证。□

推论 10.4.9　令 $n \geqslant 2$ 为一整数，但不是奇数的两倍。则存在一对正交的 n 阶拉丁方。

证明：如果 p 是素数且 e 是正整数，只要不是 $p=2$ 和 $e=1$，就有 $p^e - 1 \geqslant 2$。因此，如果 n 的素分解不是恰好含有一个 2，就是说，如果 n 不是奇数的两倍，则由定理 10.4.8，有 $N(n) \geqslant 2$。□

使推论 10.4.9 不保证一对 n 阶 MOLS 存在的整数 n 是整数

$$2, 6, 10, 14, 18, \cdots, 4k+2, \cdots \tag{10-13}$$

我们已经评述过，不存在 2 阶 MOLS 对和 6 阶 MOLS 对。于是，第一个未定的 n 是 $n=10$。欧拉在 1782 年猜测，对于序列（10-13）中的整数均不存在 n 阶 MOLS 对。但是，Bose，

Shrikhande 和 Parker 的联合努力[1]成功地证明了，欧拉的猜测只对 $n=2$ 和 $n=6$ 成立；就是说，除 2 和 6 外，对于序列（10-13）中的每一个整数 n 均存在一对 n 阶 MOLS。我们不证明这个结果，但是下面给出由 Parker[2]在 1959 年构造的一对 10 阶 MOLS。此前近 200 年来，10 是欧拉猜想中的最小的未定情况。

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 6 & 5 & 7 & 8 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 2 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 5 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 9 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 9 & 8 & 7 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 0 & 2 & 4 & 9 & 8 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 1 & 3 & 5 & 9 & 0 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 8 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

根据定理 10.4.5，对每一整数 $n\geqslant 2$，有 $N(n)\leqslant n-1$，根据定理 10.4.4，如果 n 是素数的幂则有等式成立。不存在使得$N(n)=n-1$ 的其他已知的 n 值。我们在 $n-1$ 个 n 阶 MOLS 与 10.2 节的区组设计之间建立一种联系。令 A_1，A_2，…，A_{n-1}表示 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。使用 $n+1$ 个阵列

$$R_n,\ S_n,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-1} \tag{10-14}$$

来构造具有参数

$$b=n^2+n,\ v=n^2,\ k=n,\ r=n+1,\ \lambda=1$$

的区组设计$\mathcal{B}$，其中，R_n 和 S_n 在式(10-10)和式(10-11)中已被定义。我们知道，$A_i(k)$表示 A_i 被$k(k=0,1,\cdots,n-1)$占据的位置的集合。由于 A_i 为一拉丁方，因此$A_i(k)$包含每一行与每一列上的位置，特别地，在$A_i(k)$中没有属于同一行或属于同一列的两个位置。我们对 R_n 和

[1] R.C.Bose，S.S.Shrikhande，and E.T.Parker：Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture，*Canadian J. Math.*，12（1960），189-203.See also the account written by Martin Gardner in his Mathematical Games column in the *Scientific American*（November，1959）。

[2] E.T.Parker：Orthogonal Latin squares，*Proc. Nat. Acad. Sciences*，45（1959），859-862。

S_n 也用这个记号。例如，R_n（0）表示 R_n 被 0 所占据的位置的集合，并且这个集合是 0 行的位置的集合，S_n（1）表示 S_n 被 1 占据的位置的集合从而是 1 列的位置的集合。

将样品集合 X 取作 n 行 n 列阵列的 $v=n^2$ 个位置的集合；即

$$X=\{(i,j):i=0,1,\cdots,n-1;j=0,1,\cdots,n-1\}$$

式（10-14）的 $n+1$ 个阵列的每一个都确定 n 个区组：

$$R_n(0)\quad R_n(1)\quad \cdots\quad R_n(n-1) \tag{10-15}$$

$$S_n(0)\quad S_n(1)\quad \cdots\quad S_n(n-1) \tag{10-16}$$

$$\begin{matrix} A_1(0) & A_1(1) & \cdots & A_1(n-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n-1}(0) & A_{n-1}(1) & \cdots & A_{n-1}(n-1) \end{matrix} \tag{10-17}$$

这样我们有 $b=n\times(n+1)=n^2+n$ 个组，每个区组含有 $k=n$ 个样品。令 $\mathcal{B}$ 表示这些区组的集合。为了能够断定 $\mathcal{B}$ 是具有特定参数的 BIBD，我们只需验证每一对样品恰好在 $\lambda=1$ 个区组中一起出现。有三种可能要考虑：

ⅰ)同行的两个样品：它们恰好在式（10-15）的区组之一，但不在其他区组中。

ⅱ)同列的两个样品：它们恰好在式（10-16）的区组之一，但不在其他区组中。

ⅲ)两个样品 (i,j) 和 (p,q) 属于不同的行与不同的列：这两个样品不会同时存在于式（10-15）和式（10-16）的任一区组。设它们同时存在于区组 $A_r(e)$ 和 $A_s(f)$。这意味着 A_r 的 i 行 j 列的位置和 p 行 q 列的位置存在着元素 e，并且，A_s 的同样位置存在着元素 f。如果 $r\neq s$，那么，并置阵列 $A_r\times A_s$ 的序偶 (e,f) 出现两次，与 A_r 和 A_s 的正交性矛盾。而 $r=s$ 意味着 A_r 同时有 e 和 f 在 i 行 j 列的位置和 p 行 q 列的位置。我们断言，$e=f$。因此，$A_r(e)$ 和 $A_s(f)$ 是同一区组，可以断定，(i,j) 和 (p,q) 至多同在一个区组内。

此时我们知道，每一对样品至多同在一个区组中。这足以使我们断定每一对样品恰好同在一个区组中。通过类似于 10.2 节所做的计数变元得到：共存在 n^2 个样品，将它们构成 n^2（n^2-1）/2 对，每一对至多在 n^2+n 个区组中的一个区组中。每个区组有 n 个样品，从而包含 n（$n-1$）/2 个对。对于所有的区组共有

$$(n^2+n)\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2(n^2-1)}{2}$$

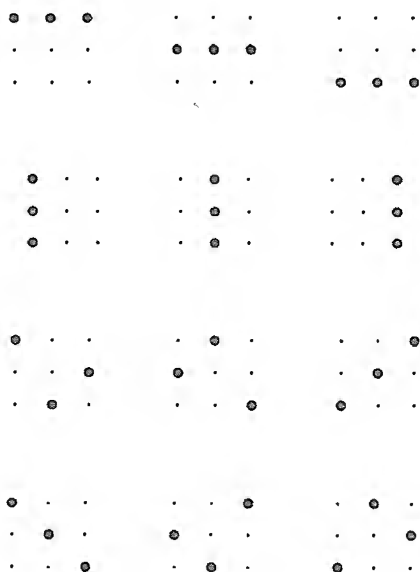
个对，而这恰好又是样品的总对数。因此，根据鸽巢原理，每一对样品必然恰在一个区组中。从而，$\mathcal{B}$ 是指数 $\lambda=1$ 的 BIBD。

我们注意，所构造的设计 $\mathcal{B}$ 在讨论 Steiner 系统的 10.2 节意义下是可解的。n^2+n 个区组的集合分成 $n+1$ 个部分（可解类），每部分 n 个区组（见式（10-15）、式（10-16）和式（10-17）），而每个可解类均为 n^2 个样品的一个划分。

例　用两个 3 阶拉丁方：

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}$$

解释 BIBD 的上述结构。样品是 9 行 9 列阵列上的 9 个位置，而区组则通过可解类几何地描绘如下：



如果把样品看作点，把区组看作线，并如通常那样当两条线没有公共点时称这两条线是平行的，那么上面图示中的每一个（可解类）均由 3 条平行线组成。恰好属于一个区组的每一对样品变成恰好确定一条线的两点。设计的可解性也变为性质：给定一条线和不在其上的一点，恰好存在一条线平行于包含给定点的前一条线。这就是所谓欧几里得几何的平行公设。

定理 10.4.10 令 $n\geqslant 2$ 为一整数。如果存在 $n-1$ 个 n 阶 MOLS，则存在具有参数

$$b=n^2+n,\ v=n^2,\ k=n,\ r=n+1,\ \lambda=1 \tag{10-18}$$

的可解 BIBD。反之，如果存在具有参数（10-18）的可解 BIBD，则存在 $n-1$ 个 n 阶 MOLS。

证明： 上面已经指出如何从 $n-1$ 个 n 阶 MOLS 构造具有参数（10-18）的可解 BIBD。这个过程可以逆转。我们概述如何构造，但把一些细节留作练习去验证。设有一个具有参数（10-18）的可解的 BIBD $\mathcal{B}$。由于存在 n^2 个样品，并且每个区组含有 n 个样品，因此每个可解类包含 n 个区组。不仅如此，由于存在 n^2+n 个区组，因此存在 $n+1$ 个可解类

$$\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2,\ \cdots,\ \mathcal{B}_{n+1}$$

为了将这些样品“坐标化”，我们使用两个可解类 $\mathcal{B}_n$ 和 $\mathcal{B}_{n+1}$。令 $\mathcal{B}_n$ 中的区组是

$$H_0,\ H_1,\ \cdots,\ H_{n-1}$$

并令 $\mathcal{B}_{n+1}$ 中的区组是

$$V_0,\ V_1,\ \cdots,\ V_{n-1}$$

（H 表示水平而 V 表示垂直）。给定任一样品 x，存在 0 和 $n-1$ 之间唯一的 i，使 x 在 H_i 中，并存在 0 和 $n-1$ 之间唯一的 j，使 x 在 V_j 中。这对每一个样品 x 给出有序的一对坐标（i，j）。而且，由于指数 λ 等于 1，两个不同的样品不会得到相同的坐标（如果 x 和 y

都有坐标（i，j），那么 x 和 y 就会同时落入两个区组 H_i 和 V_j 中）。现在将样品集 X 看成是坐标对本身[㊀]：

$$X=\{(i,j):i=0,1,\cdots,n-1;j=0,1,\cdots,n-1\}$$

现在考虑任一另外的可解类 $\mathcal{B}_p(p=0,1,\cdots,n-1)$。令 $\mathcal{B}_p$ 中的区组标记为

$$A_p(0),A_p(1),\cdots,A_P(n-1)$$

这些区组将 X 划分成 n 个大小为 n 的集。正如记号所指出的，令 A_p 为 n 行 n 列的阵列，它在位置集合 A_p（k）的每个位置上的元素均为 k。例如，若在 A_p 的 i 行有两个 k，就意味着存在两个样品 (i,a) 和 (i,b) 既在区组 H_i 又在区组 A_i（k）中。因此，A_p 是一个拉丁方。此外，对于 $p\neq q$，A_p 与 A_q 是正交的：即如果并置阵列 $A_p\times A_q$ 在 i 行 j 列的位置上和在 u 行 v 列的位置上含有相同的序偶，那么这两个样品 (i,j) 和 (u,v) 就会在两个区组中。因此，A_1，A_2，$\cdots$，A_{n-1} 是 n 阶 MOLS。 □

我们用一些问题来结束本节，这些问题在人们企图构造拉丁方时会自然产生。

构造 n 阶拉丁方有三种自然的方法：

ⅰ)逐行构造

ⅱ)逐列构造

ⅲ)逐个元素构造

前两种方法非常相似，我们只考虑第一种。

逐行构造拉丁方指的是一次得出完整的一行。于是，构造一个 3 阶拉丁方如下：首先选择 $\{0,1,2\}$ 的一个排列，比如 2，1，0 作为 0 行，然后再选一个排列，比如 0，2，1 作为 1 行（但在其任一列的位置上不能出现重复的整数），最后选择排列，比如 1，0，2 作为 2 行（实际上，如果只是不知道拉丁方的最后一行而其余各行都知道的话，那么最后一行可以唯一地填入，因为，必须在每一列的位置上写入该列尚未出现的整数）。结果为

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

如果我们用这种方法构造拉丁方，在每一步都要为下一行选择一个允许的排列，那么我们是不是会被迫半途而止呢？

逐个元素构造拉丁方指的是一次一个元素地插入每个元素出现的所有位置。于是，可以这样构造上面的 3 阶拉丁方：首先选择 3 个 0 的位置（三个非攻击型车的位置），然后选择 3 个 1 的位置，最后是 2 的 3 个位置（像逐行构造一样，这里的最后一步也是唯一确定的）。*如果我们用这种方法构造拉丁方，在每一步都要为下一个整数选择一些位置，那么我们是不是会被迫半途而止呢？*

我们指出，上一章的定理 9.2.5 使我们能够回答这两个问题[㊁]。首先我们给一个定义，

㊀ 我们做类似于解析几何中的标识，其中，平面上的点被赋予坐标，并且坐标“变成”点。

㊁ 让“猫出袋子，”我们从不会半途而止。

它是由第一个问题提出的。

令 m 和 n 为整数且 $m \leqslant n$。基于 Z_n 中的整数的拉丁矩形是一个 m 行 n 列的阵列，使没有整数在任一行或在任一列上重复出现。m 行 n 列拉丁矩形的每一行都是 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的一个排列，而且没有列包含重复的整数。如果 $m=n$，对拉丁矩形的定义等价于拉丁方的定义[⊖]。下面是 3 行 5 列拉丁矩形的一个例子：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

我们说 m 行 n 列拉丁矩形 L 可以完备化，如果能够添加 $n-m$ 行到 L 上并得到一个 n 阶拉丁方 L^*。这样的拉丁方 L^* 叫做 L 的完备化。例如，上面的拉丁矩形 L 的一个完备化为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

我们对第一个问题的答案是下述定理的推论。

定理 10.4.11 令 L 为一基于 Z_n 的 m 行 n 列拉丁矩形，且 $m<n$，则 L 有一个完备化。

证明： 只要证明我们能够添加一个新行到 L 中以得到 $(m+1)$ 行 n 列拉丁矩形即可，因为此时可以归纳地进行下去。我们定义一个二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 如下。其左顶点的集合为 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$，将它看成对应列 0，1，…，$n-1$；右顶点的集合为 $Y=\{0,1,\cdots,n-1\}$，当然，它就是 L 基于其上的那些元素。在 Δ 中存在连接顶点 x_i 和顶点 j 的边 $\{x_i,j\}$ 当且仅当 j 在 L 的 i 列不出现。于是，x_i 被一条边连接到能够作为新行 i 列位置上的元素的所有那些整数上。由于 L 是 m 行 n 列拉丁矩形，因此第 i 列含有 m 个不同的整数，从而新行位置 i 处存在 $n-m$ 个可供选择的整数。此外，L 的每一行都是 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的一个排列，因此，每一个整数 j 在 L 中 m 个不同的列上出现 m 次，从而还可供 $n-m$ 列选用。这意味着 G 是 $n-m \geqslant 1$ 次正则的。根据定理 9.2.5，G 有一个完美匹配。设完美匹配的边为

$$\{x_0,i_0\},\{x_1,i_1\},\cdots,\{x_{n-1},i_{n-1}\}$$

则 i_0，i_1，…，i_{n-1} 是 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的一个排列。通过添加

$$i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_{n-1}$$

作为新的一行所得到的（$m+1$）行 n 列阵列是一个拉丁矩形[⊜]。 □

下面的定义产生于我们的第二个问题。考虑 n 行 n 列阵列 L，在 L 中有些位置尚未有元素占据，其余位置则被 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的整数占据。设若整数 k 在 L 中出现，则它出现 n 次并且没有两个 k 同属于一行或一列。此时我们称 L 为半-拉丁方。如果 m 个不同的整数出

⊖ 又是鸽巢原理！

⊜ 由第 9 章的练习 8，G 的边可以划分为 $n-m$ 个完美匹配，而这些完美匹配指出如何同时完备化 L 以形成 n 阶拉丁方。

现在 L 中，那么我们就说 L 具有指数 m。指数为 3 的 5 阶半-拉丁方的一个例子为

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 2 \\ & 2 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & & 2 & \\ 2 & 0 & & 1 & \\ & & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以把这个例子看成是 5 行 5 列棋盘，棋盘上有 5 个红非攻击型车（那些 0），5 个白非攻击型车（那些 1）以及 5 个蓝非攻击型车（那些 2）。我们要寻找的是该棋盘上的 5 个绿非攻击型车和 5 个黄非攻击型车的位置。如果把 3 看作是绿把 4 看作是黄非攻击型车，则解可由

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

给出。

我们说 n 阶半-拉丁方 L 可以被**完备化**成拉丁方，如果能够将元素填入空白位置以得到 n 阶拉丁方 $L^{\#}$。所得拉丁方 $L^{\#}$ 叫做 L 的**完备化**。我们第二个问题的答案为本章最后一个定理的推论。

定理 10.4.12　*令 L 为 n 阶半-拉丁方并且其指数 $m<n$。则 L 有一个完备化。*

证明：设在 L 中出现的整数为 0，1，…，$m-1$。下面只要证明我们能够找到 n 个空白位置并将 m 填入以得到指数为 $m+1$ 的 n 阶拉丁方即可，因为此时我们可以归纳地进行下去。再定义一个二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ 如下。其左顶点的集合为 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$，将它看成对应行 0，1，…，$n-1$；右顶点的集合为 $Y=\{y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}\}$，将它看成对应列。在 Δ 中存在连接顶点 x_i 和顶点 y_j 的边 $\{x_i, y_j\}$ 当且仅当 i 行 j 列上的位置在 L 中未被占据。由于每个整数 0，1，…，$m-1$ 在 L 的每一行出现一次并在 L 的每一列也出现一次，因此 G 是 $n-m$ 次正则的。再由定理 9.2.1 可知，G 有一个完美匹配并且该完美匹配确定了 m 所期望的位置。 □

定理 10.4.11 和定理 10.4.12 之间的类似现象不是偶然的。在 m 行 n 列拉丁矩形和指数为 m 的 n 阶半-拉丁方之间存在一一对应，它能够将定理 10.4.11 的证明转换成定理 10.4.12 的证明，反之亦然。该对应如下。令 L 是（基于 Z_n 的）m 行 n 列拉丁矩形，用 a_{ij} 标记 i 行 j 列位置上的元素。如果 i 出现在 L 的 k 行 j 列位置处，则通过令其 i 行 j 列位置上的元素 b_{ij} 为 k 来定义一个 n 行 n 列阵列 B

$$b_{ij}=k \text{ 当且仅当 } a_{kj}=i$$

B 中有些位置仍然是空的，因为如果 $m<n$，那么某些整数就不会出现在 L 的列上。我们把证明用这种方法从 L 构造的阵列 B 是指数为 m 的半-拉丁方的工作留作练习。

例 考虑3行5列拉丁矩形

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\3&4&1&0&2\\1&0&4&2&3\end{bmatrix}$$

此时，按照上面的构造方法，得到指数为3的5阶半-拉丁方B：

$$B=\begin{bmatrix}0&2&&1&\\2&0&1&&\\&&0&2&1\\1&&&0&2\\&1&2&&0\end{bmatrix}$$

□

10.5 练习题

1. 计算 mod 4 的整数的加法表和乘法表。
2. 计算 mod 4 的整数的减法表。如何将它与练习1算出的加法表比较?
3. 计算 mod 5 的整数的加法表和乘法表。
4. 计算 mod 5 的整数的减法表。如何将它与练习3算出的加法表比较?
5. 证明，在 Z_n 的 mod n 运算中没有两个整数有相同的加法逆元。从鸽巢原理推断：

$$\{-0, -1, -2, \cdots, -(n-1)\} = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

（记住，$-a$ 是一个整数，当加到 Z_n 中的a 上时，结果为0。）

6. 证明，Z_n 的减法表的列是Z_n 的加法表的列的重排（参见练习题2和练习题4）。
7. 计算 mod 6 的整数的加法表和乘法表。
8. 用运算 mod 8 确定 Z_8 中的整数的加法逆元。
9. 确定 mod 20 的整数中3，7，8和19的加法逆元。
10. 确定 Z_{12}中哪些整数有乘法逆元，并在乘法逆元存在时将它们求出。
11. 对 Z_{24}中的下列每一个整数，如果其乘法逆元存在，确定其乘法逆元：

$$4, 9, 11, 15, 17, 23$$

12. 证明，$n-1$ 在 Z_n 中总有乘法逆元（$n\geqslant 2$）。
13. 令 $n=2m+1$ 为一奇整数，且 $m\geqslant 2$。证明，$m+1$ 在 Z_n 中的乘法逆元是2。
14. 应用10.1节中的算法求出下列整数对的 GCD
    - ⅰ)12 和 31
    - ⅱ)24 和 82
    - ⅲ)26 和 97
    - ⅳ)186 和 334
    - ⅴ)423 和 618

15. 对于练习 14 中的每一对整数，令 m 表示数对的第一个整数，n 表示数对的第二个整数。当 Z_n 中 m 的乘法逆元存在时，确定该乘法逆元。
16. 将 10.1 节计算 GCD 的算法应用于 15 和 46，然后用结果确定 Z_{46}中 15 的乘法逆元。
17. 从域 Z_2 开始，证明 x^3+x+1 不能以非平凡的方法分解（变成具有 Z_2 中的系数的多项式的乘积），然后利用该多项式构造具有 $2^3=8$ 个元素的域。令 i 是该多项式添加到 Z_2 中的根，然后做下列计算：

    ⅰ) $(1+i)\ +\ (1+i+i^2)$

    ⅱ) $(1+i^2)\ +\ (1+i^2)$

    ⅲ) i^{-1}

    ⅳ) $i^2\times\ (1+i+i^2)$

    ⅴ) $(1+i)\ (1+i+i^2)$

    ⅵ) $(1+i)^{-1}$
18. 存在具有参数 $b=10$，$v=8$，$r=5$ 和 $k=4$ 的 BIBD 吗？
19. 存在其参数满足 $b=20$，$v=18$，$k=9$ 及 $r=10$ 的 BIBD 吗？
20. 令 B 是具有参数b，v，k，r，λ 的 BIBD，其样品集为$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$，它的区组是 B_1，B_2，…，B_b。对于每一个区组 B_i，令$\overline{B_i}$表示那些不属于B_i 的样品的集合。令$\mathcal{B}^c$ 为X 的子集$\overline{B_1}$，$\overline{B_2}$，…，$\overline{B_b}$的集合。证明如果有 $b-2r+\lambda>0$，则$\mathcal{B}^c$ 为具有参数

$$b'=b,\ v'=v,\ k'=v-k,\ r'=b-r,\ \lambda'=b-2r+\lambda$$

    的区组设计。BIBD $\mathcal{B}^c$ 叫做$\mathcal{B}$的补设计。
21. 确定具有 10.2 节中参数 $b=v=7$，$k=r=3$，$\lambda=1$ 的 BIBD 的补设计。
22. 确定具有 10.2 节中给定的参数 $b=v=16$，$k=r=6$，$\lambda=2$ 的 BIBD 的补设计。
23. BIBD 和它的补的关联矩阵有何关系？
24. 证明，具有 v 个样品且其区组大小k 等于$v-1$ 的 BIBD 没有补设计。
25. 证明，带有参数 b，v，k，r，λ 的 BIBD 具有补设计当且仅当 $2\leqslant k\leqslant v-2$（见练习题 20 和练习题 24）。
26. 令 B 为Z_n 中的差分集。证明，对于 Z_n 中的每个整数k，$B+k$ 也是差分集（这意味着，不失一般性，我们总能够假设差分集包含 0，因为如果不包含 0，则我们可以用 $B+k$ 代替之，其中 k 是B 中任一整数的加法逆元）。
27. 证明，Z_v 本身是Z_v 中的一个差分集（它们是平凡的差分集）。
28. 证明，$B=\{0,1,3,9\}$ 是 Z_{13}中的差分集，并用该差分集作为初始值区组构造一个 SBIBD。找出这个区组设计的各参数。
29. $B=\{0,2,5,11\}$是 Z_{12}中的差分集吗？
30. 证明，$B=\{0,2,3,4,8\}$是 Z_{11}中的差分集。由 B 发展出来的 SBIBD 的参数是什么？
31. 证明，$B=\{0,3,4,9,11\}$是 Z_{21}中的差分集。
32. 用定理 10.3.2 构造一个指数为 1 且有 21 个样品的 Steiner 三元系统。
33. 令 t 为一正整数。用定理 10.3.2 证明，存在指数为 1 且有 3^t 个样品的 Steiner 三元系统。
34. 设 t 为一正整数。证明，如果存在指数为 1 且有 v 个样品的 Steiner 三元系统，那么就

存在有 v^t 个样品的 Steiner 三元系统（见练习题 33）。

35. 设存在参数 b，v，$k=3$，r，λ 的 Steiner 三元系统。令 a 是 λ 被 6 所除的余数。用定理 10.3.1 证明下列结论：
    - ⅰ） 如果 $a=1$ 或 5，则 v 被 6 除的余数为 1 或 3。
    - ⅱ） 如果 $a=2$ 或 4，则 v 被 3 除的余数为 0 或 1。
    - ⅲ） 如果 $a=3$，则 v 是奇数。
36. 验证下列构造指数为 1 且有 13 个样品的 Steiner 三元系统的三个步骤。以 Z_{13}开始。
    - ⅰ） 整数 1，3，4，9，10，12 中的每一个作为$B_1=\{0,1,4\}$中两个整数的差分恰好出现一次。
    - ⅱ） 整数 2，5，6，7，8，11 中的每一个作为 $B_2=\{0,2,7\}$ 中两个整数的差分恰好出现一次。
    - ⅲ） 从 B_1 发展出来的 12 个区组与从 B_2 发展出来的 12 个区组都是指数是 1 且有 13 个样品的 Steiner 三元系统的区组。
37. 证明，如果以任意方式交换拉丁方的行并以任意方式交换拉丁方的列，所得结果总是拉丁方。
38. 利用定理 10.4.2 及 $n=6$ 和 $r=5$ 构造 6 阶拉丁方。
39. 令 n 为一正整数，令 r 为Z_n 中的非零整数，使得 r 和n 的 GCD 不是 1。证明，使用定理 10.4.2 中的描述构造的阵列不是拉丁方。
40. 令 n 为一正整数，令 r 和r'为Z_n 中的互异非零整数，使 r 和n 的 GCD 是 1 且 r'和n 的 GCD 也是 1。证明，使用定理 10.4.2 构造的两个拉丁方未必正交。
41. 用定理 10.4.2 及 $n=8$ 和 $r=3$ 构造一个 8 阶拉丁方。
42. 构造 4 个 5 阶 MOLS。
43. 构造 3 个 7 阶 MOLS。
44. 构造 2 个 9 阶 MOLS。
45. 构造 2 个 15 阶 MOLS。
46. 构造 2 个 8 阶 MOLS。
47. 令 A 为一个 n 阶拉丁方，并存在 n 阶拉丁方B，使 A 和B 正交。B 叫做A 的*正交配偶*。把 A 中的 0 当作红车，1 当作白车，2 当作蓝车等等。证明，在 A 中存在n 个非攻击型车，它们当中没有两个有相同的颜色。再证明，n^2 个车的整个集合可以划分成 n 个集合，每个集合由 n 个非攻击型车组成，并且在同一集合中没有两个车有相同的颜色。
48. 证明，Z_4 的加法表是一个没有正交配偶的拉丁方（见练习 47）。
49. 首先构造 4 个 5 阶 MOLS，然后如定理 10.4.10 所给出的，构造对应的这 4 个 MOLS 的可解 BIBD。
50. 令 A_1 和 A_2 是 m 阶 MOLS，并令 B_1 和 B_2 是 n 阶 MOLS。证明，$A_1\otimes B_1$ 和 $A_2\otimes B_2$ 是 mn 阶的 MOLS。
51. 填补定理 10.4.10 证明中的细节。
52. 构造 3 行 6 列拉丁矩形

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的一个完备化。

53. 构造 3 行 7 列拉丁矩形

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

的一个完备化。

54. 有多少其第一行等于

$$0 \quad 1 \quad 2 \cdots \ n-1$$

的 2 行 n 列拉丁矩形？

55. 构造半-拉丁方

$$\begin{bmatrix} & 2 & 0 & & & 1 \\ 2 & 0 & & & 1 & \\ 0 & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & 0 \\ & 1 & & & 0 & 2 \\ 1 & & & 0 & 2 & \end{bmatrix}$$

的一个完备化。

56. 构造半-拉丁方

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & & & & 3 \\ 2 & 0 & & 1 & & 3 & \\ 3 & & 0 & 2 & 1 & & \\ & 3 & 2 & 0 & & 1 & \\ & & 3 & & 0 & 2 & 1 \\ 1 & & & & 3 & 0 & 2 \\ & 1 & & 3 & 2 & & 0 \end{bmatrix}$$

的一个完备化。

57. 令 $n \geqslant 2$ 为一整数。证明，$n-2$ 行 n 列拉丁矩形至少有两个完备化，对每个 n 找出一个例子使其恰好有两个完备化。

58. n 阶拉丁方 A 称作是对称的，如果对所有的 $i \neq j$，其 i 行 j 列上的元素 a_{ij} 等于 j 列 i 行上的元素 a_{ji}。证明，Z_n 的加法表是对称的拉丁方。

59. n 阶（基于 Z_n 的）拉丁方 A 是幂等的，如果其从左上到右下的对角线上的元素是 0，1，2，…，$n-1$。

ⅰ）构造一个 5 阶幂等拉丁方的例子。

ⅱ）构造一个 5 阶对称幂等拉丁方的例子。

60. 证明对称幂等拉丁方具有奇数的阶。

61. 令 $n=2m+1$，其中 m 是正整数。证明，其 i 行 j 列上的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij}=(m+1)\times(i+j)\quad(\text{mod } n \text{ 的运算})$$

的 n 行 n 列阵列 A 为对称、幂等的 n 阶拉丁方［注：整数 $m+1$ 是 2 在 Z_n 中的乘法逆元。因此我们对 a_{ij} 的描述是对于“平均的” i 和 j 进行］。

62. 令 L 是（基于 Z_n 的）m 行 n 列拉丁矩形，并令其 i 行 j 列上的元素用 a_{ij} 表示。我们定义 n 行 n 列阵列 B，其 i 行 j 列位置上的元素 b_{ij} 满足

$$b_{ij}=k,\text{ 若 } a_{kj}=i$$

否则，b_{ij} 就是空的。证明，B 是指数为 m 的 n 阶半-拉丁方。特别地，如果 A 是 n 阶拉丁方，那么，B 也是 n 阶拉丁方。

第11章 图论导引

拿你最喜爱的城镇[一]街道图，在所有两条或多条街道的汇合处或一条街道的尽头，都画上一个粗点•，就得到了一个所谓(组合学中)图的例子。极有可能的是，在你喜爱的这个城市中，某些街道是单行道，只允许单向行驶，在所有的单行道上画一个箭头→，表示允许行驶的方向。在所有的双行道上画一个双箭头⟷，这样就得到了一个所谓的有向图。现在考虑你所喜爱的这个城镇里的居民，在一对相爱的人之间连上一条线，就得到了图的另一个例子。但你要承认这样的事实：有时一个人对另一个人的爱，并不总是能够得到对方的回报，所以就像你刚才对街道所做的那样，可能还得在这些线上画个箭头，其结果又是一个有向图。现在再以你喜爱的化学分子[二]为例，组成分子的某些原子受其他原子的约束，把这样的约束看作是街道或是线，就又得到了另外一个图。最后，考虑栖息在你喜爱城镇里的所有不同种类的动物、昆虫和植物，如果一个物种捕食另一个物种，就在它们之间画上一个箭头，这回你又得到了一个有向图。由于两类不同的物种可能同时捕食同一类物种，在这样的两类物种之间画上一条线，就得到了一个表示物种之间竞争的图。

上面的讨论表明，图和有向图为相关实体或以某种方式相互约束的实体构成的集合提供了一种数学模型。有关图论的第一篇文章，是由著名瑞士数学家 Leonhard Euler 写于 1736 年，它探讨的是著名的哥尼斯堡七桥问题。图论在智力难题和游戏方面有着其历史根源，但今天它为许多学科的研究，如网络学、化学、心理学、社会科学、生态学以及遗传学等，都提供了一种自然的、同时又非常重要的语言和构架。图在计算机科学中也是一种极为有用的模型，因为在计算机科学中出现的许多问题，都能够很容易地通过图的算法去表达、去研究、去解决。在第 9 章中，我们已经讨论了一类特殊的、叫做二分图的图，但本章从任何角度而言，都不明显依赖于第 9 章的内容，这两章内容可以独立阅读。我们将在第 12 章论述有向图。

11.1 基本性质

一个图 G(也叫做简单图)由两种实体构成，它有一个叫做顶点(有时也叫做结点)的元素的有限集合

$$V=\{a,b,c,\cdots\}$$

和一个叫做边的不同顶点对的有限集合 E，我们用

$$G=(V,E)$$

来表示图的顶点集是 V，边集是 E。集合 V 中顶点的个数 n 叫做图 G 的阶。如果

$$\alpha=\{x,y\}=\{y,x\}$$

[一] 我最喜爱的城市是威斯康星州的麦迪逊市。

[二] 假如你确实有一个喜爱的化学分子！

是 G 的一条边，就称 α 连接 x 和 y，且 x 和 y 是邻接的；也称 x 和 α、y 和 α 是关联的。由定义，图是一个抽象的数学实体，但如果把它用平面上的图形来表示的话，也可以认为图是一个几何实体。我们用不同的点——一个顶点来表示每一个顶点 x（用该顶点标记顶点点），两个顶点点之间用一条简单的曲线[㊀]来连接，当且仅当这两个顶点确定图 G 的一条边 α。我们称这样的一条曲线为边曲线，用 α 来标记。画图时必须注意：一条边曲线 α 通过一个顶点 x，仅当 x 是边 α 的一个顶点，否则我们的图形将含混不清。

例　一个 5 阶图 G 定义为

$$V=\{a,b,c,d,e\}$$

和

$$E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\},\{e,a\},\{e,b\},\{e,d\}\}$$

该图的几何图形如图 11-1 所示。□

如果改变一下图的定义，允许某些顶点对构成的边多于一条，则这样的图叫做多重图。在多重图 $G=(V,E)$ 中，E 是一个多重集。边 $\alpha=\{x,y\}$ 在 E 中出现的次数，叫做它的重数，用 $m\{x,y\}$ 表示。更一般地，若允许图中有环，即允许有形如 $\{x,x\}$ 的边，使一个顶点自邻接[㊁]，则这样的图叫做一般图。

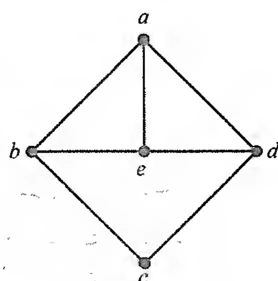


图　11-1

例　在图 11-2 中，给出了一个 9 边 4 阶多重图；图 11-3 是一个 21 边 13 阶的一般图，称为 *GraphBuster* 图[㊂]。(小鬼图)　□

有时，我们画一个图（或多重图或一般图）的几何图形时，不得不画一条这样的边曲线，它与另外一条边曲线相交叉[㊃]。

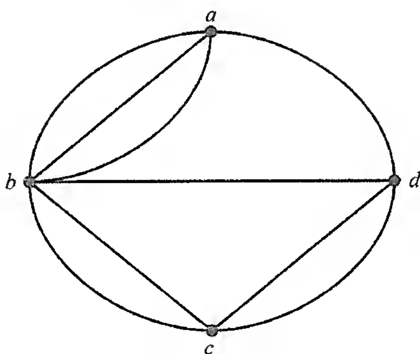


图　11-2

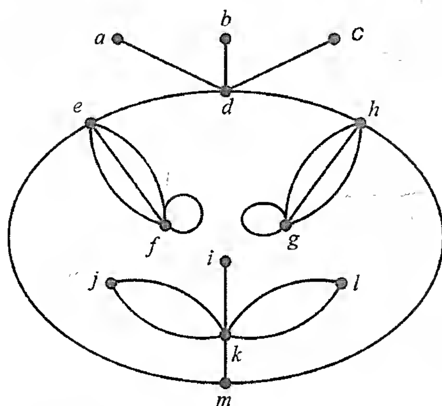


图　11-3

一个 n 阶图叫做完全图，如果它的任意一对不同顶点都构成一条边。或者说，在一个

㊀ 一个不自交的曲线。

㊁ 因此，环是一个多重集，它是由同一个顶点重复两次而构成的。

㊂ "你要喊谁？" GraphBuster！（小鬼）

㊃ 但要记住我们的规则，一条边曲线 α 不允许包含顶点点 x，除非 x 与 α 是关联的。

完全图中，任意一个顶点都与其他所有顶点邻接。一个 n 阶完全图有$n(n-1)/2$ 条边，并记为 K_n。

例 图 11-4 给出了完全图 K_1，K_2，K_3，K_4，K_5 的图形。不难确信，在任意一个 K_5 的图形中，至少有两条边相交于一个不是顶点的点。K_5 的另外一种画法是用一个内接五角星的五边形来表示。 □

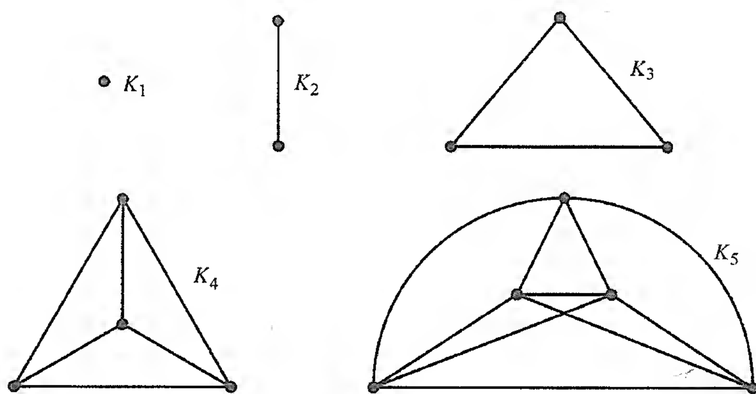


图 11-4

一个一般图 G 是平面的，如果能在平面上画出它的图形，使其任意两条边仅在顶点处相交。这样的图形也叫做平面图，或叫做图 G 的平面图表示。在图 11-4 中，K_1，K_2，K_3，K_4 的图形是平面的，因此，这些图都是平面图，K_5 的图形不是平面的，因为它有两条边相交于一个非顶点的点，事实上，K_5 的确不是平面图。在第 13 章，我们将对平面图进行更详细的讨论。

在一般图G中，与顶点x相关联的边的数目叫做该顶点的度数（或次数），记为 $\deg(x)$。如果$\alpha=\{x,x\}$是 x 的一个环，则 α 使 x 的度数[⊖]增加 2。对任意一个一般图 G，将其顶点的度数按一种非增的顺序排列如下：

$$(d_1,d_2,\cdots,d_n)\quad d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant 0$$

则称该序列为 G 的度序列。

在图 11-3 中，图的度序列为

$$(6,5,5,5,5,5,3,2,2,1,1,1,1)$$

完全图 K_n 的度序列为

$$(n-1,\ n-1,\ \cdots,\ n-1)\ (n\text{ 个 }n-1)$$

下面的结果出现在欧拉的第一篇关于图论的文章中。

定理 11.1.1 设 G 是一个一般图，则其所有顶点的度数之和

$$d_1+d_2+\cdots+d_n$$

是一个偶数，从而，其奇度顶点的个数也必为偶数。

⊖ 因为$\alpha=\{x,x\}$的两个顶点均为 x，所以 α 与 x 邻接两次。

证明：因为 G 的每条边对顶点度数之和的贡献是：或使其关联的两个顶点度数增 1，或使其一个带有环的顶点度数增 2。如果一些整数的和是偶数的话，那么其中奇数的个数也必为偶数。 □

例 在一个聚会上客人之间相互握手，试说明：在聚会结束时，与奇数个客人握过手的人数是偶数。

聚会握手可以用多重图来表示，用顶点代表客人，每当两个客人握手时，就在相应的两个顶点之间连上一条边，其结果就是一个多重图，对它应用定理 11.1.1。 □

给定两个一般图 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$，如果它们的顶点集之间存在一个一对一的对应

$$\theta: V \to V'$$

使得：对 V 中任意一对顶点 x 和 y，G 中连接 x 和 y 的边的个数与 G' 中连接 $\theta(x)$ 和 $\theta(y)$ 的边的个数相同，则称 G 和 G' 是同构的，一对一的对应 θ 称为 G 和 G' 的一个同构。(同构的概念就是一种"相同"的意思，两个一般图是同构的，当且仅当它们除了顶点的标记外，它们是相同[⊖]的。)若 G 和 G' 是图，可以给出如下事实：如果 G 和 G' 的顶点集 V 和 V' 之间存在着一个一对一的对应，使得 V 中的两个顶点在 G 中邻接，当且仅当与它们相对应的顶点在 G' 中邻接，那么我们就可以断言 G 和 G' 是同构的，这是因为图中的任意两个顶点，或者由一条边连接，或者由 0 条边连接。

例 同构的图具有相同的阶和相同数目的边，但具有相同的阶和相同数目的边却不能保证两个图同构。

首先，考虑图 11-5 中给出的两个图 G 和 G'，这两个图是同构的，因为它们任意两个顶点之间都是邻接的 4 阶图，因此，它们也都是 4 阶完全图。此例说明了这样一个事实：一个图可能有多种画法（如本例，一种画法是平面图，而另一种则不是），但从同构的角度来看，两种画法并没有本质的区别，重要的是两个顶点之间是否是邻接的（或者，在一般图的情况下，每对顶点之间有多少条边连接）。 □

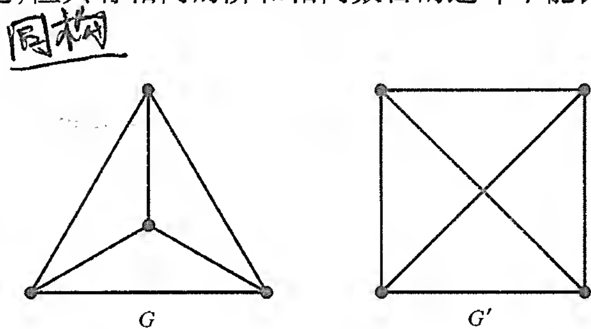


图 11-5

下面我们考虑图 11-6 中给出的两个图 G 和 G'，这两个图是否同构呢？它们是同阶的，并有相同数目的边，但图 G 中含有一个 1 度顶点，而图 G' 中却没有，这种现象不会发生在两个同构的图中。因为，假如在图 G 和 G' 中存在一个同构 θ，那么对 G 的每一个顶点 x，G' 的顶点 $\theta(x)$ 应与 x 具有相同的度数。特别地，如果一个数作为 G 中一个顶点的度数出现时，则该数也必然作为 G' 中一个顶点的度数而出现。综上所述，我们得出 G 和 G' 不是同构的。同理，我们可以得到更一般的结论：两个同构的图必有相同的度序列。

⊖ 换句话说，两个一般图是同构的，如果其中的一个是另一个的伪装。一对一的对应 θ 使 G' "去掉伪装"，从而揭示出 G' 实际上就是 G：如果 $\theta(x)=x'$，则在此伪装的后面是 x。

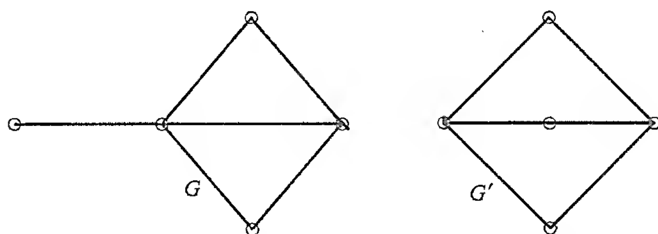


图 11-6

例 在本例中，我们要说明的是：尽管两个图具有相同的度序列，但它们也可能不同构。考虑图 11-7 中给出的两个图，它们度序列均为(3,3,3,3,3,3)，然而这两个图是不同构的。这可以从下面的事实中看出：在第一个图 G 中，有三个顶点 x，y，z 是彼此邻接的[㊀]，而在第二个图 G'中，没有哪三个顶点具有这样的性质，如果 θ 是这两个图之间的一个同构，那么$\theta(x)$，$\theta(y)$，$\theta(z)$也应是 G'中的三个顶点，从而也应该彼此邻接，因此，我们断定 G 和 G'不是同构的。 □

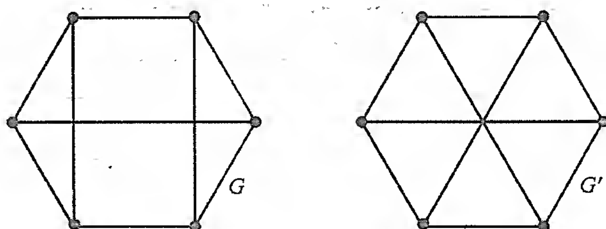


图 11-7

我们用下面的定理来总结上面的结果。

定理 11.1.2 *两个同构的一般图具有相同的度序列，但具有相同度序列的图不一定同构。*

在上面的例子中，我们用到了两个图同构的另外一个必要条件，在叙述该条件之前，先引入一些更基本的概念。

设 G 是一个一般图，形如

$$\{x_0,x_1\},\{x_1,x_2\},\cdots,\{x_{m-1},x_m\} \tag{11-1}$$

的 m 个边的序列称为**长度为 m 的一条途径**，且这条途径连接顶点 x_0 和 x_m，也可以把途径(11-1) 表示为

$$x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_m \tag{11-2}$$

途径 (11-1) 是**闭的**还是**开的**，取决于 $x_0 = x_m$ 还是 $x_0 \neq x_m$。一条途径中可能有重复的边[㊁]，如果途径中没有重复边，就称它是一条**迹**[㊂]；此外，如果一条途径中也没有重复的顶

㊀ 它们构成 K_3。

㊁ 这句话需要进一步解释，以防我们正在处理的是一个一般图而不是简单图。在一般图 G 中，每条边的重数都可能大于 1，如果一条边在一条途径中出现的次数不超过其重数，我们就不把它看作是重复边，只有当一条边在一条途径中出现的次数大于它在 G 中“复制品”的个数时，这条边才是重复边，当你考虑 G 的图形时，这种说法是非常合理的，因为，如果一条边$\alpha=\{a, b\}$重数是 5，则在图形中就有 5 条不同的边曲线连接顶点 a 和 b。

㊂ 因此，在一条迹中，一条边出现的次数不能超过它的重数。

点($x_0=x_m$ 的情况除外)，就称此途径是一条路径。一条闭的路径叫做圈。容易证明（该证明留作练习）连接顶点 x_0 和 x_m 的迹中的边可以被如此划分，使得该划分的一部分确定一条连接 x_0 和 x_m 的路径，其他部分确定的是圈。特别地，一条闭迹的边可以被划分成圈，图中一个圈的长度至少是 3。在一般图中，由一个环构成的圈，其长度为 1，重数 $m\geqslant 2$ 的边 $\{a,b\}$ 确定一个长度为 2 的圈 $\{a,b\}$，$\{b,a\}$(或 $a-b-a$)。

例　考虑图 11-3 中给出的一般图 GraphBuster 图，则有：

ⅰ) $a-d-b-d-c-d-h-g-h-m-k-i$ 是一条连接顶点 a 和 i 的长度为 11 的途径，但它不是迹。

ⅱ) $a-d-e-f-e-m-k-l-k-i$ 是一条连接 a 和 i 的、长度为 9 的迹，但不是一条路径。

ⅲ) $a-d-e-m-k-i$ 是一条连接 a 和 i 的、长度为 5 的路径。

ⅳ) $d-e-f-e-m-h-d$ 是一条长度为 6 的闭迹，但不是圈。

ⅴ) $f-f$、$e-f-e$ 和 $d-e-m-h-d$ 中的每一个都是圈。　□

一个一般图 G 是连通的，即对它的任意一对顶点 x 和 y，都有一条连接它们的途径(或等价地说,一条连接它们的路径)。否则称 G 是非连通的。在一个不连通的一般图中，至少存在一对顶点 x 和 y，使人无法沿着 G 中的边从 x “走到” y (或从 y 走到 x)。在多数情况下，我们只要考虑连通图就够了。在一个连通图中，$d(x,y)$ 表示连接顶点 x 和 y 的途径的最短长度，并称其为 x 和 y 之间的距离。对任一顶点 x，我们规定 $d(x,x)=0$。很明显，连接 x 和 y 的、距离为 $d(x,y)$ 的途径是一条路径。

例　图 11-8 中给出的图是不连通的，因为从顶点 a 到顶点 d 没有途径。本例说明了这样一个事实：一个不连通的图总能够(且应该总能够!)被画成两部分不相交的几何整体。在本例中，该图的另一种画法如图 11-9 所示，但这种画法是不明智的。总而言之，我们画图时应尽量揭示出图的结构。　□

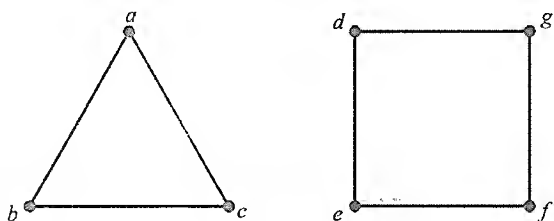


图　11-8

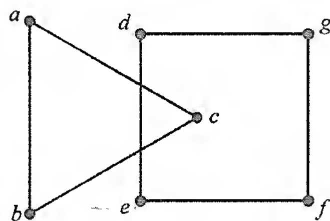


图　11-9

设 $G=(V,E)$ 是一般图，U 是 V 的子集，F 是 E 的子多重集，使得 F 中每条边的顶点属于 U，则 $G'=(U,F)$ 也是一般图，且叫做 G 的一般子图㊀。如果 F 包含了 G 的连接 U 中顶点的所有边，则称 G' 为 G 导出的一般子图，并记为 G_U。当 U 是 G 的整个顶点集 V 时，则称 G' 为 G 的生成子图。因此，G 的导出一般子图可以通过选择 G 的某些顶点和 G 中连接这些顶点的所有边而获得。而 G 的生成一般子图则可以通过选择 G 的所有顶点和 G 的某些(也可能是全部)边而获得。

㊀ 如果 G 是一个图，则 G' 也是一个图，并称它为子图，像所有这样的定义，我们今后在涉及图的时候，将在“图”前面省去修饰词“一般”(如果图前边没有修饰词“一般”，则均指简单图。——译者注)。

例 设 G 是图 11-3 中的一般图 GraphBuster，对图 11-10 中给出的三个图，有：

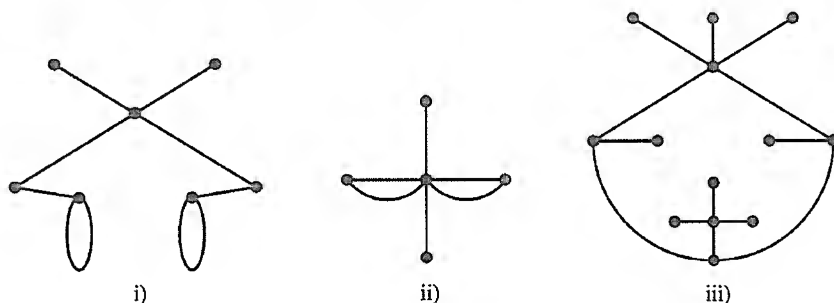


图 11-10

i)是 G 的一般子图，但它既不是 G 的导出子图也不是 G 的生成子图。

ii)是 G 的导出一般子图，但它不是 G 的生成子图。

iii)是 G 的生成一般子图(恰好是个简单图)，但它不是 G 的导出一般子图。 □

下面的定理非常直观地陈述了这样的事实：一般图是由一个或多个连通的一般图构成的。我们将其正式的验证留作练习。

定理 11.1.3 设 $G=(V,E)$ 是一般图，则其顶点集 V 可以被唯一地划分为非空子集 V_1，V_2，…，V_k，使得下面的条件成立：

i)分别由 V_1，V_2，…，V_k 导出的一般子图 $G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$，…，$G_k=(V_k, E_k)$ 都是连通的。

ii)对任意的 $i\neq j$，V_i 中任一顶点 x 与 V_j 中任一顶点 y 之间，不存在连接它们的途径。

在定理 11.1.3 中，一般图 G_1，G_2，…，G_k 叫做 G 的连通分支，其中：i)说明这些连通分图确实都是连通的；ii)强调这些连通分图都是最大的连通导出一般子图；也就是说，对任意的 i 和任意的顶点集 U 满足：当 V_i 包含于 U 且 $V_i\neq U$ 时，则由 U 导出的一般子图是不连通的。

在下一个定理中，将建立另外一些必要条件，以验证一般图之间的不同构性，它的证明应该是很明显的，其正式的证明留作练习。

定理 11.1.4 设 G 和 G' 是两个一般图，则 G 和 G' 同构的必要条件有：

i)如果 G 是简单图，则 G' 也是简单图。

ii)如果 G 是连通图，则 G' 也是连通图。更一般地，G 和 G' 具有相同数目的连通分图。

iii)如果 G 有一个长度为某整数 k 的圈，则 G' 也有一个长度为 k 的圈。

iv)如果 G 有一个 m 阶完全图 K_m 是它的(导出)一般子图，则 G' 也有一个这样的一般子图。

在图 11-7 中，图 G 和 G' 是不同构的，因为 G 有一个长度为 3 的圈(一个与 K_3 同构的子图)，而 G' 却没有。

最后，我们通过说明一般图也可以用一个元素为非负整数的矩阵来表示，来结束本节的内容。

设 G 是一个 n 阶一般图，并令其顶点 a_1，a_2，…，a_n 按某种顺序排列，设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，其第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 等于连接顶点 a_i 和 a_j 的边的数目($1\leqslant i,j\leqslant n$)。于是，我们总

有 $a_{ij}=a_{ji}$[㊀]及 a_{ii}等于顶点 a_i 处环的个数，这样的矩阵 A 叫做 G 的邻接矩阵。当 G 是简单图时，则 A 是一个由 0 和 1 所构成的矩阵，元素 a_{ij}等于 1，当且仅当 a_i 和 a_j 在 G 中是邻接的。

例 在图 11-11 中，给出了一个 6 阶一般图，其 6×6 邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们可以从一般图建立它的邻接矩阵，也可以从邻接矩阵建立它的一般图。 □

邻接矩阵除了行和列的顺序之外，可以由一般图唯一确定，这是因为在建立邻接矩阵之前，必须先将一般图中的顶点按某种顺序排列。反之，一般图的邻接矩阵可以唯一地确定一个与它同构的一般图；即：任意两个具有相同邻接矩阵的一般图是同构的。

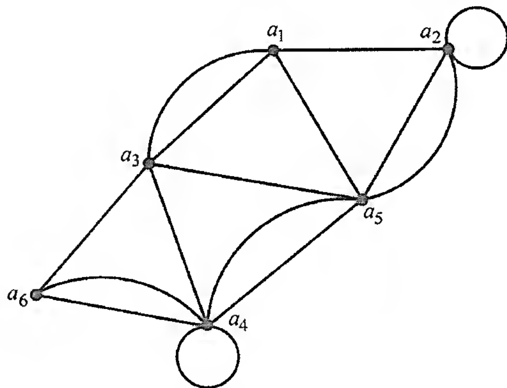


图 11-11

11.2 欧拉迹

1736 年，欧拉在他发表的图论文章中解决了著名的哥尼斯堡七桥问题。

在东普鲁士，古老的哥尼斯堡城位于普雷格尔河畔，河中有两个岛，城区的四个部分通过七座桥连接起来，如图 11-12 所示。每到星期日，哥尼斯堡城的居民将会环城散步，由此提出了这样一个问题：能否以一种方法环绕全城，使每座桥都被走过且只被走过一次。

欧拉把哥尼斯堡地图改画成了一个一般图，如图 11-13 所示。就这个一般图 G 而言，用我们已介绍过的术语来叙述的话，上述问题就是要确定 G 中是否存在一条闭迹，使它包含 G 的所有边。

例 设想一个邮递员[㊁]从邮局出发，他要将信件投递到指定街道的住户家中，并在结束

㊀ 矩阵是对称的。

㊁ 把邮递员改成清洁工或扫雪机驾驶员，就可以得到同一个数学问题的不同叙述。

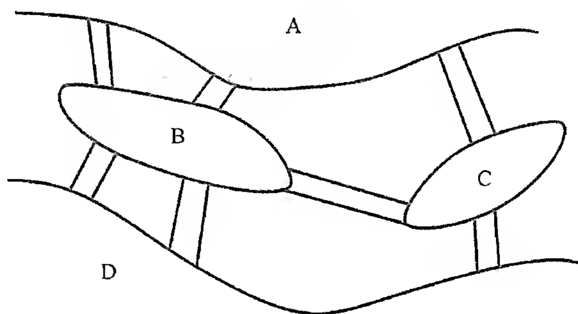


图 11-12

一天的工作后返回邮局，那么该邮递员应采取什么样的路线，才能投递出所有的信件而不必重复已走过的街道呢？我们能帮他想出办法吗？

我们也许能，也许不能，但我们应该肯定地认识到他或她的这个问题是图论中的一个问题。设 G 是一个与城镇街道图有关的一般图(见本章的引言部分)，G'是 G 的一个一般子图，它是由 G 中与邮递员的指定街道有关的那些顶点和边所构成的，邮递员所期望的是 G' 中的一条闭迹，该闭迹包含 G'的所有边一次且恰好一次。这样，我们就得到了一个与 200 多年前哥尼斯堡镇的居民提出过的同样的数学问题，只不过对应的是不同的一般图罢了。□

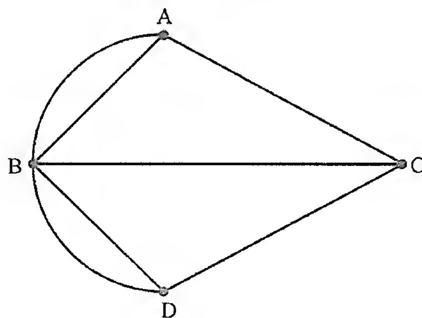


图 11-13

受这些问题的启发，我们做出一些定义。一般图 G 中的一条迹叫做欧拉迹，如果它包含了 G 中所有的边。回想迹在一般图中的定义，迹中包含每条边最多一次，我们对此的解释是：一条边在迹中重复的次数不得超过它的重数。无论是哥尼斯堡镇的居民还是那个邮递员，都是在寻找一条闭欧拉迹，可以很容易地发现，图 11-13所表示的哥尼斯堡七桥问题的一般图中，不存在闭欧拉迹，其理由如下：假想我们真的漫步在一般图中一条闭欧拉迹上的话，除了你第一次离开的那个顶点，也就是你起始的那个顶点外，你每次都进入一个顶点并离开它(而到一条新的边，也即你还未走过的边)，当你漫游结束时，你回到了起始的那个顶点，但不再离开。这就意味着：关联于一个给定顶点的边是成对出现的，其中的一条用于进入该顶点，另一条则用于离开该顶点[⊖]。如果关联于一个顶点的边能够成对出现的话，那也就意味着在每个顶点处边的数目必然是偶数。因此，我们得到了在一般图中存在闭欧拉迹的一个必要条件，即：每个顶点的度数是偶数。由于在哥尼斯堡七桥问题的一般图中，四个顶点的度数都是奇数，所以该图中不存在闭欧拉迹。

下面的定理 11.2.2 强调：对于连通的一般图，上面导出的关于闭欧拉迹的必要条件也是充分的。在证明它之前，先建立一个引理，该引理本身也具有独立的意义。

引理 11.2.1 设 $G=(V, E)$是一般图，如果它的每个顶点的度数都是偶数，则 G 的每条边都属于一条闭迹，因而也属于一个圈。

证明：利用下面的算法，可以找到一条包含任意指定边 $\alpha_1=\{x_0, x_1\}$的闭迹。在该算法

⊖ 如果设想我们是从一个桥的“中间”开始漫游的话，那就不需要区别起始顶点了：每次我们都进入一个顶点并离开它。

中，我们要构造一个顶点集 W 和一个边集 F。

求闭迹的算法

ⅰ）令 $i=1$

ⅱ）令 $W=\{x_0,x_1\}$

ⅲ）令 $F=\{\alpha_1\}$

ⅳ）当 $x_i\neq x_0$ 时，执行

a)找出一个不在 F 中的边 $\alpha_{i+1}=\{x_i,x_{i+1}\}$。

b)将 x_{i+1} 放入 W 中(也许 x_{i+1} 已在 W 中)。

c)将 α_{i+1} 放入 F 中。

d)令 $i=i+1$。

这样，经过ⅰ)～ⅲ)步初始化以后，在算法中的每一阶段，我们都要找到一条新边㊀ $\alpha_{i+1}=\{x_i,x_{i+1}\}$，它邻接于最后一次放入 W 中的顶点 x_i，再将 x_{i+1} 和 α_{i+1} 分别放入 W 和 F 中，并使 i 的值增 1。重复这个过程，直到最终又到达 x_0 为止。

假设只要 $x_i\neq x_0$ 时，满足ⅳ)a)的一条边 α_{i+1} 总存在。设 i 的终值为 k，所产生的顶点集 $W=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$，边的多重集 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$，于是，根据算法得到的

$$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k \tag{11-3}$$

就是包含初始边 α_1 的一条闭迹。因此，我们只需证明：如果 $x_i\neq x_0$，那么就有一个不在 F 中的边与 x_i 邻接。正是在这里，用到了偶度次顶点的假设。

容易看到：算法中每当步ⅳ)的d)结束时，一般图 $H=(W,F)$ 的每个顶点都具有偶度次，只有顶点 x_0（它起始于奇度 1）和最新加入的顶点 x_i（它的度数刚刚增加了 1）可能除外。此外，x_0 和 x_i 具有偶度次，当且仅当 $x_0=x_i$，因此，如果 $x_i\neq x_0$，则 x_i 在一般图 H 中就具有奇度次。既然 x_i 在 G 中具有偶度次，则必存在一个还不属于 F 的边 $\alpha_{i+1}=\{x_i,x_{i+1}\}$ 与 x_i 邻接。所以，当算法结束时，必有 $x_k=x_0$，从而式(11-3)是一条闭迹。

由于一条闭迹中的边可以被划分为圈，所以我们完成了引理的证明。 □

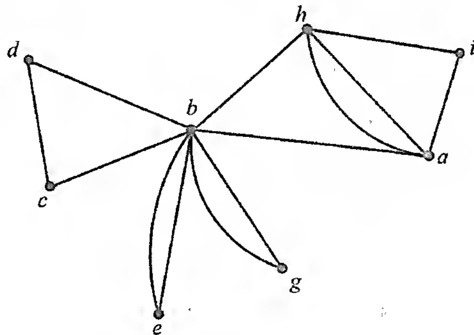


图 11-14

例 应用算法，求图 11-14 中所给图 G 的一条闭迹。下表给出了算法的一种㊁执行方式，其初始边为$\{a,b\}$。

i	x_i	α_i	W	F
1	b	$\{a,b\}$	a,b	$\{a,b\}$
2	c	$\{b,c\}$	a,b,c	$\{a,b\},\{b,c\}$
3	d	$\{c,d\}$	a,b,c,d	$\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}$
4	b	$\{d,b\}$	a,b,c,d	$\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\}$
5	h	$\{b,h\}$	a,b,c,d,h	$\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,h\}$
6	a	$\{h,a\}$	a,b,c,d,h	$\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{h,b\},\{h,a\}$

㊀ 更确切地说，是一条在 F 中的重数小于它在图 G 的边集 E 中的重数的新边。

㊁ 因为在算法的每一阶段，可能存在多种方式来选择一条新边，所以一般而言，执行该算法时也将会有多种执行方式。

因此，我们得到了一条包含边$\{a,b\}$的闭迹

$$\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,h\},\{h,a\}$$

和包含边$\{a,b\}$的圈

$$\{a,b\},\{b,h\},\{h,a\}$$

□

定理 11.2.2　设 G 是一个连通一般图，则 G 中存在闭欧拉迹，当且仅当 G 中每个顶点的度数是偶数。

证明：我们已经观察到了：如果 G 中有一条闭欧拉迹，则 G 的每个顶点都具有偶度次。现在设$G_1=(V_1,E_1)$是一个连通一般图，且它的每个顶点都具有偶度次，我们选定 G_1 的任意一条边 α_1，并应用引理 11.2.1 证明中给出的求闭迹的算法，求得一条包含边 α_1 的闭迹 γ_1。令$G_2=(V_2,E_2)$是去掉 E_1 中属于闭迹 γ_1 的边后得到的一般图，则 G_2 的所有顶点都具有偶度次。如果 E_2 中至少含有一条边，则由于 G_1 的连通性，G_2 中至少有一条边 α_2 与闭迹 γ_1 中的某个顶点 z_1 邻接，我们对 G_2 和边 α_2 应用算法求出一条包含边 α_2 的闭迹 γ_2。现在我们把 γ_1 和 γ_2 在顶点 z_1 处拼接[㊀]在一起，得到一条包含 γ_1 和 γ_2 的所有边的闭迹 $\gamma_1 \overset{z_1}{*} \gamma_2$。令 $G_3=(V_3,E_3)$是 E_2 中去掉 γ_2 的边后得到的一般图，如果 E_3 中至少含有一条边，则它必有一条边 α_3 与闭迹 $\gamma_1 \overset{z_1}{*} \gamma_2$ 中的某个顶点 z_2 邻接，再对 G_3 和边 α_3 应用算法，求得一条包含边 α_3 的闭迹 γ_3，又将 $\gamma_1 \overset{z_1}{*} \gamma_2$ 和 γ_3 在顶点 z_2 处拼接，得到一条包含 γ_1，γ_2 和 γ_3 的所有边的闭迹[㊁] $\gamma_1 \overset{z_1}{*} \gamma_2 \overset{z_2}{*} \gamma_3$。重复上述过程，直到所有的边都包含在一条闭迹 $\gamma_1 \overset{z_1}{*} \gamma_2 \overset{z_2}{*} \cdots \overset{z_{k-1}}{*} \gamma_k$ 中为止。因此，重复调用求闭迹的算法，就得到了一个在连通的、每个顶点均为偶度次的一般图中构造出一条闭欧拉迹的算法。　□

例　继续前面的例子，利用定理 11.2.2 证明中的算法，求图 11-14 中一般图 G 的一条闭欧拉迹。因为算法中要求我们做出一些选择，所以我们可以用多种方式来执行算法。下面给出了一种可能的执行结果：

$\gamma_1 = a-b-c-d-b-h-a$

$\gamma_2 = b-e-b \quad (z_1=b)$

$\qquad \gamma_1 \overset{b}{*} \gamma_2 = a-b-e-b-c-d-b-h-a$

$\gamma_3 = b-g-b \quad (z_2=b)$

$\qquad \gamma_1 \overset{b}{*} \gamma_2 \overset{b}{*} \gamma_3 = a-b-g-b-e-b-c-d-b-h-a$

$\gamma_4 = h-i-a-h \quad (z_3=h)$

$\qquad \gamma_1 \overset{b}{*} \gamma_2 \overset{b}{*} \gamma_3 \overset{h}{*} \gamma_4 = a-b-g-b-e-b-c-d-b-h-i-a-h-a$　□

㊀ 我们遍历(traverse)γ_1，直到第一次到达顶点 z_1，完全遍历 γ_2，并在顶点 z_1 处结束，这时完成了对 γ_1 的遍历。

㊁ 这种说法不太确切，你知道为什么吗？

定理 11.2.2 及其证明给出了具有闭欧拉迹的一般图的特性，并给出了在闭欧拉迹存在时，如何构造出它的一个算法。关于开欧拉迹，我们有下述结果。

定理 11.2.3　设 G 是一个连通的一般图，则 G 中存在一条开欧拉迹，当且仅当 G 中恰好有两个奇度顶点 u 和 v。此外，G 中任意一条开欧拉迹均连接 u 和 v。

证明： 首先，回忆定理 11.1.1：G 中奇度顶点的个数必为偶数。如果 G 中存在一条开欧拉迹，则它必连接 G 中的两个奇度顶点 u 和 v，而 G 中的其他顶点必是偶度次的(因为欧拉迹每次进入并离开一个不同于 u 和 v 的顶点 x 时,使得与 x 邻接的边必成对出现)。现在假设 G 是连通的，且 G 恰好有两个奇度顶点 u 和 v，令 G' 是通过对 G 增加一条连接 u 和 v 的新边 $\{u, v\}$ 而得到的一般图，则 G' 是连通的，且此时 G' 的所有顶点都是偶度次的，因此，由定理 11.2.2，G' 中存在一条欧拉迹 γ'。我们可以把 γ' 看作起始于顶点 v，其第一条边是连接 u 和 v 的新边 $\{u, v\}$ 的闭欧拉迹，从 γ' 中去掉这条边，我们就得到了一条 G 中连接 u 和 v 的，且起始于顶点 u 的开欧拉迹。我们可以利用求 G' 的一条闭欧拉迹的算法，得到求 G 中的一个开欧拉迹的算法。 □

下一个定理是对上述定理的进一步推广，我们把它的证明留作练习。

定理 11.2.4　设 G 是一个连通一般图，并设 G 中奇度顶点的个数 $m>0$，则 G 的边可以被划分为 $m/2$ 个开迹，但不能被划分为少于 $m/2$ 个开迹。

例　考虑图 11-15、图 11-16 和图 11-17 中所给出的图，你能用笔画出这些平面图、而不使笔从纸上移开吗？(这个问题简称为一笔画问题)

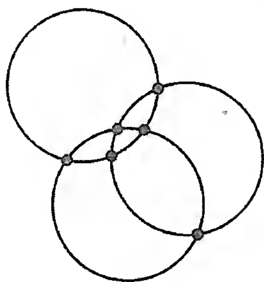


图　11-15

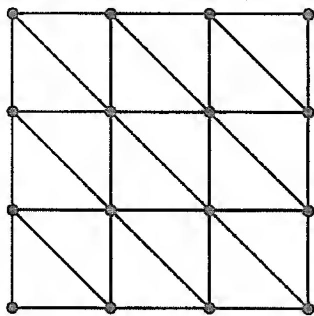


图　11-16

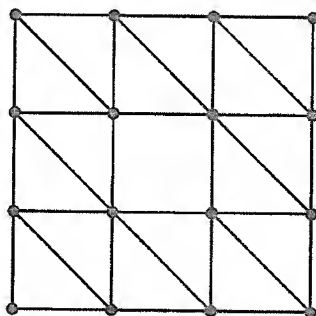


图　11-17

能一笔画出一个平面图而不使笔从纸上移开，其充分必要条件是：图中存在一条闭的或开的欧拉迹。在图 11-15 中，图的顶点度数均为 4，因此，由定理 11.2.2，该图可以一笔画出。在图 11-16 中，图中有两个奇度顶点，由定理 11.2.3 知，该图存在一条连接这两个奇度顶点的开欧拉迹。在图 11-17 中，图中有 4 个奇度顶点，由定理 11.2.3，它不能被一笔画出，但从定理 11.2.4 知，如果允许将笔从纸上移开一次，则该图还是能被画出的。在定理 11.2.2 的证明中，当平面图的一笔画问题存在时，也包含着求它的算法。 □

由定理 11.2.4 知，如果一般图 G 有 $m>0$ 个奇度顶点，则 G 的边可以被划分为 $m/2$ 条开迹，且每条开迹连接两个奇度顶点。如果你要像上面的例子中所讨论的那样画出 G 的话，则需将笔从纸上至少移开 $(m/2)-1$ 次。在画图 G 时，移开笔并不是一件难事，但如果 G 代表的是一个邮递员送信的路线的话(正如我们在本节开头的例子中讨论的那样)，他就必须步行于相当于 G 的边的每条街道，那他该怎么办？难道说让他飞吗？如果邮递员的路线不包含一条闭欧拉迹，那么，他要想把所有该送的信送出后又回到邮局，他就不得不重

走某些已走过的街道。我们应该如何帮助邮递员最大限度地减少已经走过但又要重走的街道的数目呢？这个问题就是著名的中国邮递员问题[㊀]，其准确的叙述如下：

中国邮递员问题：设 G 是一个连通的一般图，求包含 G 的所有边至少一次[㊁]的一条最短的途径。

我们就中国邮递员问题的解给出一个简单的评述，并以此结束本节内容。

定理 11.2.5 设 G 是一个具有 K 条边的连通一般图，则 G 中存在一条长度为 $2K$ 的闭途径，在该途径中，每条边的重复次数等于它重数的 2 倍。

证明： 设 G^* 是通过把 G 中每条边的重数都增加 1 倍后得到的连通一般图，则 G^* 中边的数目为 $2K$。此外，G^* 中每个顶点的度数为偶数(每个顶点的度数都是它在 G 中度数的 2 倍)，对 G^* 应用定理 11.2.2，知道 G^* 中存在一条闭欧拉迹，该闭迹就是所求的 G 中的一条闭途径。 □

例 考虑有 n 个顶点 1，2，…，n 和 $n-1$ 条边 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$，…，$\{n-1,n\}$ 的图 G，则 G 的边构成一条连接顶点 1 到 n 的路径。因为 G 中任何一条包含所有边的闭途径必包含每条边至少两次，所以，如果邮局设在顶点 k，那邮递员只能步行到顶点 1、顺原路折回邮局、再步行到顶点 n、然后再顺原路折回邮局，不会有比这更好的办法了。这样一条途径的长度为 $2(n-1)$，即边数的 2 倍。该图 G 是树的一个简单实例，树的研究将在 11.5 节和 11.7 节中给出，对树而言，包含所有边至少一次的最短闭途径是边数的 2 倍(见练习题 78)。 □

读者或许已经注意到：我们使用的词语——中国邮递员问题，从纯数学角度而言可能是个挺有意思的问题，但它却没有太大的实际意义，因为该问题并没有把街道的长度考虑在内，某些街道可能很长，而另一些则可能很短，如果邮递员不得不重走某些街道的话，显然选取越短的街道越好。为使该问题具有实际意义，我们应在每条边上都加上一个非负的权，于是，衡量途径时不再用它的长度(即途径中边的数目)，而是用它的总权数(即途径中每条边的权数之和，某个边在途径中重复几次，该边的权就要累计几次)来衡量。实用的中国邮递员问题就是要确定一条包含每条边至少一次且总权数最小的途径，该问题从算法的角度而言[㊂]也已经得到了圆满的解决。

11.3 Hamilton 路径和 Hamilton 圈

19 世纪，威廉·罗曼·哈密尔顿爵士发明了一个智力游戏，其目标是在一个十二面体[㊃]的边上找出一条路线，该路线起始于某个顶角，当它到达其他每个顶角恰好一次后，又回到起始的那个顶角。一个十二面体的顶角和边确定了一个具有 20 个顶点(因此阶数为 20)30 条边的图，该图由图 11-18 所示，其中的粗线边是哈密尔顿游戏的一

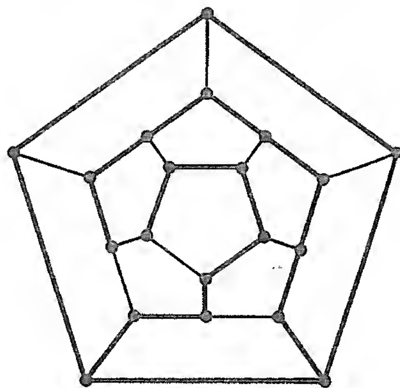


图 11-18

㊀ 并不是这个问题与中国有着什么特别的关系，而是因为该问题是由中国数学家管梅谷在他的文章：Graphic programming using odd or even points，*Chinese Math*.，1(1962)，273-277 中引入的。

㊁ 该问题的一个解法是在 J.Edmonds 和 E.L.Johnson 的文章：Matching，Euler tours and the Chinese postman，*Math.Programming*，5 (1973)，88-124 中给出的。

㊂ 出处同上。

㊃ 该十二面体是一种规则的立体，它是由 12 个规则的五边形所围成的，构成 30 条边、20 个顶角。

个解，该解和其他的一些解很容易被找到[⊖]。

哈密尔顿游戏适用于任意的简单图：

设 G 是一个简单图，能否确定一条路线，使它从 G 的某一顶点出发、沿 G 的边到达其他每个顶点恰好一次后，又返回到起始顶点？

今天，我们把图 G 中一个哈密尔顿游戏的解叫做一个哈密尔顿圈。更确切地说，n 阶图 G 的一个哈密尔顿圈是 G 中一个长度为 n 的圈。回忆圈的定义：圈是一条闭的路径，圈中除了第一个顶点与最后一个顶点相同外，其他顶点互不相同。因此，n 阶图 G 中的一个哈密尔顿圈是一个长度为 n 的圈

$$x_1 - x_2 - \cdots - x_n - x_1$$

其中 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是 G 的以某种顺序排列的 n 个顶点。

连接 G 的顶点 a 和 b 的长度为 $n-1$ 的路径

$$a = x_1 - x_2 - \cdots - x_n = b$$

叫做 G 中的一条哈密尔顿路径。因此，G 中的一条哈密尔顿路径是 G 的 n 个顶点的一个排列，在该排列中，相邻两个顶点之间由 G 的一条边连接，哈密尔顿路径从排列中的第一个顶点起，依次连接到最后一个顶点。哈密尔顿路径中的边与哈密尔顿圈中的边是有区别的。

我们也可以在一般图中考虑哈密尔顿路径和哈密尔顿圈的问题，但边的重数并不影响哈密尔顿路径和圈的存在性，一条哈密尔顿路径和圈的存在与否，只与某些顶点对之间是否有一条边连接有关，而与连接这些顶点对之间的边的重数无关，正是由于这个原因，我们在本节只考虑简单图，而不考虑一般图。

例　阶数 $n \geqslant 3$ 的完全图 K_n 中存在一个哈密尔顿圈。事实上，由于 K_n 的任意不同的顶点对之间都有一条边，所以 K_n 的 n 个顶点的任意一个排列都是一条哈密尔顿路径，又由于路径中的第一个顶点与最后一个顶点之间有一条边，所以任意一条哈密尔顿路径都可以扩展成一个哈密尔顿圈。由此我们看到，K_n 中有 $n!$ 条哈密尔顿路径，也有 $(n-1)!$ 个哈密尔顿圈。□

例　确定图 11-19 所示的两个图中是否存在哈密尔顿路径或哈密尔顿圈。

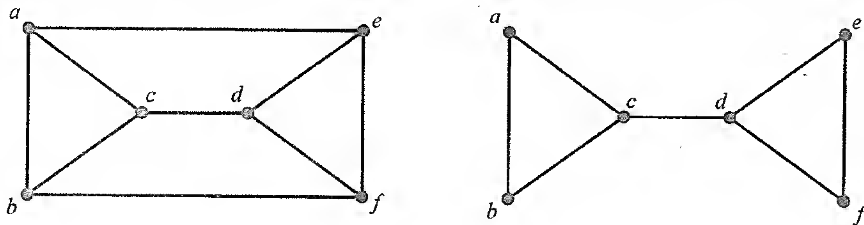


图　11-19

首先考虑左边的那个图：显然，$a-b-c-d-f-e-a$ 是一个哈密尔顿圈，因此 $a-b-c-d-f-e$ 是一条哈密尔顿路径。另一条哈密尔顿路径是 $a-b-c-d-e-f$，但该路径不能扩展为一个哈密尔顿圈，因为 a 和 f 之间没有边连接。

现在考虑右边的那个“哑铃”图：它的一条哈密尔顿路径是 $a-b-c-d-e-f$，但该图

⊖　这也许是对为什么哈密尔顿游戏不是商业上的一个巨大成功的解释！

不存在哈密尔顿圈，其原因是：一个哈密尔顿圈是闭的，因此，它必须经过这个哑铃的“把儿”两次才行，但这在一个哈密尔顿圈中是不允许的。 □

初看起来，哈密尔顿圈在一个图中的存在性问题与闭欧拉迹在一个图中的存在性问题类似，对于后者，我们是寻求一条包含所有边恰好一次的闭迹，而对于前者，我们是寻求一条包含所有顶点恰好一次的闭链，除了表面上的这种相似之外，这两个问题却非常不同。在定理 11.1.1 中，我们给出了一个(一般)图中是否存在闭欧拉迹的一个极易检验的特性，也得到了当条件满足时构造出一条闭欧拉迹的满意算法。而具有哈密尔顿圈的图却没有这样的特性，即便图中存在哈密尔顿圈，也没有构造它的满意算法。图中哈密尔顿圈(和路径)的存在性及算法构造问题是当今图论中还没有解决的一个主要问题。

尽管我们不能刻画存在哈密尔顿圈的图的特性(即:找出图中存在哈密尔顿圈的充分必要条件)，但如果我们能分别找到存在的充分条件(即:确保图中存在哈密尔顿圈)和存在的必要条件(即:如果不满足,则确保图中不存在哈密尔顿圈)的话，那我们也只得就此满足。哈密尔顿圈存在的一个明显的必要条件是：图必须是连通的。另一个不太明显的必要条件隐藏在我们对图 11-19 中那个哑铃图的分析中。连通图的一条边叫做一个桥，如果将其删除后，得到的是一个不连通的图。从某种意义上说，带有桥的连通图仅仅是连着的，若删掉一个桥，则图就被“分割”了。在图 11-19 中，哑铃图的握柄就是一个桥。

定理 11.3.1 带有桥的连通图中不存在哈密尔顿圈[㊀]。

证明： 设$\alpha=\{x,y\}$是连通图 G 的一个桥，G'是由 G 通过删除边 α、但不删除任何顶点后得到的图。因为 G 是连通的，所以 G'具有两个连通分图[㊁]，假如 G 中有一个哈密尔顿圈 γ 的话，则 γ 将会起始于G'中的一个分图，最终经过边 α 过渡到G'中的另一个分图，然后，还得经过边 α 返回到起始的那个分图，但此时 γ 已不再是一个哈密尔顿圈了，因为它包含了一个多于一次的顶点，而此顶点既不是起点也不是终点。 □

现在讨论一般图中存在哈密尔顿圈的一个简单的充分条件，该充分条件归功于 Ore[㊂]。设 G 是一个 n 阶简单图，考虑下面的性质，G 可能满足这个性质，也可能不满足。

Ore 性质：对所有不邻接的不同顶点对 x 和 y，有

$$\deg(x)+\deg(y)\geqslant n$$

一个简单图如果满足 Ore 性质将意味着什么呢？首先，在一个简单图中，如果所有顶点都具有“大”度数，则图中必有很多的边[㊃]，而且这些边还比较均匀地分布在图中，我们希望这样的图中存在哈密尔顿圈[㊄]。例如，现在假设 G 是一个顶点数$n=50$ 的简单图，并满足 Ore 性质，如果 G 中有一个小度数的顶点x，比方说 x 的度数为 4，这就意味着 G 中有

㊀ 尽管它可能存在一条哈密尔顿路径。

㊁ 如果 G'有多于两个以上的连通分图，因为边 α 只能将其中的两个连通分图组合在一起，所以将 α 放回原处后，其结果图(也就是 G)是不连通的，这与假设矛盾。

㊂ Ö.Ore: A note on Hamilton circuits, *Amer. Math. Monthly*, 67(1960), 55。

㊃ 这将在推论 11.3.3 中给出准确的叙述。

㊄ 如果使很多的边都能很好地分布在图中还不能确保一个哈密尔顿圈存在的话，那我们还能有什么机会找到一个条件，来确保哈密尔顿圈存在呢？

45 个不同于 x 的顶点与 x 不邻接，根据 Ore 性质，在这 45 个顶点中，每一个顶点的度数至少都是 46。由此可看出，Ore 性质意味着：要么所有顶点都具有大度数，要么有几个顶点有小度数，而其余很多顶点都具有很大的度数。所以，Ore 性质通过迫使许多顶点具有很大的度数(这一点可能会使一个图存在哈密尔顿圈)来补偿小度数顶点(这一点可能会使一个图不存在哈密尔顿圈)存在的可能。

定理 11.3.2 设 G 是一个满足 Ore 性质、阶数 $n\geqslant 3$ 的简单图，则 G 中存在哈密尔顿圈。

证明： 如果 G 是不连通的，则 G 的顶点可以被划分为两个子集 U 和 W，使得 G 中不存在任何一条连接 U 中一个顶点和 W 中一个顶点的边，设 U 中的顶点数为 r，W 中的顶点数为 s，则有 $r+s=n$，并且 U 中任意顶点度数的最大值为 $r-1$，W 中任意顶点度数的最大值为 $s-1$。令 x 为 U 中的任意一个顶点，y 为 W 中的任意一个顶点，于是，x 和 y 是不邻接的，但它们的度数之和的最大值为

$$(r-1)+(s-1)=r+s-2=n-2$$

这与 Ore 性质矛盾，因此，G 是连通的。

为完成定理的证明，我们给出一个算法[⊖]，用来构造图中的一个哈密尔顿圈。我们首先叙述这个算法，然后证明：如果所给的图满足 Ore 性质，则算法的结果将总是一个哈密尔顿圈。

求哈密尔顿圈的算法（考试重点）

i）从任意一个顶点开始，在它的任意一端邻接一个顶点，构造一条越来越长的路径，直到不能再加长为止。设该路径为

$$\gamma:\ y_1-y_2-\cdots-y_m \tag{11-4}$$

ii）检查 y_1 和 y_m 是否邻接。

a)如果 y_1 和 y_m 不邻接，则转到 iii）；否则，y_1 和 y_m 是邻接的，转到b)。

b)如果 $m=n$，则停止构造并输出哈密尔顿圈 $y_1-y_2-\cdots-y_m-y_1$；否则，y_1 和 y_m 是邻接的且 $m<n$，转到c)。

c)找出一个不在 γ 上的顶点 z 和在 γ 上的顶点 y_k，满足 z 和 y_k 是邻接的，将 γ 用下面的长度为 $m+1$ 的路径来替代

$$z-y_k-\cdots-y_m-y_1-\cdots-y_{k-1}$$

转回到 ii）。

iii）找出一个顶点 $y_k(1<k<m)$，满足 y_1 和 y_k 是邻接的，且 y_{k-1} 和 y_m 也是邻接的，将 γ 用下面的路径来替代

$$y_1-\cdots-y_{k-1}-y_m-\cdots-y_k$$

该路径的两个端点，即 y_1 和 y_k 是邻接的，转回到 ii）b)。

为证明该算法确实能构造出一个哈密尔顿圈，我们必须证明在第 ii）c)步，确实能找

⊖ 该算法在 Ore 定理的初始证明中是不明确的，后来由 M.O.Albertson 明确地表示了出来。

到一个特定的顶点 z，在第ⅲ）步，确实能找到一个特定的顶点 y_k。

首先考虑第ⅱ)c)步：有 $m<n$。因为我们已经指出过，Ore 性质意味着 G 是连通的，所以必存在一个不在路径 γ 上的顶点 z，与 y_1，…，y_m 中的某个顶点邻接。

现在考虑第ⅲ）步：我们有 y_1 和 y_m 是不邻接的。设 y_1 的度数为 r，y_m 的度数为 s，由 Ore 性质，有 $r+s\geqslant n$。因为从ⅰ)中得到的 γ 是一条最长的路径，所以 y_1 只能与 γ 中的顶点邻接，即与 y_2，…，y_{m-1}中的 r 个顶点邻接，同理，y_m 与 y_2，…，y_{m-1}中的 s 个顶点邻接，邻接于 y_1 的 r 个顶点中的每一个，在路径 γ 中都位于某个顶点的后面，且在这些顶点中，必有一个与 y_m 邻接，否则的话，y_m 最多与$(m-1)-r$ 个顶点邻接，所以 $s\leqslant m-1-r$，也即

$$r+s\leqslant m-1\leqslant n-1$$

这与 Ore 性质矛盾。因此，存在一个顶点 y_k，满足 y_1 邻接于 y_k，及 y_m 邻接于y_{k-1}。到此，我们在 G 中构造出了一条哈密尔顿路径后，算法停止。 □

确保一个简单图具有 Ore 性质的一种办法是：假定所有顶点的度数都大于或等于图的阶数的一半。该结论出现在 Dirac㊀的一个定理中，尽管这个结论是在定理 11.3.2 出现之前的 1952 年证明的，但它仍是定理 11.3.2 的一个推论。

推论 11.3.3 在阶数 $n\geqslant3$ 的简单图中，如果每个顶点的度数至少为 $n/2$，则图中必存在哈密尔顿圈。

下面的定理给出了简单图中存在哈密尔顿路径的一个充分条件，其证明及算法的构造均类似于定理 11.3.2，我们把它的证明留给读者。

定理 11.3.4 在一个 n 阶简单图中，如果每对不邻接顶点的度数之和至少是 $n-1$，则图中存在哈密尔顿路径。

例（旅行商问题） 考虑一个旅行商正在计划一次商业旅行，他要去往他的某些客户所居住的城市，然后返回到他出发时居住的城市。在他要前往的城市中，有些城市之间有直达航班，而有些则没有，他能否做出这样的旅行计划，使他到达每个城市恰好一次？

设他要去往的城市包括他居住的城市一共有 n 个，我们假定这些城市是一个 n 阶简单图G 的顶点，其中，任意两个城市之间只要有直达航班，就有一条边连接，于是，旅行社要寻求的就是一个哈密尔顿圈。如果 G 具有 Ore 性质，那么，由定理 11.3.2 我们知道，G 中存在一个哈密尔顿圈，且在定理的证明中，也给出了一个构造它的好方法。但在一般情况下，并不存在已知的、能为旅行社构造出一个哈密尔顿圈的好算法，或告知旅行社：图中根本就不存在哈密尔顿圈。然而，上述问题并不是旅行社真正要面对的实际问题，这是因为他要去往的那些城市之间的距离往往是不同的，因而他需要的是这样的一个哈密尔顿圈：他所旅行的距离尽可能越短越好㊁。 □

㊀ G.A.Dirac：Some theorems on abstract graphs，*Proc. London Math. Soc.*，2(1952)，69-81。

㊁ 另一方面，他也可能需要一个使旅行总费用最少的哈密尔顿圈，从数学的角度而言，这并没有什么区别，因为我们在每条边上加的权，可以不是用来代表它所连接的城市之间的距离，而是代表旅行费用。在这两种情况下，我们都是在寻找这样的一个哈密尔顿圈：使得圈中的边权之和最小。

11.4　二分多重图

设$G=(V,E)$是一个多重图，如果顶点集 V 可以被划分为两个子集X 和Y，使得 G 的任意一条边的一个顶点在 X 中，另一个顶点在 Y 中，则称 G 是二分的，具有这种性质的一对 X,Y，称为 G 的(也称顶点集 V 的)一个二分划。二分划中属于同一子集的顶点之间是不邻接的，正如我们在第 9 章时对二分图所做的那样，我们通常这样来画一个二分图的图形：将 X 中的顶点画在左边(因此也称为左顶点)[㊀]，将 Y 中的顶点画在右边(因此也称为右顶点)。注意：二分图中不存在任何环，与二分图同构的多重图也是一个二分图。

例　图 11-20 给出了一个具有二分划 X，Y 的二分图，其中$X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{u,v,w\}$。 □

例　考虑图 11-21 中给出的简单图 G，尽管从表面上看，它不是一个二分图，但实际上它确实是一个二分图，因为我们也可以把 G 画成图 11-22 所示的图形，该图揭示了 G 中存在一个二分划$X=\{a,c,g,h,j,k\}$，$Y=\{b,d,e,f,i\}$。 □

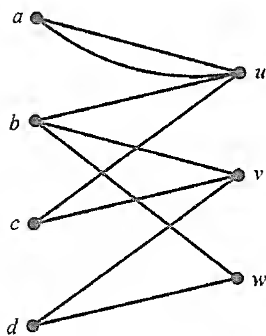


图　11-20

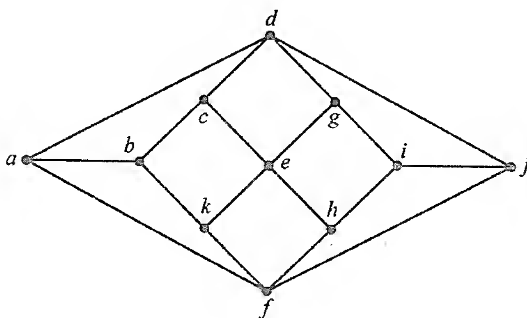


图　11-21

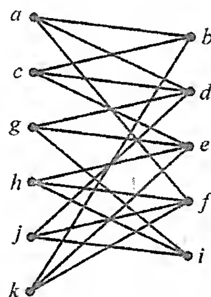


图　11-22

上述例子表明：二分图的图形或边的序列有时不能直接揭示出其二分的本性，在简单图中，对边的描述或许能揭示其顶点的二分性质。

例　设 G 是一个简单图，其顶点分别是从 1 到 20 的整数，两个顶点之间有边，当且仅当它们的差是一个奇数。G 的顶点被自然地划分为偶数和奇数，由于两个奇数顶点之差是一个偶数，两个偶数顶点之差也是偶数，所以 G 的两个顶点是邻接的，当且仅当其中的一个是奇数，而另一个是偶数。因此，G 是一个二分图，其二分划为$X=\{1,3,\cdots,17,19\}$，$Y=\{2,4,\cdots,18,20\}$。 □

如果 X 中的任意一个顶点与 Y 中的任意一个顶点都邻接，则一个具有二分划 X，Y 的二分图[㊁]G 叫做完全的。因此，如果 X 中有 m 个顶点，Y 中有 n 个顶点，则 G 中有 $m\times n$ 条边。有 m 个左顶点、n 个右顶点的完全二分图记为 $K_{m,n}$，上面例子中的图 G 是一个 $K_{10,10}$。

由于多重图的二分性仅从图的表达形式上看可能是不明显的，所以我们希望有另外的方法来识别二分多重图。

㊀ 当然，左和右是可以互换的。

㊁ 不是二分多重图。

定理 11.4.1 一个多重图是二分的，当且仅当它的任意一个圈的长度是偶数。

证明： 首先，设 G 是一个具有二分划 X，Y 的二分多重图，则 G 中一条途径上的顶点必交替取自 X 和 Y，由于圈是闭的，这就意味着一个圈中包含的左、右顶点数相同，所以，任意一个圈的长度是偶数。

现在假设 G 中任意一个圈的长度是偶数。首先，考虑 G 是连通的，设 x 是G 的任意一个顶点，令 X 是由那些到x 的距离为偶数的顶点构成的集合，Y 是由那些到x 的距离为奇数的顶点构成的集合，因为假设 G 是连通的，所以 X，Y 是G 的顶点的一个划分。我们下面来证明 X，Y 是一个二分划，即：X 中的任意两个顶点不邻接、Y 中的任意两个顶点也不邻接。假设反之，存在一条边$\{a,b\}$，使 a，b 均属于X，令

$$x - \cdots - a \text{ 和 } x - \cdots - b \tag{11-5}$$

分别是从 x 到a 和从x 到b 的长度最短的路径，因为这两条路径中第一个顶点都是 x，所以存在一个顶点 z，它是这两条路径中最后一个相同的顶点，从而，式(11-5)中的路径可以写成如下形式

$$x - \cdots - z - \cdots - a \text{ 和 } x - \cdots - z - \cdots - b \tag{11-6}$$

其中，路径

$$z - \cdots - a \text{ 和 } z - \cdots - b \tag{11-7}$$

中除了 z 以外，再无相同的顶点。又因为在式(11-6)中，从 x 到a 和从x 到b 的路径都是最短路径，所以，在(11-7)中，两条路径的长度要么都是奇数，要么都是偶数，这时，边$\{a,b\}$的存在就意味着图中有一个长度为奇数的圈

$$z - \cdots - a - b - \cdots - z$$

这与假设矛盾。所以，不可能存在一条边连接 X 中的两个顶点。同理可证明，也不可能存在一条边连接 Y 中的两个顶点，因此，G 是二分的。

如果 G 是不连通的，我们将上面的讨论用于 G 的每个连通分图，即得到每一个分图都是二分的，这也就意味着 G 是二分的。 □

在 11.7 节中，我们将给出一个简单算法：确定从连通图的一个指定顶点 x 到其他任意顶点的距离。这个算法与定理 11.4.1 的证明有联系，如果图 G 是二分的，它将确定 G 的一个二分划。

例 设 n 是一个正整数，把由 0 和 1 构成的所有 n-元组的集合作为简单图Q_n 的顶点，用一条边连接两个顶点，当且仅当这两个顶点仅有一个坐标不同。比如，若$x=(x_1, \cdots, x_n)$和 $y=(y_1, \cdots, y_n)$之间有一条边，则 y 中 1 的个数比 x 中 1 的个数多 1 或少 1。设 X 是由那些有偶数个 1 的 n 元组构成的，Y 是由那些有奇数个 1 的 n-元组构成的，则 X 中两个不同的顶点之间至少有两个坐标不同，因此是不邻接的。同理，Y 中的两个不同顶点也是不邻接的，所以 Q_n 是一个具有二分划X，Y 的二分图。

Q_n 是一个由n-维立体的顶点和边构成的图，在图 4-2～图 4-3 中，我们曾给出过 Q_1，Q_2，Q_3 的图形，但在某种程度上，这些图形并没有能够自动地揭示出它们二分的本质，在

图 11-23 中，给出了揭示它们本质的图形。在 4.3 节中，我们所构造的反射 Gray 码在图 Q_n 中是一个哈密尔顿圈，由此发现，寻找一个方法，用来生成 n-元集的所有组合，使得该 n-元集的连续组合变化最小(一个新元素进，或一个老元素出)，与在一个 n-维立体图 Q_n 中寻找一个哈密尔顿圈是相同的。 □

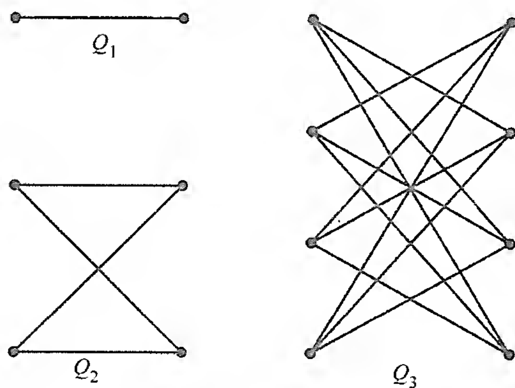


图　11-23

例　考虑一个 $n\times n$ 的棋盘，定义一个图 B_n，其顶点为棋盘的 64 个棋格，两个棋格之间有一条边，当且仅当它们拥有一条共同的边[⊖]。该图与 9.1 节涉及到的多米诺牌中的二分图是一样的，那是一个带有禁区的一般棋盘。如果将棋盘中的棋格看作是黑白相间的，那么任意两个黑格或白格之间都是不邻接的，因此，对一个棋盘的普通着色就确定了 B_n 的一个二分划，所以，B_n 是一个二分图。回忆第 1 章练习题 3 提出的问题：能否从一个 8×8 棋盘的一角，经过每个棋格恰好一次走到它的对角。现在我们知道，该问题是在问：图 B_8 中是否存在一条哈密尔顿路径。现在 B_8 是一个有 32 个白(或左)顶点、32 个黑(或右)顶点的二分图，所求的哈密尔顿路径应该起始和终止于同一种颜色，比如说是黑色的顶点，因为 B_8 是二分图，顶点的颜色在路径中必须是交替的，所以不可能存在一条从一角到达其对角的包含所有顶点的哈密尔顿路径，因为这样的路径中黑格的个数必须比白格的个数多 1 才行。 □

类似于上述例子的推理，我们给出下面的基本结论。

定理 11.4.2　设 G 是一个具有二分划 X，Y 的二分图，如果 $|X|\neq|Y|$，则 G 中不存在哈密尔顿圈。如果 $|X|=|Y|$，则 G 中不存在起始于 X 中的顶点又终止于 X 中顶点的哈密尔顿路径。如果 X 和 Y 相差至少是两个顶点，则 G 中不存在哈密尔顿路径。如果 $|X|=|Y|+1$，则 G 中不存在起始于 X 终止于 Y 的哈密尔顿路径，反之亦然。

在结束本节内容之前，再讨论一个古老的游戏问题[⊜]，该问题用现代语言描述的话，仍是在一个在具体的图中寻找哈密尔顿圈的问题。

例(骑士周游问题)　给定一个 8×8 的棋盘，用一个棋子表示骑士。一个骑士从当前位置通过向垂直方向移动 2 格、水平方向移动 1 格，或向垂直方向移动 1 格、水平方向移动 2 格的方式移动，那么，是否存在这样的可能：让骑士能够落在棋盘的每一格上恰好一次，而又不违反规则呢？这样的旅行称为骑士周游。还可以要求一个骑士周游具有这样的性质：从最后一格移到第一格时，仍满足一个合法的骑士移动。具有这种性质的骑士周游称为重复周游(reentrant)。

⊖ 即：两个棋格作为顶点是邻接的，当且仅当它们在棋盘上是相邻的。

⊜ 该问题是由印度棋手在大约公元前 200 年时直观地提出并解决的。

该问题的一种解法归功于欧拉，其方法由下面的表格给出：

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

其中，棋格中的数码代表骑士到达该棋格的次序，特别地，数码为 1 的棋格表示骑士的初始位置，数码为 64 的棋格代表他最后时的位置。因为从棋格 1 到棋格 64 的移动是一个合法的骑士移动，所以该周游是一个重复周游。注意：在这个周游中，骑士首先周游了棋盘下半部分的全部棋格后才进入了上半部分。

骑士周游问题能应用在任何 $m\times n$ 的棋盘上，我们将其视为图中哈密尔顿路径的存在性问题。把一个 $m\times n$ 棋盘中的棋格看作图 $\mathcal{K}_{m,n}$ 的顶点，其中两个棋格之间有一条边，当且仅当从其中一个棋格移到另一个棋格时，满足一个合法的骑士移动。$\mathcal{K}_{m,n}$ 中的一条哈密尔顿路径代表 $m\times n$ 棋盘上的一个骑士周游，一个哈密尔顿圈代表一个重复周游。像以往一样，考虑棋盘上黑白相间的棋格，我们看到骑士总是从一种颜色的棋格移到另一种颜色的棋格，因此，$\mathcal{K}_{m,n}$ 是一个 $m\times n$ 阶的二分图。如果 m 和 n 都是奇数，则一种颜色的棋格数比另一种颜色的棋格数多 1，因此，由定理 11.4.2，不存在重复周游。如果 m 和 n 中至少有一个是偶数，则黑白棋格数相同，因此，有可能存在重复周游。

在一个 $1\times n$ 的棋盘上，骑士根本就无法移动。在一个 $2\times n$ 的棋盘上，四个角上的每一个棋格，骑士只能从某一个棋格到达，这意味着：在图 $\mathcal{K}_{m,n}$ 中，角上的每个棋格的度数均为 1，因此，不存在骑士周游。3×3 的棋盘又如何呢？在这样的棋盘上，骑士从任何一个棋格都不可能到达中间的那个棋格。因此，在 $\mathcal{K}_{m,n}$ 中，中间那个棋格的度数为 0，不可能存在骑士周游。不要失望，这里有一个 3×4 的棋盘，骑士可以在上面进行一种非重复周游：

1	4	7	10
12	9	2	5
3	6	11	8

骑士在 $n\times n$ 棋盘上周游，用 1 到 n^2 为棋格标号，引出了一个数码方阵，在该方阵中，1 到 n^2 中的每个数码恰好出现一次。目前，一个还未解决的问题是：在一个 8×8 的棋盘上，确定是否存在一个骑士周游，使其所产生的方阵是一个幻方㊀。 □

11.5 树

假如我们要建立一个 n 阶连通图，要求使用最少数目的边“刚好能够做到”㊁，一个简单的构造方法是：选择一个顶点，将它与其他 $n-1$ 个顶点之间都连上一条边，其结果得到一个完全二分图 $K_{1,n-1}$，我们把它叫做一个星。星 $K_{1,n-1}$ 是连通的，且有 $n-1$ 条边，如果从中去掉任何一条边，则得到一个不连通的图，其中的一个顶点不和任何边连接。另一个

㊀ 见 H.E.Dudeney：*Amusements in Mathematics*，Dover Publishing Co.，New York，1958。

㊁ 例如，用最少数目的路来连接 n 个城市，使得人们可以从任意一个城市到达其他任意一个城市。

简单的构造方法是：用一条路径连接 n 个顶点，其结果也是一个连通图，有 $n-1$ 条边，如果从中去掉任意一条边，也将得到一个不连通的图。那么，我们能构造出一个具有 n 个顶点、少于 $n-1$ 条边的连通图吗？

假设有一个 n 阶连通图 G，试想一个一个地把边放入 G 中，这样我们是从有 n 个顶点、没有边、因而有 n 个连通分图的图开始，每放入一条边，能减少的连通分图的数目最多为1：如果新边连接的两个顶点已在同一个连通分图中，则连通分图的数目保持不变；如果新边连接的两个顶点不在同一个分图时，则这两个分图变成一个连通分图，而其余分图保持不变，因为我们起始于 n 个分图，而每条边最多只能减少一个连通分图，所以至少需要 $n-1$ 条边，才能将连通分图的数目减少到1，即得到一个连通图。因此，我们已证明了下面的基本结论。

定理 11.5.1 一个 n 阶连通图至少有 $n-1$ 条边。此外，对任意一个正整数 n，存在一个恰好为 $n-1$ 条边的连通图。从 n 个顶点、$n-1$ 条边的连通图中去掉任意一条边，得到一个不连通的图，因此，每条边都是一个桥。

树定义为这样一个连通图，去掉其任意一条边后就不再连通。因此，树是一个连通图，其每条边都是桥，即：每条边对图的连通性都是必不可少的。下面证明：一个连通图可以通过简单地数一数图中边的个数就能被证实为树。

定理 11.5.2 一个 $n\geqslant 1$ 阶的连通图是树，当且仅当它恰好有 $n-1$ 条边。

证明： 由定理11.5.1，一个恰好有 $n-1$ 条边的 n 阶连通图是树(其任意一条边是桥)。反之，通过对 n 用归纳法来证明：一个 n 阶树 G 恰好有 $n-1$ 条边。如果 $n=1$，则 G 没有边，所以结论显然成立。设 $n\geqslant 2$，令 α 是 G 的任意一条边，G' 是 G 中去掉边 α 后得到的图，因为 α 是桥，所以 G' 有两个连通分图 G'_1 和 G'_2，设它们分别有 k 个顶点和 l 个顶点，其中 k 和 l 是正整数，且 $k+l=n$。G'_1 的每一条边都是 G'_1 的桥，否则将其从 G 中去掉后，显然留下一个连通图，这与我们的假设—— G 是树矛盾。同理，G'_2 的每一条边也都是 G'_2 的桥。因此，G'_1 和 G'_2 都是树，由归纳假设，G'_1 有 $k-1$ 条边，G'_2 有 $l-1$ 条边，所以 G 有 $(k-1)+(l-1)+1=n-1$ 条边，这就证明了我们的结论。 □

树的另外一个性质由下面的定理给出，首先，我们先证明一个引理。

引理 11.5.3 设 G 是一个连通图，$\alpha=\{x,y\}$ 是 G 的一条边，则 α 是桥，当且仅当 G 的任何圈中不包含 α。

证明： 先假设 α 是桥，则 G 是由通过 α 连接着的两个连通分图构成的，所以任何圈中都不可能包含 α[⊖]。现在假设 α 不是桥，则从 G 中去掉 α 后，留下一个连通图 G'，因此，在 G' 中，当然也是在 G 中，有一条不包含边 α 的路径

$$x-\cdots-y$$

连接 x 和 y，于是

$$x-\cdots-y-x$$

⊖ 牢记：圈中没有相同的边。

是一个包含边 α 的圈。 □

定理 11.5.4 设 G 是一个 n 阶连通图，则 G 是树，当且仅当 G 中不存在圈。

证明： 我们知道，树的任一条边都是桥，由引理 11.5.3，树中不存在任何圈，因此，如果 G 是一个树，则 G 中不存在任何圈。现在假设 G 中不存在任何圈，再由引理 11.5.3，G 的每一条边都是桥，因此，G 是一个树。 □

定理 11.5.4 暗示了树的另一个特性。

定理 11.5.5 一个图 G 是树，当且仅当任意一对不同的顶点 x 和 y 之间，都有唯一的一条路径连接，且这条路径必是连接 x 和 y 的最短的路径，即：长度为 $d(x,y)$ 的路径。

证明： 先假设 G 是树，由于 G 是连通的，所以任意一对不同的顶点必然被某个路径连接着，如果某对顶点被两条不同的路径连接着，则 G 中有圈，这与定理 11.5.4 矛盾。

现在假设 G 中任意一对不同的顶点被唯一的一条路径连接着，于是 G 是连通的。由于圈中的任意一对顶点都由两条不同的路径连接，所以 G 中不存在任何圈，再由定理 11.5.4，G 是一个树。 □

设 G 是图，G 中度数为 1 的顶点叫做 G 的悬挂点(pendent vertex)，因此，一个悬挂点只与一条边邻接，任何一条与悬挂点邻接的边叫做悬边(pendent edge)。

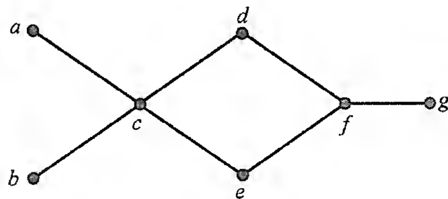


图 11-24

例 在图 11-24 中，阶数 $n=7$ 的图 G 有三个悬挂点，即：a，b，g 和三个悬边，该图不是树，因为边 $\{c,d\}$ 不是桥，或因为它有 $7>6$ 条边（参见定理 11.5.2），或因为它有一个圈(参见定理 11.5.4)。 □

定理 11.5.6 设 G 是一个阶数 $n\geqslant 2$ 的树，则 G 中至少有 2 个悬挂顶点。

证明： 设 G 中顶点的度数分别为 d_1，d_2，…，d_n，由于 G 有 $n-1$ 条边，根据定理 11.1.1，有

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2\ (n-1)$$

如果其中最多有一个 d_i 等于 1，则有

$$d_1+d_2+\cdots+d_n\geqslant 1+2\ (n-1)$$

矛盾。因此，其中至少有 2 个 d_i 等于 1；即：至少有 2 个悬挂点。 □

例 在一个阶数 $n\geqslant 2$ 的树 G 中，最多能有多少个悬挂点？最少能有多少个悬挂点？

2 阶树的两个顶点都是悬挂的。现在假设 $n\geqslant 3$，如果树的所有顶点都是悬挂的，那么树将是不连通的(事实上，这时 n 必是偶数，且任意两条边都不邻接)，星 $K_{1,n-1}$ 有 $n-1$ 个悬挂点，因此，$n-1$ 是阶数 $n\geqslant 3$ 的树中悬挂点的最大数目。其边以路径的形式排列的树恰好有 2 个悬挂点，因此，由定理 11.5.6，2 是阶数 $n\geqslant 2$ 的树中悬挂点的最少数目。 □

例(如何构造树) 由定理 11.5.6，树有悬挂点，因此必有悬边，如果从树 G 中去掉一条边，则得到一个具有两个连通分图的图，且每个分图仍然是树，如果去掉的边是一条悬边，则较小的那个树仅由一个顶点构成，另一个则是 $n-1$ 阶的树 G'。反之，如果有一个 $n-1$ 阶的树 G'，于是，选择一个新的顶点 u，将其与 G' 中的一个顶点 x 连成一条边 $\{u, x\}$，则得到树 G，其中 u 是 G 的一个悬挂顶点，这意味着任何树都能按如下方法来构造：从一个顶点开始，反复选择一个新的顶点，在新顶点与老顶点之间连一条边。图 11-25 中的 5 阶树就是用这种方法构造出来的。 □

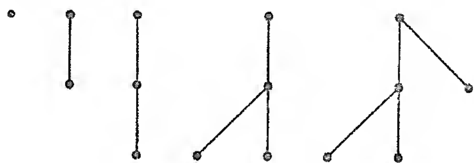


图 11-25

利用上述例子中的构造方法，不难说明，不同构的 n 阶树 t_n 的数目满足：$t_1=1$，$t_2=1$，$t_3=1$，$t_4=2$，$t_5=3$ 及 $t_6=6$。图 11-26 给出了 6 个顶点的所有不同构的树。

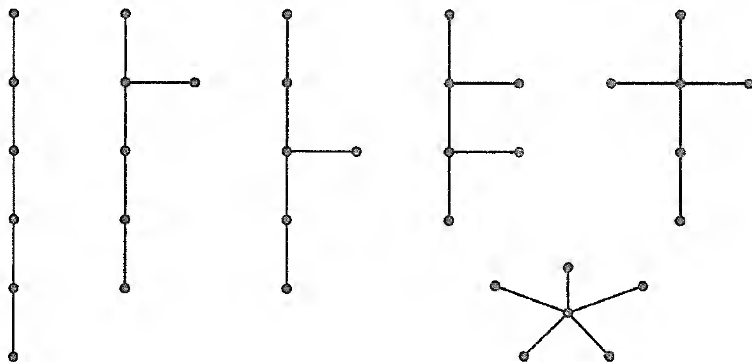


图 11-26

我们已经定义了树是一个连通图，其任意一条边都是桥。因此，如果一个连通图 G 不是树，则它必有一个不是桥的边，即：去掉这条边后将不会把图分割。如果反复去掉不是桥的边，直到剩余的图中每条边都是桥为止，那么就得到了一棵树，其顶点集与 G 的顶点集相同，其边是 G 中的某些边；也就是说，得到了 G 的一个是树的生成子图。如果图 G 的生成子图是树的话，则称该树为 G 的生成树。

定理 11.5.7 任何连通图都有一棵生成树。

证明：在上一段中，我们曾给出过算法形式的证明，现在我们给出一个更为准确的算法描述。回忆定理 11.3.1，连通图的一条边是桥，当且仅当这条边不包含在任何一个圈中。

求生成树的算法

设 $G=(V, E)$ 是一个 n 阶连通图。

ⅰ)令 F 等于 E。

ⅱ)当 F 中的一条边 α 不是图 $T=(V, F)$ 的桥时，从 F 中去掉 α。

最终的图 $T=(V, F)$ 是 G 的一棵生成树。

与前面的讨论类似，最终的图 $T=(V, F)$ 是连通的且没有任何桥，所以是树。 □

我们看到，定理 11.5.7 中对图的限制是没有必要的，如果 G 是一般图，那么可以立即去掉 G 中所有的环及所有的重复边，然后再应用定理 11.5.7 及其证明中的算法。因此，任

何一个连通一般图也都有一棵生成树。

例 设 G 是 7 阶连通图，如图 11-27 中左边那个图所示。该图恰好有一个桥，因此我们来开始求生成树的算法：去掉其中任意一条不是桥的边，比如边$\{1,2\}$后，边$\{1,4\}$，$\{4,5\}$，$\{2,5\}$及$\{2,3\}$都变成了桥，从而它们不能再被去掉了。再去掉边$\{6,7\}$后，就留下了右边的那棵生成树。 □

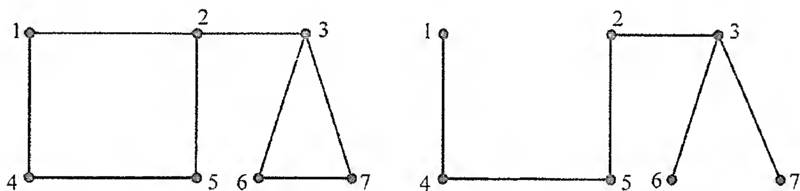


图 11-27

我们以生成树的两个性质来结束本节内容，这两个性质将用于本章下面的各节中。

定理 11.5.8 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，$\alpha=\{a, b\}$是 G 的一条边，但不是 T 的边，则 T 中存在一条边 β 满足：通过向 T 中加入边 α，并去掉边 β 后，得到的图 T' 仍是 G 的一棵生成树。

证明： 设图 G 有 n 个顶点，从而图 T 也有 n 个顶点。首先，假设图 T' 是通过向 T 中加入给定的边 α 后得到的，则 T' 不是树，根据定理 11.5.4，T' 中的一个圈 γ 必包含 T 中至少一条边，由引理 11.3.1，γ 中的任一条边都不是 T' 的桥。设 β 是 γ 中不同于 α 的任意一条边，从 T' 中去掉 β 后，就得到一个有 n 个顶点 $n-1$ 条边的连通图，因此，它是树。 □

定理 11.5.9 设 T_1 和 T_2 是连通图 G 的两个生成树，β 是 T_1 的一条边，则 T_2 中必有一条边 α，使得 T_1 中加入 α 而去掉 β 后，得到的图仍是 G 的一棵生成树。

证明： 首先注意定理 11.5.8 和定理 11.5.9 的区别，在定理 11.5.8 中，给定的是一棵生成树 T 和某个不属于 T 的边 α，我们要做的是向 T 中加入 α、去掉 T 中满足去掉它后结果仍是一棵生成树的任意一条边 β。而在定理 11.5.9 中，给定的是一棵生成树 T_1，我们是要从 T_1 中去掉特定的一条边 β，而加入 T_2 中满足加入它后结果仍是一棵生成树任意一条边。

为证明该定理，首先，从 G 的生成树 T_1 中去掉边 β，结果得到一个具有两个连通分图 T_1' 和 T_2''(二者必都是树)的图。因为 T_2 也是 G 的生成树，所以 T_2 是连通的且与 T_1 有相同的顶点集，因而 T_2 中必有一条边 α 连接 T_1' 的一个顶点和 T_2'' 的一个顶点，通过向 T_1 中加入边 α、去掉边 β 后，所得的结果是一个具有 $n-1$ 条边的连通图，因此，这是一棵树。(我们注意到，如果 β 不是 T_2 的一条边，则 α 也不是 T_1 的一条边，否则将得到一个具有 n 个顶点，少于 $n-1$ 条边的连通图)。 □

我们自然要问：一个连通图能有多少棵生成树呢？任何连通图的生成树的个数可以通过一个代数公式[⊖]计算出来，但这样的公式已经超出了本书的范围。

例 如图 11-28 所示，4 阶图(一个长度为 4 的圈)的生成树的个数为 4，其中的每一个都是长度为 3 的路径，因此，它们都是同构的。 □

⊖ 它是一个图的 $n-1$ 阶拉普拉斯矩阵的任意子矩阵的行列式的绝对值。

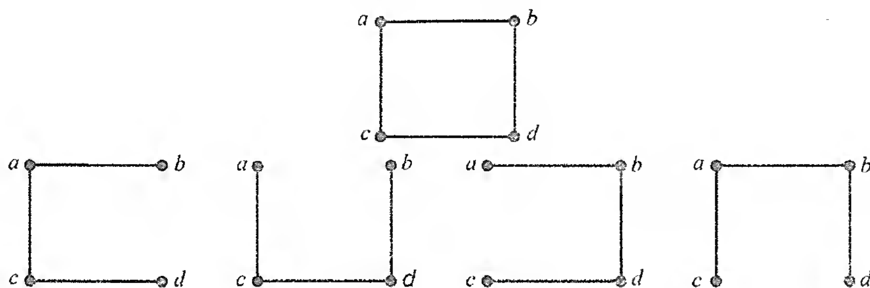


图 11-28

Cayley 的一个著名的公式断言：完全图 K_n 的生成树的个数是 n^{n-2}。真是一个令人惊讶的简单公式。

正如上例所述，生成树中的许多树之间彼此可能是同构的，因此，在 K_n 的生成树中，每一个 n 阶树都可能出现了很多次(只是顶点的标号不同)，所以 n^{n-2}并不代表 n 阶不同构树的个数，后者是 n 的一个更为复杂的函数。

11.6 Shannon 开关游戏

本节我们讨论一个能在任何多重图上进行的游戏，它是由 C.Shannon㊀发明的，而其漂亮的解法则是由 A.Lehman㊁找到的。本书后面的内容与本节内容无关。

Shannon 游戏要由两个人来进行，在这里我们就称他们为*正方选手* P 和*反方选手* N㊂，在游戏中，正、反双方选手要轮流出着儿。设$G=(V, E)$是一个多重图，u 和 v 是它的两个不同顶点，因此，该“游戏盘”是由标出了两个不同顶点的多重图构成的。正方选手的目标是：在两个不同顶点 u 和 v 之间建起一条路径。反方选手的目标是：不让正方选手达到目的，即破坏 u 和 v 之间所有的路径。游戏的玩法按如下方法进行：当轮到 N 走时，N 要破坏某个边，就在该边上画一个负号㊃“－”来表示，当轮到 P 走时，P 要在 G 的某个边上画一个正号“+”，此后 N 就不能再破坏这条边了。这样，直到一方达到目的时游戏结束：

ⅰ)如果 u 和 v 之间有一条全是正号 + 的路径，则*正方选手获胜*。

ⅱ)在 G 中，如果 u 和 v 之间的任意一条路径上，至少有一条边上画有负号 －，说明 N 已破坏了 u 和 v 之间所有的路径，这时*反方选手获胜*。

很明显，当多重图 G 的每条边都被走过之后，即每条边上都有了一个 + 号或 － 号之后，将恰好有一方获胜，特别强调的是，游戏不可能以平局结束。如果 G 是不连通的，而 u 和 v 又分布在 G 的两个不同的连通分图中时，我们可以立即宣布 N 是胜方㊄。

我们来考虑下面的问题：

㊀ Shannon 被公认为是现代通信理论的创始人。

㊁ A.Lehman：A solution of the Shannon switching game，*J. Society Industrial and Applied Mathematics*，12(1964)，687-725。我们对该游戏及其解法的描述是基于作者文章中的第 3 节：*Networks and the Shannon switching game*，*Delta*，4(1974)，1-23。

㊂ 或分别为建设选手和破坏选手。

㊃ 如果游戏是用铅笔在纸上画 G 的方式来玩的话，则 N 可以用擦掉一条边的方式来破坏一条边。

㊄ 而 P 对陷入这样一个让他无法取胜的游戏中肯定会感到非常困扰。

ⅰ）有没有一个 P 能遵循的策略，使得无论 N 玩得多么好，P 一定能获胜？如果有，确定这样一个能使 P 获胜的策略。

ⅱ）有没有一个 N 能遵循的策略，使得无论 P 玩得多么好，N 一定能获胜？如果有，确定这样一个能使 N 获胜的策略。

对上述问题的回答有时要取决于正方选手和反方选手到底谁先走。

例　首先，考虑图 11-29 中左边的那个多重图，不同顶点 u 和 v 如图所示，在这个游戏中，正方选手 P 将获胜，无论他是先走还是后走，这是因为 + 号无论在哪个边上，都确定了 u 和 v 之间的一条路径。现在考虑图 11-29 中间那个图，在这个游戏中反方选手 N 将获胜，无论他是先走还是后走，这是因为 − 号无论在哪个边上，都破坏了 u 和 v 之间所有的路径。最后，考虑图 11-29 中右边的那个图，在这个游戏中，谁先走，谁就拥有了图中唯一的边，因而谁就获得了胜利。□

受上面例子的启发，我们做如下定义：一个游戏叫做*正方游戏*，如果正方选手具有胜策，无论他是先走还是后走。一个游戏叫做反方游戏，如果反方选手具有胜策，无论他是先走还是后走。一个游戏叫做*先方游戏*，如果先走的一方具有胜策。我们注意到：如果正方选手后走时具有胜策，那么他先走时也具有胜策，这是因为正方选手可以忽略他的第一着[⊖]，而后走的一方遵循胜策来走，如果胜策要求他在一个边上画一个 + 号，而那个边上已有了 + 号时，那么他就可以有一个"*自由运动*"，即：在任意一条可用的边上画个 + 号。类似地，如果反方选手后走时具有胜策，那么他先走时也具有胜策。

例　考虑图 11-30 中由左边那个图所确定的游戏，其不同顶点 u 和 v 如图所示。假设 P 先走，并在边 e 上画个 + 号，我们把剩下的边配成对：a 和 b 一对，c 和 d 一对。如果 P 对 N 所走的边进行这样的反击：走 N 所走那对边的另一条边，那么 P 肯定获胜。因此，如果 P 先走，则 P 获胜，现在假设 N 先走，并在边 e 上画个 − 号，这次我们把剩下的边这样配对：a 和 c 一对，b 和 d 一对。如果 N 对 P 所走的边进行这样的反击：走 P 所走那对边的另一条边，那么 N 肯定获胜。因此，如果 N 先走，则 N 获胜。因此我们断定：由图 11-30 所确定的游戏是一个先方游戏。

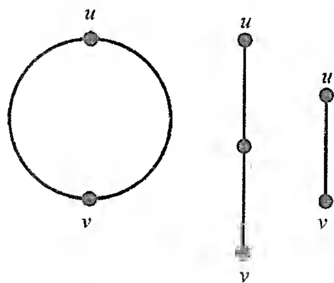


图　11-29

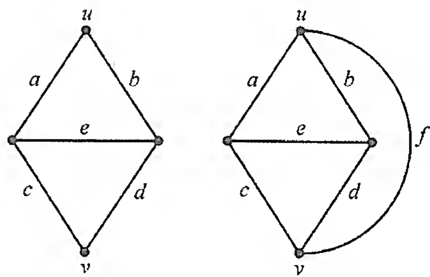


图　11-30

现在假设增加了一条新边 f，它连接不同顶点 u 和 v，其结果如图 11-30 中右边的那个图所示。在这个新游戏中，假设反方先走，如果 N 不在新边 f 上画个 − 号，则正方选手会因此而获胜。如果 N 确实在 f 上画了 − 号，则剩下的游戏和前面那个游戏相同，应该 P 先

⊖　但反方选手是不可以的。

走，从而 P 获胜，因此，P 作为后走的一方具有胜策，所以该游戏是一个正方游戏。 □

上述例子所阐述的原理具有一般性。

定理 11.6.1 在先方游戏的多重图中，如果在两个不同顶点 u 和 v 之间增加一条新边，则先方游戏变为正方游戏。

下面的定理给出了正方游戏的性质。回想：如果 $G=(V,E)$ 是多重图，U 是顶点集 V 的子集，则 G_U 表示 G 的由 U 导出的多重子图，即：G 是以 U 为顶点集、以 G 的所有连接 U 中两顶点的边构成的。换句话说，G_U 是通过从 G 中去掉所有 $\overline{U}=V-U$ 中的顶点以及至少与 $\overline{U}$ 中的一个顶点邻接的所有边后得到的。

定理 11.6.2 由标有两个不同顶点 u 和 v 的多重图 $G=(V,E)$ 所确定的游戏是一个正方游戏，当且仅当存在一个顶点集 V 的及包含 u 和 v 的子集 U，使得导出多重子图 G_U 中存在两个没有共同边的生成树 T_1 和 T_2。

定理的另外一种叙述方法是：一个游戏是正方游戏，当且仅当 G 中有两棵生成树 T_1 和 T_2 满足：T_1 和 T_2 具有相同的顶点集，且 T_1 和 T_2 没有共同的边。在图 11-30 中，右边的那个图所确定的游戏已被证明是一个正方游戏，我们可以把图 11-31 中的两棵树分别作为 T_1 和 T_2。在该例中，T_1 和 T_2 是 G 的生成树，即 $U=V$，但这并不总是必需的，有时集合 U 可能仅包含 V 的部分顶点。

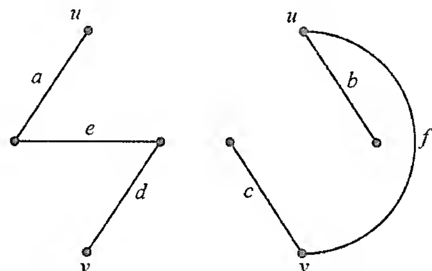


图 11-31

对定理 11.6.2，我们将不给出完整的证明，而只给出如何利用一对树 T_1 和 T_2，为正方选手 P 制定出一个当反方选手 N 先走时的胜策。在比赛的每一个回合之后，即反方选手走完一步，紧跟着该正方选手走的时候，我们都要构造出 G_U 的一对新的生成树，它比原来的一对多一条共同的边。开始时，G_U 的生成树 T_1 和 T_2 没有共同的边，我们把这两棵树记为

$$T_1^{(0)}=T_1 \text{ 和 } T_2^{(0)}=T_2$$

比赛的第一个回合

反方选手 N 先走，并在某个边 β 上画个 − 号，我们考虑两种情况。

情况 1：$\boldsymbol{\beta}$ 是树 $\boldsymbol{T_1^{(0)}}$ 或 $\boldsymbol{T_2^{(0)}}$ 的一条边，不妨设是 $\boldsymbol{T_1^{(0)}}$ 的边。

因为 $T_1^{(0)}$ 和 $T_2^{(0)}$ 是 G_U 的生成树，由定理 11.5.9，存在 $T_2^{(0)}$ 的一条边 α，使得通过向 $T_1^{(0)}$ 中加入边 α 去掉边 β 后，所得的图 $T_1^{(1)}$ 仍是 G_U 的一棵生成树。我们给 P 的指令是：在边 α 上画个 + 号。令 $T_2^{(1)}=T_2^{(0)}$，则树 $T_1^{(1)}$ 和 $T_2^{(1)}$ 恰好只有一条共同的边，即带有 + 号的边 α。

情况 2：$\boldsymbol{\beta}$ 既不是 $\boldsymbol{T_1^{(0)}}$ 的边，也不是 $\boldsymbol{T_2^{(0)}}$ 的边。

这时我们给 P 的指令是：在 $T_1^{(0)}$ 或 $T_2^{(0)}$ 的任意一条边 α 上画个 + 号，不妨

⊖ 在这种情况下，N 已经“浪费”了一着，而 P 获得了在树 $T_1^{(0)}$ 和 $T_2^{(0)}$ 上的一个自由运动。

是 $T_1^{(0)}$ 的边[⊖]。因为 $T_2^{(0)}$ 是 G_U 的一个生成树，且 α 是 G_U 的边，由定理 11.5.9，存在 $T_2^{(0)}$ 的一条边 γ，使得通过向 $T_2^{(0)}$ 中加入边 α 去掉边 γ 后，所得的图 $T_2^{(1)}$ 仍是 G_U 的一棵生成树，令 $T_1^{(1)}=T_1^{(0)}$，则树 $T_1^{(1)}$ 和 $T_2^{(1)}$ 恰好只有一条共同的边，即带有 + 号的边 α。

我们断定：在比赛的第一个回合结束时，G_U 有两棵生成树 $T_1^{(1)}$ 和 $T_2^{(1)}$，它们恰好只有一条共同的边，也即被 P 画上 + 号的边。

比赛的第二回合

反方选手 N 在 G 的第二条边 δ 上画个 − 号，我们为 P 寻找一个反击策略。确定 P 要画 + 号的一条边 ρ 与比赛第一回合中的方法非常类似，在我们的叙述中，将会更简要一些。

情况 1：δ 是树 $T_1^{(1)}$ 或 $T_2^{(1)}$ 的一条边，不妨设是 $T_2^{(1)}$ 的边。

则存在 $T_1^{(1)}$ 的一条边 ρ，使得通过向 $T_1^{(1)}$ 中加入边 δ 去掉边 ρ 后，所得的图 $T_1^{(2)}$ 仍是 G_U 的一棵生成树。我们指示 P：在边 ρ 上画个 + 号。令 $T_2^{(2)}=T_2^{(1)}$。

情况 2：δ 既不是 $T_1^{(1)}$ 的边，也不是 $T_2^{(1)}$ 的边。

我们指示 P：在 $T_1^{(1)}$ 或 $T_2^{(1)}$ 的任意一条可用的边[⊖] ρ 上画个 + 号，不妨设是 $T_1^{(1)}$ 的边。存在 $T_2^{(1)}$ 的一条边 ε，使得通过向 $T_2^{(1)}$ 中加入边 ρ 去掉边 ε 后，所得的图 $T_2^{(2)}$ 仍是 G_U 的一棵生成树，令 $T_1^{(2)}=T_1^{(1)}$。

我们断定：在比赛的第二个回合结束时，G_U 有两个生成树 $T_1^{(2)}$ 和 $T_2^{(2)}$，它们恰好有两条共同的边，也即被 P 画上 + 号的那两条边。

后面对 P 的策略的描述非常类似于比赛的第一回合与第二回合，在比赛的第 k 个回合结束时，得到 G_U 的两棵生成树 $T_1^{(k)}$ 和 $T_2^{(k)}$，它们恰好有 k 条共同的边，也即此时已被 P 画上 + 号的那 k 条边。设 U 中的顶点数是 m，则在比赛的第$(m-1)$个回合结束时，G_U 的生成树 $T_1^{(m-1)}$ 和 $T_2^{(m-1)}$ 恰好有 $m-1$ 条共同的边，因为具有 m 个顶点的树只有 $m-1$ 条边，这意味着 $T_1^{(m-1)}$ 和 $T_2^{(m-1)}$ 是同一个树，所以画有 + 号的边是 G_U 的一个生成树的所有边。由于顶点 u 和 v 属于 U，且有一条由带 + 号的边所构成的路径连接这两个不同的顶点，因此我们断言：如果正方选手 P 遵循我们的指示，那么当比赛到第$(m-1)$个回合结束时，如果不是在这之前的话，他将会得到一个画有 + 号的边集，构成一条连接 u 和 v 的路径，所以他比赛获胜。我们给 P 的指示是一个使他获胜的胜策。

定理 11.6.2 可以用来对先方游戏和反方游戏进行分类，方法如下：设 $G=(V,E)$ 是一个标有不同顶点 u 和 v 的多重图，G^* 是通过向 G 中增加一条连接 u 和 v 的新边后得到的多重图，则：

ⅰ）关于 G，u 和 v 的游戏是一个先方游戏，当且仅当它不是正方游戏，但关于 G^*，u 和 v 的游戏是一个正方游戏。

ⅱ）关于 G，u 和 v 的游戏是一个反方游戏，当且仅当关于 G，u 和 v 的游戏和关于 G^*，u 和 v 的游戏都不是正方游戏。

⊖ 即：在一条还没有被标记过的边上。

因此，由定理 11.6.2 知，关于 G，u 和 v 的游戏是一个先方游戏，当且仅当 G 中不含有两个分离的、具有相同顶点的、包含 u 和 v 的树，但通过增加一条连接 u 和 v 的新边，就可以找到这样的两个树。关于 G、u 和 v 的游戏是一个反方游戏，当且仅当即使在 G 中增加一条连接 u 和 v 的新边，也找不到这样的两个树。在先方游戏 G 中，如果正方选手先走，则他能获胜，因为此时的游戏就像是在 G^* 中进行的那样，N 先走，且 N 的第一步是在连接 u 和 v 的那个新边上画个 $-$ 号。一般而言，对于反方游戏中 N 后走或先方游戏中 N 先走的情况，就很难为 P 制定出一个获胜的策略。

11.7 再论树

在定理 11.5.7 的证明中，我们曾给出过一个求连通图的生成树的算法，回想这个算法我们发现，它的“破坏性”比其建设性更大：我们总是在当前的图中反复寻找圈中的边，即：不是桥的边，并去掉或“删掉”它。但在该算法中，隐含着某种寻找一个不是桥的边的子算法，在 11.5 节中，我们也曾叙述过一个构造 n 个顶点的任意树的过程，这个过程相当于构造 n 阶完全图 K_n 的任意一个生成树，我们可以把它提炼成应用于构造任意图[⊖]的所有生成树的算法，下面我们给出提炼后的最终算法，该算法不要求初始的图 G 是否连通，因此该算法的一个副产品就是确定一个图是不是连通的。

构造生成树的算法

设 $G=(V, E)$ 是一个 n 阶图，u 是它的任意一个顶点。

ⅰ) 令 $U=\{u\}$ 及 $F=\varnothing$。

ⅱ) 当存在一个 U 中顶点 x 和一个非 U 中的顶点 y，满足 $\alpha=\{x,y\}$ 是 G 的边时，

  a)将顶点 y 放入 U 中。

  b)将边 α 放入 F 中。

ⅲ) 令 $T=(U,F)$。

在步骤 ⅱ)中，一般情况下，对顶点 x 和 y 将有多种选择方法，因此，我们执行算法时将有相当大的自由。在下一个定理之后，我们给出选择 x 和 y 的两条特殊而重要的规则。

定理 11.7.1 设 $G=(V, E)$ 是图，则 G 是连通的，当且仅当通过执行上面的算法构造出的图 $T=(U, F)$ 是 G 的一个生成树。

证明： 如果 T 是 G 的一棵生成树，显然 G 是连通的。现在假设 G 是连通的，开始时的 T 只有一个顶点、没有边，因此 T 是连通的。每一次执行步骤ⅱ）时，U 中都增加一个顶点，F 中都增加一条连接一个新顶点和一个老顶点的边，由递推性，在算法中的每一阶段，当前的 $T=(U, F)$ 是连通的，且 $|F|=|U|-1$，所以 T 是树。假如算法结束时，有 $U\neq V$，由于 G 是连通的，则必有一条边连接 U 中的某个顶点和不是 U 中的某个顶点，这与算法已经结束是矛盾的。因此，在算法结束时，我们有 $U=V$，且 $T=(U, F)$ 是 G 的一棵生成树。 □

我们应该明确：连通图的任意一个生成树都可以通过在执行该算法时，正确地选择 x

⊖ 在本节中，我们只考虑简单图并不失一般性，如果给我们的是一般图，可以立即去掉所有的环和重边中所有重复的边，再对所得的图利用本节的结果和算法。

和 y 而构造出来。现在给出一个通过选择顶点的方法，来构造一个有特殊性质的生成树。该算法的叙述就在本段之后，它构造的是一个所谓的*广度优先生成树*，该树根植于一个指定的顶点，即集合 U 中的初始顶点 u。在一般情况下，一个连通图具有许多其根植于顶点 u 的广度优先生成树 T，它们的共同性质是：对任意的顶点 x，x 与 u 在 G 中的距离等于 x 与 u 在 T 中的距离。为方便起见，我们称广度优先生成树为 BFS-树。在下面的算法中，对每个顶点 x 附加两个数，一个叫做它的*广度优先数*，记为 $bf(x)$，用来代表顶点 x 加入到 BFS-树中的次序，另一个数代表 BFS-树中 u 和 x 之间的距离，并记为 $D(x)$[⊖]。

BF-算法：构造根植于 u 的 BFS-树

设 $G=(V, E)$ 是一个 n 阶图，u 是它的任意一个顶点。

ⅰ）令 $i=1$，$U=\{u\}$，$D(u)=0$，$bf(u)=1$，$F=\varnothing$ 和 $T=(U, F)$。

ⅱ）如果 G 中已没有连接 U 的一个顶点 x 和非 U 的一个顶点 y 的边时，则算法停止。否则，确定一条边 $\alpha=\{x, y\}$，其中 x 属于 U，而 y 不属于 U，使得 x 具有最小的广度优先数 $bf(x)$，并执行：

a)令 $bf(y)=i+1$。

b)令 $D(y)=D(x)+1$。

c)将顶点 y 放入 U。

d)将边 $\alpha=\{x, y\}$ 放入 F。

e)令 $T=(U, F)$。

f)i 值增 1 并返回到ⅱ）。

定理 11.7.2　*设 $G=(V, E)$ 是图，u 是 G 的任一顶点，则 G 是连通的，当且仅当通过执行上述 BF-算法构造出的图 $T=(U, F)$ 是 G 的一个生成树。如果 G 是连通的，则对 G 的任意一个顶点 y，u 和 y 之间的距离等于 $D(y)$，这与在 T 中 u 和 y 之间的距离是相等的。*

证明： BF-算法只是构造生成树一般算法的一种特殊执行方式，因此，根据定理 11.7.1，G 是连通的，当且仅当最终的图 $T=(U, F)$ 是一个生成树。

现在假设 G 是连通的，则在算法结束时，$T=(U, F)$ 是 G 的一个生成树。在算法中我们应该明确：$D(y)$ 等于树 T 中 u 和 y 之间的距离，在平凡情况下，$D(u)=0$ 代表在 G 中 u 到自身的距离。假如存在某个顶点 y，使得 $D(y)=l$ 大于在 G 中 u 和 y 之间的距离 k，那么我们可以假设 k 是具有这种性质的最小的数，于是，G 中存在一个连接 u 和 y 的路径

$$\gamma:\ u=x_0-x_1-\cdots-x_{k-1}-x_k=y$$

其长度 k 满足

$$k<l=D(y)$$

由于 u 与 γ 中的顶点 x_{k-1} 之间的距离最大是 $k-1$，从而，由 k 是最小的数，有 $D(x_{k-1})\leqslant$

⊖ 数 $D(x)$ 取决于根 u 的选择，不然的话，它也仅取决于 G，而与根植于 u 的特定的 BFS-树无关。数 $bf(x)$ 则确实与 BFS-树有关。

$k-1$。又因为 $y=x_k$ 与 x_{k-1}邻接，根据 *BF*-算法，应令$D(y)=k$，除非$D(y)$已被指定了一个更小的数，所以$D(y)\leqslant k<l$，矛盾。因此，函数 D 给出了 G 中(和 T 中)从 u 到每个顶点的距离。 □

例　完全图 K_n 的任意一个 BFS-树是一个星$K_{1,n}$。在图 11-32 中，左边那个长度为 6 的圈的一个 BFS-树是右边那个树。在图 11-33 中，给出了以三维立方图(回忆 11.4 节:该图的顶点是由 0 和 1 所构成的三元组,且两个顶点邻接,当且仅当它们恰有一个坐标不同)的顶点和边构成的图 Q_3 的一个 BFS-树。在每种情形下，广度优先数都标在了树中顶点的旁边，这些距离$D(x)$也就很容易确定。 □

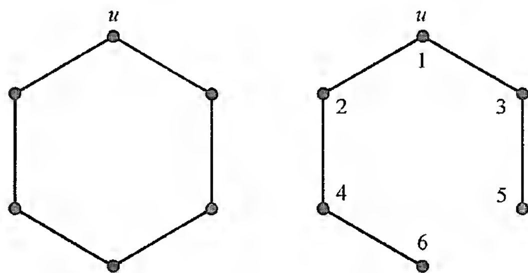


图　11-32

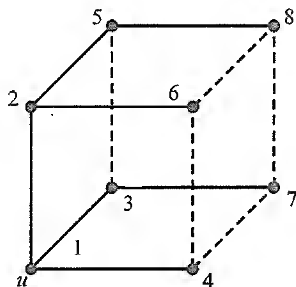


图　11-33

连通图 G 的根植于u 的广度优先生成树是一个尽可能“宽广”的生成树，即：每个顶点在 G 允许的条件下尽量离根最近。求 BFS-树的算法可以看作是一种不重复地搜索(或列举)G 的所有顶点的系统方法。根据这种算法，人们首先访问离根最近的顶点(广度优先于深度)。下面给出构造生成树算法的另外一种执行方式：产生一个尽可能深的生成树。由这种算法产生的生成树叫做根植于 u 的深度优先生成树，简记为 DFS-树，在这种情况下，深度优先于广度。在该算法中，我们对每个顶点 x 附加一个数，称为它的深度优先数，并记为$df(x)$。深度优先算法也叫做回溯算法，在回溯算法中，你要尽可能朝着向前的方向走；当不能再向前走时，你要后退到第一个顶点，并从这里可以再往前走。

DF 算法：构造根植于 u 的 DFS-树

设$G=(V, E)$是一个 n 阶图，u 是它的任意一个顶点。

ⅰ) 令 $i=1$，$U=\{u\}$，$df(u)=1$，$F=\varnothing$和$T=(U, F)$。

ⅱ) 如果 G 中已没有连接U 中的一个顶点x 和非 U 中的一个顶点y 的边时，则算法停止。否则，确定一条边$\alpha=\{x, y\}$，其中 x 属于U，而 y 不属于U，使得 x 具有最大的深度优先数$df(x)$，并执行：

a)令$df(y)=i+1$。

b)将顶点 y 放入 U。

c)将边 $\alpha=\{x, y\}$放入 F。

d)令$T=(U, F)$。

e)i 值增 1 并返回到ⅱ)。

定理 11.7.3　设$G=(V, E)$是图，u 是G 的任一顶点，则 G 是连通的，当且仅当通过上述 DF-算法构造的图$T=(U, F)$是 G 的一个生成树。

证明：DF-算法只是构造生成树一般算法中的一种特殊执行方式，因此，根据定理 11.7.1，G 是连通的，当且仅当最终的图$T=(U\ ,\ F)$是一个生成树。 □

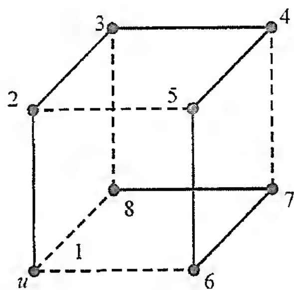


图 11-34

例 完全图 K_n 的任意一个 DFS-树是一条路径。任何长度的圈的 DFS-树也是一条路径。在图 11-34 中，给出了以三维立方图的顶点和边构成的图 Q_3 的一个 DFS-树。在每种情形下，深度优先数都标在了树中顶点的旁边。 □

例 如果 G 是树，则它的任意一个 BFS-树和 DFS-树都是它本身，其顶点的次序是它们被访问的次序，在这种情况下，人们通常把它们分别说成是对 G 的*广度优先搜索*和对 G 的*深度优先搜索*。树 G 可以代表计算机文件中的一种数据结构，在这种结构中，信息存放在相应于 G 中顶点的位置上，为了找到一条特定的信息，人们需要“搜索”树的每一个顶点，直到找到所需要的信息为止。无论是广度优先搜索还是深度优先搜索，都提供了搜索每个顶点至多一次的算法，如果我们把一个树看成是连接各个城市的公路系统，那么，对 G 的深度优先搜索可以想象成沿着 G 的边行走，每个顶点至少被访问一次[㊀]。我们从根 u 出发，尽可能向前走，直到发现一个顶点，从该顶点可以继续再向前走时才往回走。图 11-35 给出了这样一条途径，在那里，我们已经返回到根 u（所以该途径是一条闭途径，我们经过每条边恰好两次）。 □

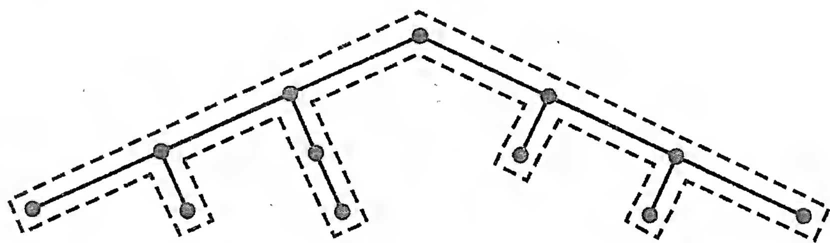


图 11-35

根据定理 11.7.2，由广度优先算法起始于一个顶点 u 计算出来的数$D(x)$等于连通图中从 u 到x 的距离，但是，在模拟各种实际情况的图中，某些边要比其他边“昂贵”一些，一个边可能代表连接两个城市之间的路，如果要这个图提供一个准确的模型，则两个城市之间的实际距离就要考虑在内。一条边也可能代表两个城市之间一条潜在的新路，那么修建这条路的费用就必须考虑在内。这两种情形促使我们考虑：在一个图的每条边上附加一个权[㊁]。

设$G=(V\ ,\ E)$是图，对其每条边$\alpha=\{x,y\}$，存在一个与其相关的非负的数$c(\alpha)=c\{x\ ,\ y\}$，称其为该边的*权*，我们称带有权函数 c 的图G 为一个*赋权图*(weighted graph)。G 中一个途径

$$\gamma:\{x_0,x_1\},\{x_1,x_2\},\cdots,\{x_{k-1},x_k\}$$

㊀ 但我们对每个顶点的搜索只发生在第一次访问它的时候。

㊁ 权的物理意义与我们所解决的数学问题没有关系，但是，权的物理意义往往会导致所获数学结果的重要应用。

的权定义为

$$c(\gamma)=c\{x_0,x_1\}+c\{x_1,x_2\}+\cdots+c\{x_{k-1},x_k\}$$

即 γ 中的边权之和。G 中一对顶点 x 和 y 之间的赋权距离(weighted-distance)$d_c(x, y)$是所有连接 x 和 y 的途径中的最小权，如果 x 和 y 之间没有途径，则规定$d_c(x, y)=\infty$。对每个顶点 x，我们也规定$d_c(x, x)=0$。因为所有的权都是非负的，所以，如果$d_c(x, y)\neq\infty$，则必存在一个权为$d_c(x, y)$的路径，连接不同的顶点对 x 和y。我们下面来说明如何从连通图 G 中的一个顶点u 开始，对每个顶点 x，计算出$d_c(u, x)$，以及如何构造一个其根植于 u 的生成树，使得 u 与每个顶点x 之间的赋权距离等于$d_c(u, x)$。我们称这样的一个生成树为 u 的距离树。下面给出的算法通常叫做 Dijkstra 算法[⊖]，该算法被认为是 BF-算法的赋权化。

求 u 的距离树算法

设$G=(V, E)$是一个 n 阶赋权图，u 是它的任意一个顶点。

ⅰ) 令$U=\{u\}$，$D(u)=0$，$F=\varnothing$和$T=(U,F)$。

ⅱ) 如果 G 中已没有连接U 中的一个顶点x 和非 U 中的一个顶点y 的边时，则算法停止。否则，确定一条边$\alpha=\{x, y\}$，其中 x 属于U，而 y 不属于U，使得$D(x)+c\{x, y\}$尽可能小，并执行:

a)将顶点 y 放入U。

b)将边$\alpha=\{x, y\}$放入 F。

c)令$D(y)=D(x)+c\{x, y\}$，并返回到ⅱ)。

定理 11.7.4 设$G=(V, E)$是一个赋权图，u 是G 的任一顶点，则 G 是连通的，当且仅当通过上述算法构造出的图$T=(U, F)$是 G 的一个生成树。如果 G 是连通的，则对 G 的任意一个顶点y，u 和y 之间的距离等于$D(y)$，这和赋权树 T 中u 和y 之间的距离是相同的。

证明: 求距离树的算法只是构造生成树一般算法中的一种特殊执行方式，因此，根据定理 11.7.1，G 是连通的，当且仅当最终的图$T=(U, F)$是一个生成树，即，当且仅当 U 的最终结果是V。

现在假设 G 是连通的，所以在算法结束时，$U=V$，且$T=(U, F)$是 G 的一个生成树。在算法中我们应该明确: $D(y)$等于树 T 中 u 和 y之间的距离，在平凡情况下，$D(u)=0$代表 G 中u 到自身的距离。假如结论不成立，则存在某个顶点 y，使得$D(y)$大于 G 中u 和y之间的距离d，那么我们可以假设 y 是具有这种性质且是第一个被放入 U 中的顶点。于是，G 中存在一条连接u 和y 的路径

$$\gamma: u=x_0-x_1-\cdots-x_k=y$$

它的权为$d<D(y)$。设 x_j 是在y 之前放入U 中的γ 的最后一个顶点(因为 u 是第一个放入U 中的顶点,所以 x_j 是存在的)，则根据我们对 y 的选择，$D(x_j)$等于 G 中从u 到x_j 的赋权

⊖ E.W.Dijkstra: A note on two problems in connection with graphs, *Numerische Math.*, 1(1959), 285-292。

距离。所以 γ 的子路径

$$\gamma': u = x_0 - x_1 - \cdots - x_j - x_{j+1}$$

具有权$D(x_j) + c\{x_j, x_{j+1}\}$，其中

$$D(x_j) + c\{x_j, x_{j+1}\} \leqslant d < D(y)$$

因此，根据算法，x_{j+1}是在 y 之前放入 U 中的，这与我们对 x_j 的选择矛盾，这个矛盾意味着对所有顶点 y，$D(y)$是 u 和 y 之间的赋权距离。 □

例　设 G 是图 11-36 中所示的赋权图，其中，每个边旁边的数字代表该边的权，如果执行算法求 u 的一个距离树，则得到的树如图 11-37 所示，所选顶点和边的顺序分别为：

$$\text{顶点}: a, b, d, c, e, f$$

$$\text{边}: \{a,b\}, \{b,d\}, \{a,c\}, \{d,e\}, \{c,f\}$$

□

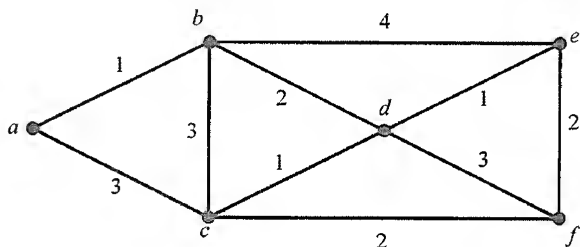


图　11-36

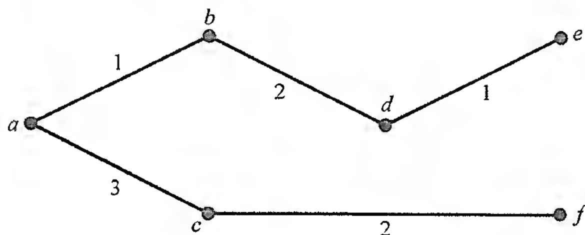


图　11-37

最后，我们通过讨论另外一个实际问题——最小连接问题(minimum connector problem),来结束本节内容。下面的例子说明了该问题的实用性。

例　有 n 个城市A_1，A_2，…，A_n，要在这些城市之间修建一些公路，使得任意一个城市都能从其他城市到达，在 A_i 和A_j 之间修建一条直达公路的费用预计为$c\{A_i, A_j\}$，为使总修建费用最少，确定应在哪些城市之间修建直达公路。

因为我们要使总修建费用最少，所以该问题的解对应于：在具有顶点 A_1，A_2，…，A_n 的树㊀中，两个顶点 A_i 和A_j 之间有边，当且仅当 A_i 和A_j 之间修建一条直达公路。事实上，在该问题中，如果考虑有 n 个顶点A_1，A_2，…，A_n 的完全图K_n，用修建费用给它的边赋权，于是，我们是要寻找一个边权之和尽可能小的生成树。在以下内容中，我们给出了两个算法，用来求解赋权连通图的“最小权生成树问题”。 □

设$G = (V, E)$是一个赋权连通图，其权函数为 c，我们定义 G 的一个子图H 的权为H 的边权之和

$$c(H) = \sum_{\{\alpha\text{是}H\text{的边}\}} c(\alpha)$$

在 G 的所有生成树中，权最小的生成树叫做 G 的最小权生成树。如果 G 的所有边权都相同，则 G 的任意一棵生成树都是最小权生成树。对任意给定的连通图，通过适当地指定它

㊀　如果没有树，我们可以在不破坏连通性的前提下，删去一条或多条公路，以减少费用。

的边权，我们都可以使它的任意一棵生成树成为唯一的一棵最小权生成树。现在给出一个叫做 Kruskal 的算法[⊖]，该算法也叫 greedy（贪婪）算法，因为在算法中每一阶段，我们总是选择一条符合算法要求的权最小的边，使得当算法结束时，所选的边就是一棵生成树的全部边，这里的符合算法要求是指：不能选择构成圈的边。

求最小权生成树的贪婪算法

设$G=(V,E)$是一个赋权连通图，其权函数为 c。

ⅰ）令 $F=\varnothing$。

ⅱ）当存在一条不属于 F 的边α，使得$F\cup\{\alpha\}$中不含 G 中的圈时，确定这样的一条权最小的边 α，并将它放入 F 中。

ⅲ）令$T=(V,F)$。

定理 11.7.5 设$G=(V,E)$是一个赋权连通图，其权函数为 c，则上述贪婪算法构造了 G 的一个最小权生成树$T=(V,F)$。

证明：在贪婪算法中，我们从$n=|V|$个顶点、没有边（初始时 $F=\varnothing$）开始，也即从一个有 n 个连通分图的生成图(V,F)开始。选择一条不产生圈的边 α，意味着 α 连接(V,F)中不同分图的顶点，所以，将 α 放入F 中，就使(V,F)连通分图的数目减少 1。当算法结束时，F 中有$n-1$条边，因此，$T=(V,F)$是一棵生成树。我们下面证明 T 是一棵最小费用的生成树。

设 F 中$n-1$条边的放入顺序是 α_1，α_2，…，α_{n-1}，令$T^*=(V,F^*)$是一棵最小权生成树，且是与 T 有着最多共同边的生成树，即：不存在比 F^* 与 F 的共同边还多的最小权生成树，如果我们能证明 $F^*=F$，则 T 就是一棵最小权生成树。假如不然，即 $F^*\neq F$，设 α_k 是F 中第一个不是F^* 中的边，则边 α_1，α_2，…，α_{k-1}均属于 F^*，由定理 11.5.8，T^* 中存在一条边 β，使得加入边 α_k、并去掉边 β 后，所得的图 T^{**}是 G 的一棵生成树。β 是通过向 T^* 中加入边 α_k 后所产生的圈中的一条边；因为 T 是树，该圈中至少有一条边不属于 T，因此我们选择这样的一条边 β，有

$$c(T^{**})=c(T^*)-c(\beta)+c(\alpha_k) \tag{11-8}$$

因为 T^*是一棵最小权生成树，所以有

$$c(\alpha_k)\geqslant c(\beta) \tag{11-9}$$

又因为$L=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1},\beta\}$是 T^* 中边的子集，所以，不可能存在一个圈，使其所有的边均在 L 中，因此，用贪婪算法确定要向 F 中加入第k 条边时，β 是一个合理的选择。由式(11-9)有

$$c(\alpha_k)=c(\beta)$$

⊖ J.B.Kruskal, Jr.: On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7(1956), 48-50。

再由定理 11.7.5，T^{**} 也是一个最小权生成树。因为 T^{**} 与 T 比 T^* 与 T 多 1 条共同边[㊀]，这与我们对 T^* 的选择矛盾，所以定理得证。 □

例 设 G 是一个 7 阶赋权图，如图 11-38 所示，其中边旁边的数是边的权。在应用贪婪算法确定 G 的一个最小权生成树时，我们对下一条边经常有多种选择方法，下面就是一种应用贪婪算法对图 11-38 中赋权图的边的选择方法，其边的顺序为

$$\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{d,g\},\{e,g\},\{a,g\}$$

所得生成树 T 的权为

$$C(T)=1+1+2+3+4+4=15$$

注意，用该算法构造树 T 的方法与以前所用的方法是不同的。 □

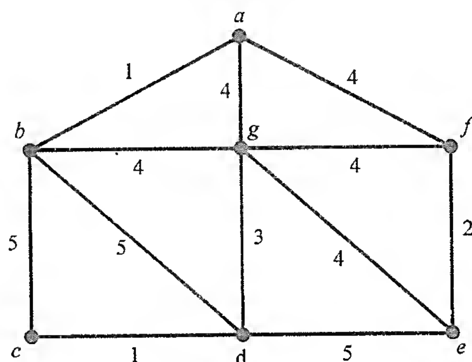


图 11-38

执行贪婪算法最好的方法是：按从权最小到最大的次序安排边的顺序，并反复选择不产生圈的第一条边[㊁]。贪婪算法的一个缺陷是：当一个新边产生圈时，你必须能够认得出，从而不要选它。Prim[㊂]通过说明如何构造一个最小权生成树，对贪婪算法进行了修改，因此该算法就不必涉及圈的问题。

求最小权生成树的 Prim 算法

设$G=(V, E)$是一个赋权连通图，其权函数为 c，并设 u 是G 的任意一个顶点。

ⅰ）令 $i=1$，$U_1=\{u\}$，$F_1=\varnothing$和 $T_1=(U_1, F_1)$。

ⅱ）对 $i=1, 2, \cdots, n-1$，执行：

a)找出一个权最小的边 $\alpha_i=\{x, y\}$，使得 x 在U_i 中，而 y 不在U_i 中。

b)令$U_{i+1}=U_i\cup\{y\}$，$F_{i+1}=F_i\cup\{\alpha_{i+1}\}$及 $T_{i+1}=(U_{i+1},F_{i+1})$。

c)i 值增 1。

ⅲ）输出 $T_{n-1}=(U_{n-1}, F_{n-1})$（这里 $U_{n-1}=V$)。

定理 11.7.6 设 $G=(V, E)$是一个赋权图，其权函数为 c，则 Prim 算法构造了 G 的一个最小权生成树$T=(V, F)$。

证明：该定理的证明方法类似于定理 11.7.5 的证明，我们在证明中也使用相同的记号，并且也只进行简要的证明。在算法的每一个阶段结束时，得到一个 G 的顶点子集上的树，定理断言：在算法结束时，$T=T_{n-1}=(V,F_{n-1})$是一个最小权生成树。在 G 的所有最小权生成树中，设$T^*=(V, F^*)$是其中的一个，使得 k 是边α_1，α_2，⋯，α_{k-1}属于 T^* 的最大数。如果 $k\neq n$，即 $T^*\neq T$，则 α_k 不在F^*中，这时 α_k 连接U_k中的一个顶点和它的补集$\overline{U}_k$中的一个顶点。因为 T^* 是生成树，所以 T^* 中存在一条边 β，它连接 U_k 中的一个顶点和$\overline{U}_k$中的一个顶点，使得通过向 T^* 中加入边α_k并去掉边β后，得到一个生

㊀ 即边 α_k。

㊁ 这是算法贪婪的特性。

㊂ R.C.Prim：Shortest connection networks and some generalizations，*Bell Systems Tech. J.*，36(1957)，1389-1401。

成树 T^{**}，我们有 $c(\beta)\leqslant c(\alpha_k)$。又因为在所有连接 U_k 的一个顶点和 $\overline{U}_k$ 的一个顶点的边中，α_k 具有最小权，由此得 $c(\beta)=c(\alpha_k)$，且 T^{**} 是一个最小权生成树，它与 T 又多了一条共同的边。 □

例　在图 11-38 中，我们对赋权图 G 应用 Prim 算法，初始顶点为 a。该算法的一种执行方式所产生的边(以它们被选择的次序)是：

$$\{a,b\},\{a,f\},\{f,e\},\{e,g\},\{g,d\},\{d,c\}$$

这是一个权为 15 的生成树。Prim 算法与贪婪算法相比，其优越性在于：在每一步，我们只需确定一条权最小的边，它连接一个已经到达的顶点和一个还没有到达的顶点。相比之下，该算法自动避免了圈的产生，而贪婪算法则必须要明确地加以避免。 □

11.8　练习题

1. 有多少个不同构的 1 阶图？2 阶图？3 阶图？解释为什么上述问题的答案对一般图而言都是∞。
2. 确定 4 阶图中所有 11 个不同构的图，并对其中的每一个给出平面图形的表示。
3. 是否存在一个度序列为(4,4,3,2,2)的 5 阶图？
4. 是否存在一个度序列为(4,4,4,2,2)的 5 阶图？如果是多重图呢？
5. 利用鸽巢原理证明：$n\geqslant 2$ 阶的图中总有两个度数相同的顶点。对多重图而言结论是否成立？
6. 设 $(d_1, d_2,\cdots,d_n)$ 是 n 个非负偶数组成的序列，证明：存在一个一般图，使得上述序列为其度序列。
7. 设 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是 n 个非负整数组成的序列，其和 $d_1+d_2+\cdots+d_n$ 是偶数，证明：存在一个一般图，使得上述序列为其度序列。设计一个算法，来构造这样一个一般图。
8. 设 G 是图，其度序列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$。证明：对每个 k，$0<k<n$，有：

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}$$

9. 画一个连通图，使其度序列为：

$$(5,4,3,3,3,3,3,2,2)$$

10. 证明：任意两个具有度序列 $(2,2,\cdots,2)$ 的 n 阶连通图是同构的。
11. 在图 11-39 中，确定哪些一般图是同构的，如果有，找出它们之间的一个同构。
12. 在图 11-40 中，确定哪些多重图是同构的，如果有，找出它们之间的一个同构。
13. 证明：在一般图中，如果有一条途径连接两个顶点，则必有一条路径连

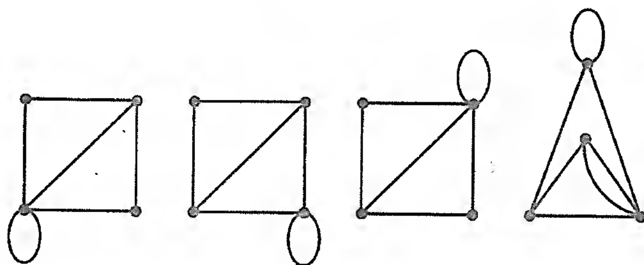


图　11-39

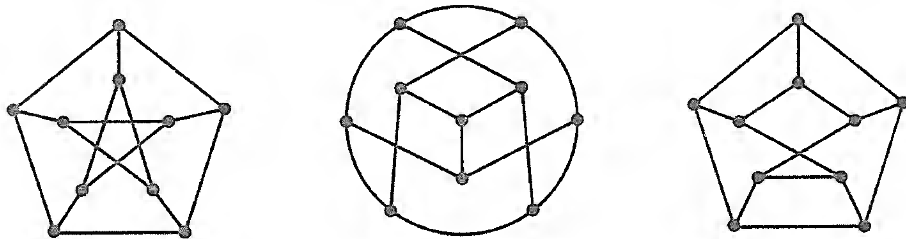


图 11-40

接它们。

14. 设 x 和 y 是一般图中的两个顶点，假如有一条闭途径包含 x 和 y，是否必有一条闭迹包含 x 和 y?

15. 设 x 和 y 是一般图中的两个顶点，并设有一条闭迹包含 x 和 y，是否必有一个圈包含 x 和 y?

16. 设 G 是一个 6 阶连通图，其度序列为(2,2,2,2,2,2)。

    ⅰ) 求 G 的所有不同构的导出子图。

    ⅱ) 求 G 的所有不同构的生成子图。

    ⅲ) 求 G 的所有不同构的 6 阶子图。

17. 首先，证明任意两个具有度序列(4,4,4)的 3 阶多重图 G 是同构的，然后：

    ⅰ) 求 G 的所有不同构的导出子图。

    ⅱ) 求 G 的所有不同构的生成子图。

    ⅲ) 求 G 的所有不同构的 3 阶子图。

18. 设 γ 是一般图中连接顶点 x 和 y 的一个迹，证明 γ 的边可以被划分，使一部分边确定一条连接 x 和 y 的路径，其他边确定的是圈。

19. 设 G 是一般图，G' 是通过从 G 中去掉所有环和重边中所有重复的边后所生成的图，证明 G 是连通的，当且仅当 G' 是连通的，并证明 G 是平面图，当且仅当 G' 是平面图。

20. 证明：至少有 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ 条边的 n 阶图必是连通的，给出一个减少一条边后的 n 阶不连通图的例子。

21. 设 G 是一个恰好有两个奇度顶点 x 和 y 的一般图，G^* 是通过向 G 中加入一条连接 x 和 y 的新边 $\{x,y\}$ 后得到的图，证明：G 是连通的，当且仅当 G^* 是连通的。

22. (本题及下面的两个题是定理 11.1.3 的证明)设 $G=(V,E)$ 是个一般图，如果 x 和 y 都在 V 中，则用 $x\sim y$ 来表示：要么 $x=y$，要么 x 和 y 之间有一条途径。证明对所有顶点 x、y 和 z 有：

    ⅰ) $x\sim x$。

    ⅱ) $x\sim y$，当且仅当 $y\sim x$。

    ⅲ) 如果 $x\sim y$ 且 $y\sim z$，则 $x\sim z$。

23. (续 22 题)对每个顶点 x，令

$$C(x)=\{z:x\sim z\}$$

    证明：

    ⅰ) 对所有顶点 x 和 y，要么 $C(x)=C(y)$，要么 $C(x)\cap C(y)=\varnothing$，换句话说，集合

$C(x)$和$C(y)$没有交，除非它们相等。

ⅱ)如果$C(x)\cap C(y)=\varnothing$，则不存在连接$C(x)$中的一个顶点和$C(y)$中的一个顶点的边。

24. (续23题) 设V_1，V_2，…，V_k是形如$C(x)$的不同集合，证明：

ⅰ)V_1，V_2，…，V_k构成G的顶点集V的一个划分。

ⅱ)由V_1，V_2，…，V_k分别导出的G的一般子图$G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),\cdots,G_k=(V_k,E_k)$是连通的。

导出子图G_1，G_2，…，G_k是G的连通分支。

25. 证明定理11.1.4。

26. 求图11-39中第一个和第二个一般图的邻接矩阵。

27. 求图11-40中第一个和第二个多重图的邻接矩阵。

28. 设A和B是两个$n\times n$矩阵，它们的元素分别用a_{ij}和b_{ij}表示$(1\leqslant i,j\leqslant n)$，定义乘积$A\times B$是一个矩阵$C$，其第$i$行第$j$列元素$c_{ij}$由下式给出

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n)$$

如果k是一个正整数，定义

$$A^k=A\times A\times\cdots\times A\qquad(k\text{个}A)$$

现在假设A表示具有顶点a_1，a_2，…，a_n的n阶一般图的邻接矩阵，证明：A^k的第i行第j列元素等于G中连接顶点a_i和a_j的长度为k的途径数。

29. 确定图11-41中的多重图是否具有欧拉迹(闭的或开的)，如果有，利用我们的算法构造之。

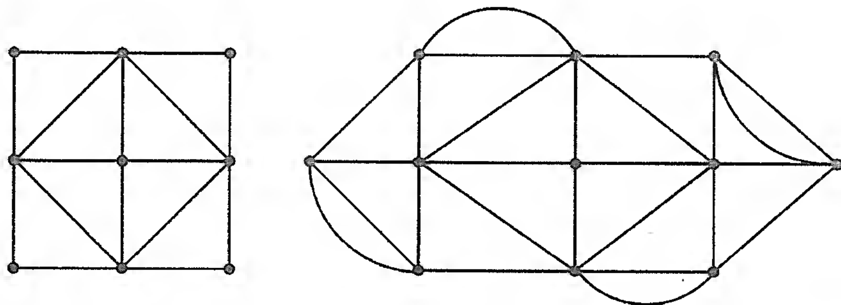


图 11-41

30. 什么样的完全图K_n具有闭欧拉迹？开欧拉迹？

31. 证明定理11.2.4。

32. GraphBuster(小鬼图)的边最少可以划分成多少个开迹？

33. 说明怎样才能以最少的次数将笔移离纸张，而画出平面图11-15、图11-16和图11-17中的图形。

34. 求所有具有闭欧拉迹的、不超过6阶的、不同构的图。

35. 说明怎样才能以最少的次数将笔移开纸张，而画出图11-18所示的正则十二面体的图形。

36. 设G是一个连通图，γ是包含G的每条边至少一次的闭途径，G^*是通过对G的每条

边的重数从 1 增加到该边在 γ 中出现的次数后得到的图，证明：γ 在 G^* 中是一条闭欧拉迹。反之，假如我们增加 G 中某些边的重数，能得到一个顶点度数均为偶数的、m 条边的多重图，证明：G 中存在一条长度为 m 的闭途径，该途径中包含 G 的每条边至少一次。本习题说明：关于 G 的中国邮递员问题，等价于确定需向 G 中加入重复边的最少个数，而得到一个所有顶点度数均为偶数的多重图。

37. 对完全图 K_6 求解中国邮递员问题。
38. 对从 K_6 中去掉任意一条边后得到的图求解中国邮递员问题。
39. 如果一个图中每个顶点的度数均为 3，则称该图为一个*立方图*，K_4 是一个最小的立方图实例，找出一个连通的立方图实例，其中不存在哈密尔顿路径。

*40. 设 G 是一个至少具有

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$$

条边的 n 阶图，证明 G 中存在哈密尔顿圈。给出一个减少一条边后的 n 阶图，其中不存在哈密尔顿圈。

41. 设 n 是大于等于 3 的整数，G_n 是这样的一个图：其顶点是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $n!$ 个排列，其中，两个排列之间有一条边连接，当且仅当一个排列可以通过另一个排列交换两个数的位置(任意一种交换)而得到。根据 4.1 节的结果，推导 G_n 中存在哈密尔顿圈。
42. 证明定理 11.3.4。
43. 设计一个类似于求哈密尔顿圈的算法：在满足定理 11.3.4 所给定条件的图中构造一条哈密尔顿路径。
44. 哪些二分图 $K_{m,n}$ 中存在哈密尔顿圈？哪些存在哈密尔顿路径？
45. 证明：一个多重图是二分的，当且仅当它的每一个连通分图是二分的。
46. 证明：$K_{m,n}$ 和 $K_{n,m}$ 是同构的。
47. 证明：具有奇数个顶点的二分多重图中不存在哈密尔顿圈。
48. GraphBuster 图是一个二分图吗？如果是，找出其顶点的一个二分划。如果去掉环后又如何呢？
49. 设 $V=\{1,2,\cdots,20\}$ 是前 20 个正整数的集合，考虑一个图，其顶点集是 V，其边集的定义分别为后面的 ⅰ)～ⅵ)。对其中的每一个图考察：a)是不是连通的(如果不是,求其连通分支)，b)是不是二分的，c)是否存在欧拉迹和 d) 是否存在哈密尔顿路径。
    ⅰ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a+b$ 是偶数。
    ⅱ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a+b$ 是奇数。
    ⅲ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a\times b$ 是偶数。
    ⅳ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a\times b$ 是奇数。
    ⅴ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a\times b$ 是一个全平方数。
    ⅵ) $\{a,b\}$ 是边，当且仅当 $a-b$ 能被 3 整除。
50. 从 K_5 中最少能去掉几条边，就可以使剩下的图是一个二分图？
51. 在下面尺寸的棋盘上，求一个骑士周游：
    ⅰ) 5×5

ⅱ) 6×6

ⅲ) 7×7

*52. 证明：在一个4×4的棋盘上，不存在骑士周游。

53. 证明：一个图是树，当且仅当这个图中不包含任何圈，但当加入任意一条新边时，恰好产生一个圈。

54. 什么样的树中存在欧拉路径？

55. 什么样的树中存在哈密尔顿路径？

56. 构造所有不同构的7阶树。

57. 设$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是整数的序列，

ⅰ) 证明：存在这样一个度序列的n阶树，当且仅当d_1，d_2，…，d_n是正整数，且和：$d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n-1)$。

ⅱ) 写出一个算法，起始于正整数的序列$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，构造一个以该序列为度序列的树，或给出不可能实现的结论。

58. 森林是一个图，其任意一个连通分支都是树。特别地，一个树是森林。证明：一个图是森林，当且仅当它不包含任何圈。

59. 证明：从一个树中去掉一条边，剩下一个具有两个树的森林。

60. 设G是一个具有k个树的森林，最少需要向G中加入多少条边，才能得到一个树？

61. 求GraphBuster图的一个生成树。

62. 证明：如果树中有一个顶点的度数是p，则它至少有p个悬挂顶点。

63. 求图11-15、图11-16和图11-17的生成树。

64. 对任意整数$n\geqslant 3$和任意整数k，$2\leqslant k\leqslant n-1$，构造一个恰有$k$个悬挂顶点的$n$阶树。

65. 利用11.5节中求生成树的算法，构造一个十二面体图的生成树。

66. 具有n个顶点、n条边的连通图中有多少个圈？

67. 设G是一个n阶图，它不一定是连通的，森林的定义见习题58。G的生成森林是一个森林，它是由G的连通分图的每一个生成树所构成的。修改11.5节所给的求生成树的算法，使其能构造G的一个生成森林。

68. 给定图11-42，问Shannon开关游戏在这些图上比赛时是正方游戏、反方游戏还是先方游戏。

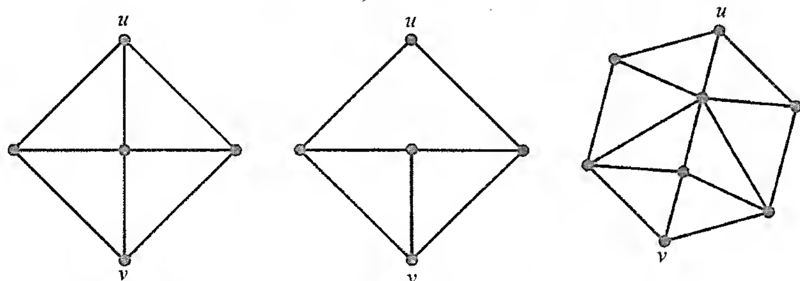


图 11-42

69. 设G是一个连通多重图，G的一个边割是边的集合F，去掉这些边时会使G变成不连通的。一个边割F是极小边割，如果除了F本身外，不存在F的子集是边割。

证明：桥总是一个极小边割，并推断：树的唯一极小边割是由一条边所构成的集合。

70. 设 G 是有一个 k 度顶点的连通多重图，证明：G 有一个极小边割 F，其中 $|F|\leqslant k$ 。

71. 设 F 是连通多重图 $G=(V, E)$ 的一个极小边割，证明：存在 V 的一个子集 U，使得 F 恰好是这样一些边的集合：这些边连接 U 中的一个顶点和 U 的补集 $\overline{U}$ 中的一个顶点。

72. [续 71 题]证明：连通多重图的一个生成树包含每个边割中至少一条边。

73. 利用 11.7 节中构造生成树的算法，构造 GraphBuster 图的一个生成树(注意：GraphBuster 是个一般图，它有环和重数大于 1 的边，环可以忽略，重边只计一条)。

74. 利用构造生成树的算法，构造正则十二面体图的一个生成树。

75. 应用 11.7 节中的 BF-算法，求下列图的 BFS-树；

　ⅰ) 正则十二面体图(根任意)。

　ⅱ) GraphBuster 图(根任意)。

　ⅲ) 边排成一个圈的 n 阶图(根任意)。

　ⅳ) 完全图 K_n (根任意)。

　ⅴ)完全二分图 $K_{m,n}$(一个左顶点的根和一个右顶点的根)。

　在上述各题中，求广度优先数及任意顶点到所选根的距离。

76. 应用 11.7 节中的 DF-算法求习题 75 中ⅰ)，ⅱ)，ⅲ)，ⅳ)和ⅴ)的DFS-树，并求上述各题的深度优先数。

77. 设 G 是简单图，图中有一个连接顶点 u 和 v 的哈密尔顿路径，该哈密尔顿路径是关于 G 的根植于 u 的一个 DFS-树吗？是否可能有其他 DFS-树？

78. (关于树的中国邮递员问题的解)设 G 是一个 n 阶树，证明：包含 G 的每条边至少一次的最短途径的长度是$2(n-1)$，说明用深度优先算法如何找到一个长度为$2(n-1)$的途径，该途径包含每条边恰好两次。

79. 在图 11-43 所示的赋权图中，利用 Dijkstra 算法构造一个关于 u 的距离树，指定的顶点 u 如图所示。

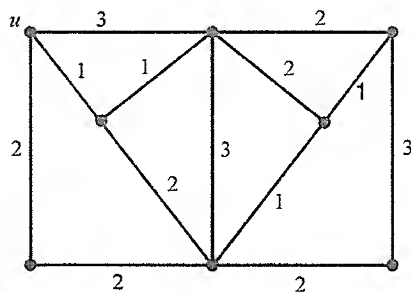


图　11-43

80. 考虑完全图 K_n，其顶点标号分别为 1，2，…，n，其中，对所有的 $i\neq j$，连接两顶点 i 和 j 的边的权为$c\{i,j\}=i+j$ ，对下面的各阶完全图，利用 Dijkstra 算法构造根植于顶点 $u=1$ 的距离树：

　ⅰ) K_4

　ⅱ) K_6

　ⅲ) K_8

81. 考虑完全图 K_n，其顶点标号分别为 1，2，…，n，其中，对所有的 $i\neq j$，权函数$c\{i,j\}=|i-j|$，对下面的各阶完全图，利用 Dijkstra 算法构造根植于顶点 $u=1$ 的距离树：

　ⅰ) K_4

　ⅱ) K_6

　ⅲ) K_8

82. 考虑完全图 K_n，其边的权与习题 80 相同，对下面的完全图，应用贪婪算法求最小权生

成树：

ⅰ）K_4

ⅱ）K_6

ⅲ）K_8

83. 考虑完全图 K_n，其边的权与习题 81 相同，对下面的完全图，应用贪婪算法求最小权生成树：

ⅰ）K_4

ⅱ）K_6

ⅲ）K_8

84. 与习题 82 相同，将贪婪算法改为 Prim 算法。

85. 与习题 83 相同，将贪婪算法改为 Prim 算法。

86. 设 G 是一个赋权连通图，其所有边的权均不相同，证明：图中恰好只存在一棵最小权生成树。

87. 定义毛虫树为具有一条路径 γ 的树 T，满足：T 的每条边或是 γ 的一条边，或它的一个顶点在 γ 上。

ⅰ）验证所有具有 6 个顶点或少于 6 个顶点的树都是毛虫树。

ⅱ）设 T_7 是具有 7 个顶点、3 条长度为 2 的路径交于中心顶点 c 的树，证明 T_7 是 7 个顶点的树中唯一一棵不是毛虫树的树。

ⅲ）证明：一棵树是毛虫树，当且仅当它不含有 T_7 这样的生成子图。

88. 设 d_1，d_2，…，d_n 是正整数，证明：存在一棵度序列为（d_1，d_2，…，d_n）的毛虫树，当且仅当 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n-1)$。并与习题 57 进行比较。

89. 具有顶点集 V、m 条边的图 G 的一个优雅的标记是一个入射函数 g：$V\to\{0, 1, \cdots, m\}$，使得相应于 G 的 m 条边 $\{x, y\}$ 的标记 $|g(x)-g(y)|$ 在某种顺序下为 1，2，…，m。Kotzig 和 Ringel（1964）曾推测过：每棵树都有一个优雅的标记。求练习 87 中 T_7 的一个优雅标记、任一条路径和图 $K_{1,n}$。

90. 验证长度为 5 和 6 的圈不能被优雅标记，然后求长度为 7 和 8 的圈的优雅标记。

第 12 章 有向图及网络

本章我们简要讨论有向图。正如我们在第 11 章所指出的那样，有向图类似于无向图，它们的区别是：在有向图中，边是有方向的，并叫做弧。因此，有向图用来模拟非对称的关系，同理，无向图用来模拟对称的关系。我们将要证明的许多结论都是在无向图中已证明过的直接类似的结论。

网络是带有两个不同顶点 s 和 t 的有向图，其中，每条弧都带有一个非负的权，叫做它的容量。如果把每条弧都想象成一个管道，其中流动着某种物质，弧的容量（比方说）就好比是单位时间内流过该管道的流量，这里，一个重要的问题就是：在所给容量的限制下，找出从“源” s 到“目标” t 的最大可能的流量。对此问题的回答以及随之产生的构造最大流量的算法，是由所谓的*最大流最小割*(max-flow min-cut)*定理*给出来的。之后，我们利用最大流最小割定理给出了另一个基本结论—推论 9.2.4 的证明，即：关于二分图中匹配问题的证明。

12.1 有向图

有向图 $D=(V,A)$ 有一个叫做*顶点*的元素集合 V 和一个叫做*弧*的*有序*顶点对（两顶点可以相同）的集合 A，其中，每条弧的形式为

$$\alpha=(a,b) \tag{12-1}$$

其中，a 和 b 是顶点，我们把弧 α 看作是*离开* a 并*进入* b 的，即从 a *指向* b。

与无向图对比，(a,b)和(b,a)是不同的。今后我们将使用与无向图类似的术语，但这是有区别的，这些术语只用于有向图，而不用于无向图，比如，式(12-1)中的弧 α *具有起始顶点*(initial vertex) $\iota(\alpha)=a$ *和终止顶点*(terminal vertex) $\tau(\alpha)=b$。在有向图中，既可能同时包含弧(a,b)和弧(b,a)，也可能包含形如(a,a)的环，环(a,a)进入和离开的是同一个顶点 a。我们可以将有向图一般化，使其成为允许有多重弧[⊖]的*一般有向图*。画一般有向图的图形与画无向图的图形是一样的，但对有向图，必须在每条边上画个箭头，以表示它的方向。

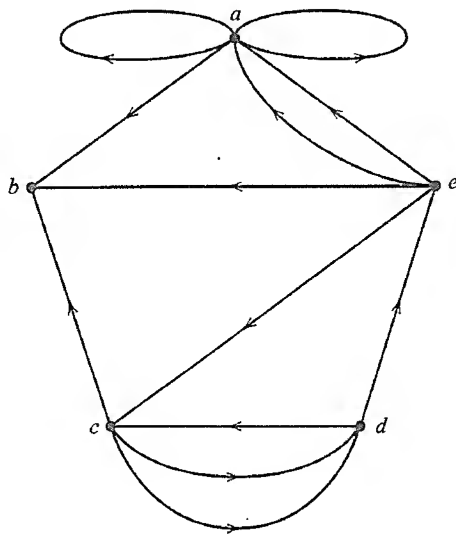


图 12-1

例 图 12-1 给出的是一个一般有向图，而不是一个简单有向图，因为其中某些弧的重数大于 1。 □

⊖ 弧的个数，尽管包括重数在内，应该是有限的。

一般有向图$D=(V,A)$的一个顶点 x 有两种度数。x 的出度是起始于顶点 x 的弧的个数：

$$|\{\alpha \mid \iota(\alpha)=x\}|$$

x 的入度是终止于顶点 x 的弧的个数：

$$|\{\alpha \mid \tau(\alpha)=x\}|$$

环(x,x)对 x 的入度和出度的贡献均为 1。与定理 11.1.1 的证明非常类似，我们建立下面的基本结论。

定理 12.1.1　在一般有向图中，顶点的入度之和等于出度之和，且都等于图中弧的个数。

例　在图 12-1 中给出的一般有向图中，顶点 a，b，c，d，e 的入度分别是

$$4,3,2,2,1$$

它们的出度分别是

$$3,0,3,2,4$$

在两种情况下，和都是 12，都为弧的个数。□

对任意一个一般图$G=(V,E)$，都可以通过对 E 的每条边$\{a,b\}$指定一个方向，即：通过用(a,b)或(b,a)[⊖] 来代替$\{a,b\}$，得到一个一般有向图$D=(V,A)$，这样的有向图 D 叫做 G 的一个定向(orientation)。一个一般图具有很多不同的定向。反之，对给定的一般有向图$D=(V,A)$，我们可以通过去掉其弧的方向，而得到一个一般图$G=(V,E)$，这样的图叫做 G 的基础一般图。一个一般有向图刚好只有一个基础一般图。

例　图 12-2 给出了图 12-1 中一般有向图的基础一般图。□

n 阶完全图K_n 的定向叫做竞赛图，它是任意不同顶点对之间恰好只有一条弧连接的有向图，这条弧有两个可能的方向。一个竞赛图可以被看作是选手们的比赛记录，它记录每个选手在一次循环赛（每两个选手只比赛一次，且没有平局）中战胜过哪些对手。最好的竞赛图[⊜]是那样的一种图，它能把选手按一种次序

$$p_1,p_2,\cdots,p_n$$

排列，使排列中的每个选手都战胜过排在他后面的所有选手，这样的竞赛图叫做可传递竞赛图(transitive tournaments)，在可传递竞赛图中，存在着选手们相容的排列。

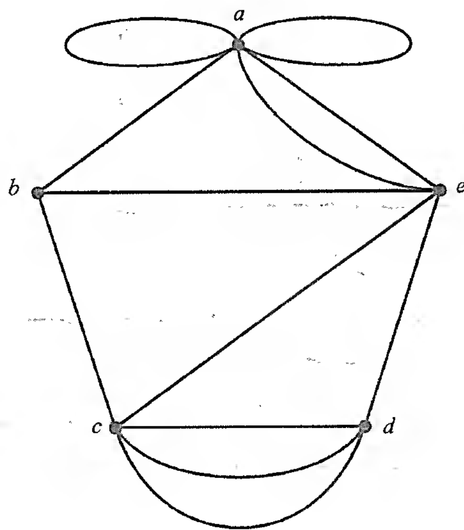


图　12-2

⊖　如果$\{a,b\}$ 的重数大于 1，则$\{a,b\}$中的一些重边可以用(a,b)来代替，其他重边可以用(b,a)来代替。

⊜　这是在选手们比赛完之后从排列的角度看。

我们对一般图中的途径、路径和圈的定义进行修改，以获得与一般有向图中类似的概念。设$D=(V,A)$是一般有向图，形如

$$(x_0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{m-1},x_m) \tag{12-2}$$

的m个弧的序列称为从顶点x_0到x_m的长度为m的有向途径。途径(12-2)的起始顶点是x_0，终止顶点是x_m。当$x_0=x_m$时，有向途径是闭的，否则有向途径是开的。我们也可以把途径(12-2)表示为

$$x_0\to x_1\to x_2\to\cdots\to x_m$$

如果途径中的弧都是不同的，则称该途径是有向迹；如果有向迹中的顶点也都不相同($x_0=x_m$的情况除外)，则称它为路径[⊖]；封闭的路径叫做有向圈。

例　考虑图12-1中给出的5阶一般有向图，则

$$d\to e\to c\to d\to e$$

是一条有向途径；

$$c\to d\to e\to c\to b$$

是一条有向迹；

$$c\to d\to e\to a\to b$$

是一条路径；

$$c\to d\to e\to c,\ c\to d\to c,\ a\to a$$

中的每一个都是有向圈。□

一般有向图是连通的，如果它的基础一般图是连通的。一般有向图是强连通的，如果对于任意一对不同的顶点a和b，都存在从a到b和从b到a的有向途径[⊜]。如果把一般有向图想象为市区中连接不同区域的单向行驶的公路网，我们看到强连通性意味着：你可以沿着街道指定的方向，从市区的任何一个地方到达其他任何地方。

例　图12-1中给出的有向图是连通的，但它不是强连通的。仅从顶点b的出度为0这一点，就能很容易地发现它不是强连通的，比如，无法从b离开。□

在一般有向图D中，有向迹叫做欧拉迹，如果它包含了D的全部弧。哈密尔顿路径是包含了全部顶点的路径。有向哈密尔顿圈是包含了全部顶点的有向圈。

下面的两个定理是定理11.2.2和定理11.2.3的直接类似，因此，我们省去它们的证明。

定理 12.1.2　设D是一个连通有向图，则D中存在闭的有向欧拉迹，当且仅当其每个顶点的入度都等于它的出度。

定理 12.1.3　设D是一个连通有向图，x和y是D的不同顶点，则D中存在一条从x到y的有向欧拉迹，当且仅当

(i) x的出度比其入度大1；
(ii) y的入度比其出度大1；

⊖ 与途径和圈不同的是，我们使用“路径”而不是“有向路径”。
⊜ 因此，是一条路径。

ⅲ)对任意顶点 $z \neq x, y$, z 的入度与出度相等。

由于Ghouila-Houri[㊀]给出了一个有向哈密尔顿圈存在的充分条件，我们也有一个与定理 11.3.2 直接类似的结论，但是它的证明非常困难，下面只简单地叙述这个定理，在定理中，D 是一个没有环的有向图（也不是一般有向图）[㊁]。

定理 12.1.4　设 D 是一个没有任何环的强连通有向图，如果对任意顶点 x，都有

$$(x \text{ 的入度}) + (x \text{ 的出度}) \geq n$$

则 D 中存在有向哈密尔顿圈。

下面我们来说明：一个竞赛图中总存在哈密尔顿路，也就是说，总能使选手按下面的顺序排列

$$p_1, p_2, \cdots, p_n \tag{12-3}$$

使得 p_1 胜 p_2, p_2 胜 p_3, $\cdots$, p_{n-1} 胜 p_n。由于我们并没有强调每个选手必须胜他后面的所有选手，所以这个排列并不意味着是选手之间相容的排列，实际上，一个竞赛图中甚至可能存在有向哈密尔顿圈，这意味着：排列(12-3)中的每个选手都是第一名！

定理 12.1.5　任意一个竞赛图中存在哈密尔顿路。

证明：设 D 是一个 n 阶竞赛图，令

$$\gamma: x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_p \tag{12-4}$$

是 D 中一条最长的路径，我们通过说明：如果 $p < n$，那么就能找到一条更长的路径，来证明最长的路径(12-4)就是一条哈密尔顿路。假如 $p < n$，使得不在路径(12-4)中的顶点集 U 非空，设 u 是 U 中的任意一个顶点，如果存在一条从 u 到 x_1 或从 x_p 到 u 的弧，那我们就找到了一条更长的路。因此，假设 x_1 和 u 之间的弧以 u 为终止顶点，类似地，假设 x_p 和 u 之间的弧以 u 为起始顶点，由此可得：路 γ 中必存在两个连续的顶点 x_k 和 x_{k+1}，使得 x_k 和 u 之间的弧以 u 为终止顶点，x_{k+1} 与 u 之间的弧以 u 为起始顶点，但这时，

$$x_1 \to \cdots \to x_k \to u \to x_{k+1} \to \cdots \to x_p$$

是一条比 γ 还长的路。我们现在留一个练习题：利用这个证明设计一个在竞赛图中求哈密尔顿路的算法。□

下面通过给出两个具有某种实际意义的定理，来结束这段简短的引言。第一个定理是由 Robbins[㊂]给出的，该定理给出了那些具有强连通定向的一般图的特性，比如，该定理可以告诉没有单行道的城市交通工程师：是否能够(及如何)把所有街道改成单行道，而使人们能从市区中任何一个地方到达另外任何一个地方[㊃]。

定理 12.1.6　设 $G=(V,E)$ 是个连通图，则 G 有一个强连通定向，当且仅当 G 中没有任何桥。

证明：首先，假设 G 有一个桥 α，去掉 α 后，得到一个具有两个连通分支 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$ 的不连通的图。如果规定 α 从 G_1 指向 G_2，那么就不存在从 G_2 的一个

㊀ A. Ghouila-Houri: Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien, *C. R. Acad. Sci.*, 251(1960), 494。

㊁ 从一个顶点到另一个顶点有多于一条的弧，不但对寻找有向哈密尔顿圈没有任何帮助，对寻找任何回路也没有什么帮助。

㊂ H. E. Robbins: A theorem on graphs, with an application to a problem in traffic control, *Amer. Math. Monthly*, 46(1939), 281-283。

㊃ 如果该交通工程师没能获得成功，对他的后果是可想而知的！

顶点到达 G_1 的一个顶点的一条有向途径。如果规定 α 从 G_2 指向 G_1，那么就不存在从 G_1 的一个顶点到达 G_2 的一个顶点的一条有向途径。因此，G 不存在一个强连通定向。

现在假设 G 中没有任何桥，由引理 11.5.3，G 的任意一条边都包含在某个圈中。下面的算法确定了 G 的一个强连通定向。

求无桥连通图的一个强连通定向的算法

设 $G=(V,E)$ 是一个没有桥的连通图。

ⅰ）令 $U=\varnothing$。

ⅱ）找出 G 的一个圈 γ。

a）指定 γ 中边的方向，使其成为一个有向圈。

b）将 γ 中的顶点放入 U。

ⅲ）当 $U\neq V$ 时，

a）找出连接 U 中一个顶点 x 和非 U 中顶点 y 的边 $\alpha=\{x,y\}$。

b）找出一个包含边 α 的圈 γ。

c）指定边 α 的方向从 x 到 y，并继续指定 γ 中边的方向，就好像要使它成为一个有向圈一样，直到到达 U 中的一个顶点 z 为止。

d）将 γ 中从 x 到 z 的顶点全部放入 U。

ⅳ）对还没有指定方向的每一条边指定任意一个方向。

我们注意：在ⅲ)的第b)步中，包含边 $\alpha=\{x,y\}$ 的圈可以通过在去掉边 α 后得到的图中找到一个连接 x 和 y 的路径（比如，一条最短的路径）而得到。我们还应该明确：假如步骤ⅲ）结束，即假如集合 U 确实获得了值 V，则由上述算法得到的有向图就是 G 的一个强连通定向。但如果 $U\neq V$，则由 G 的连通性，必存在一条边 α，连接 U 中一个顶点和非 U 中的一个顶点，又因为 G 中没有桥，由引理 11.5.3，边 α 必包含在某个圈 γ 中。因此，U 的终值必是 V。 □

例（交易问题）[㊀] 设有 n 个交易商 t_1，t_2，…，t_n，他们每人都带着不可分割的商品[㊁]到市场来交易，为简化起见，假定对每个交易商来说，他只能交易到一种商品，除了这个假定之外，商品可以自由地在交易商之间交换。每个交易商都把带到市场的 n 件商品（包括他自己的商品）按照他对商品的偏爱程度进行排列，排列顺序不能有并列的，因此，每个人对商品的排列都是从 1 到 n。市场活动的作用就是要在这 n 个交易商之间重新分配（或交换）商品的所有权，这样的一个交换叫做分配。我们把分配看作是一个一对一的函数

$$\rho:\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\to\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$$

其中，$\rho(t_i)=t_j$ 的意思是：在分配中，交易商 t_i 接受了交易商 t_j 的商品。一个分配 ρ 叫做一个核心分配(core allocation)，如果它满足下面的性质：不存在少于 n 个交易商的子集 S，使得他们在这个子集中交易时，每个人都能获得比他在分配 ρ 中排位还高的商品[㊂]。例如，假设 $n=5$，交易商的偏爱顺序由下表给定：

㊀ 这个例子及其随后的分析中，有一部分内容基于文章："On cores and indivisibility"，由 L. Shapely 和 H. Scarf 发表于 *Studies in Optimization*，(MAA Studies in Mathematics, vol. 10)，1974，Mathematical Association of America, Washington, D. C.，104-123。

㊁ 例如：一辆车或一座房子。

㊂ 换种说法就是：不存在少于 n 个交易商的子集 S 和对他们的一个分配 ρ'，使 S 中的每个交易商 t_i，均有 t_i 对 $\rho'(t_i)$ 的商品排位高于他对 $\rho(t_i)$ 的商品排位。

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	4	3	1	2	5
t_2	4	3	1	2	5
t_3	4	3	5	1	2
t_4	1	4	3	5	2
t_5	4	5	2	1	3

(12-5)

表中第一行给出了 t_1 对商品的排列，因此，t_1 认为 t_3 的商品最有价值，其次的顺序分别为 t_4，t_2，t_1，t_5 的商品，表中其他行的意思是类似的。一种可能的分配 ρ 是

$$\rho(t_1)=t_2,\rho(t_2)=t_3,\rho(t_3)=t_1,\rho(t_4)=t_5,\rho(t_5)=t_4$$

该分配不是一个核心分配，因为

$$\rho'(t_1)=t_4,\rho'(t_4)=t_1$$

对交易商 t_1，t_4 定义了一个分配，在该分配中，他们每人都得到了比他们在分配 ρ 中价值还高的商品。在这个例子中，一个核心分配是 ρ^*：

$$\rho^*(t_1)=t_3,\rho^*(t_2)=t_2,\rho^*(t_3)=t_4,\rho^*(t_4)=t_1,\rho^*(t_5)=t_5$$

是否任何一个交易问题都存在核心分配？在本节剩下的内容中，我们将回答这个问题[㊀]。 □

有向图为交易问题提供了一个方便的数学模型。考虑有向图 $D=(V,A)$，其中的顶点代表 n 个交易商，从每一个顶点向其他顶点画一个弧，包括向它自身也画个弧[㊁]，因此，每个顶点的入度为 n，且出度也为 n，这样的有向图 D 叫做 n 阶完全有向图。对每个顶点 t_i，把 1，2，…，n 标记（或赋权）在离开它的每条弧上，以与 t_i 的偏爱相一致。一个分配相当于把顶点划分成多个有向圈，这句话是下面引理的一个推论，该引理的意思是：从一个集合到它自身的一个一对一的函数，可以被看作是一个有向图，该有向图是由一个或多个没有共同顶点的有向圈所构成的。

引理 12.1.7 设 D 是一个有向图，其中每个顶点的出度至少是 1，则 D 中存在有向圈。

证明： 构造有向圈的算法如下：

求有向圈的算法

设 u 是任意一个顶点。

ⅰ）令 $i=1$ 和 $x_1=u$。

ⅱ）如果 x_i 与已经选过的某个顶点 x_j 相同($j<i$)，则转到ⅳ)，否则转到ⅲ)。

ⅲ）执行：

a）选择一条离开顶点 x_i 的弧(x_i,x_{i+1})

㊀ 以肯定的语气。

㊁ 因此，在每个顶点处都形成一个环。

b) i 值增 1。

c) 转到 ii)。

iv) 输出有向圈

$$x_j \to x_{j+1} \to \cdots \to x_{i-1} \to x_i = x_j$$

因为每个顶点都是至少有一条弧的起始顶点，又由于我们一旦获得了一个重复顶点就马上结束，所以算法输出的确实是一个有向圈。 □

推论 12.1.8 设 X 是 n 个元素的集合，$f: X \to X$ 是一个一对一的函数，$D_f = (X, A_f)$ 是有向图，其弧的集合 A_f 为

$$A_f = \{(x, f(x)) : x \text{ 在 } X \text{ 中}\}$$

则 D_f 的弧可以被划分为有向圈，且每个顶点恰好属于一个有向圈。

证明： 因为函数 f 是一对一的，由鸽巢原理的推论，f 也是映上的。现在由弧集合 A_f 的定义，D_f 的每个顶点的入度和出度均为 1，根据引理 12.1.7，D_f 中存在有向圈 γ。如果每个顶点都是 γ 中的顶点，则在这种情况下，我们的划分只包含一个 γ；否则去掉 γ（包括它的顶点和弧），在剩下的图中，每个顶点的入度和出度仍为 1，继续去掉有向圈，直到用完所有的顶点为止，这就得到了我们所需要的划分。 □

例 对应于上例定义的分配 ρ 和 ρ^* 中，有向图 D_ρ 和 $D_{\rho'}$ 所给出的有向圈划分，分别如图 12-3 和图 12-4 所示。 □

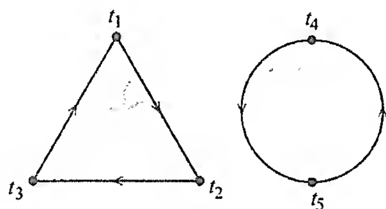


图 12-3

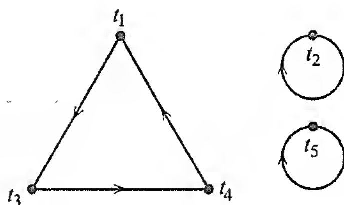


图 12-4

核心分配的存在性问题可以被看作是 9.4 节中所描述的稳定婚姻问题(stable marriage problem)的直接变形，我们现在利用有向图模型来回答核心分配的存在性问题。

定理 12.1.9 任何交易问题都存在一个核心分配。

证明： 该定理的证明说明了如何连续使用引理 12.1.7 证明中所给出的求有向圈的算法，产生一个核心分配。

设交易商的集合为 $V = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，考虑偏爱有向图 $D^1 = (V, A^1)$，其中，从 t_i 到 t_j 存在弧 (t_i, t_j)，当且仅当 t_i 在所有的商品中最喜欢 t_j 的商品。该有向图中每个顶点的出度均为 1，因此，由引理 12.1.7，D^1 中存在一个有向圈 γ_1。令 V^1 是 γ_1 中顶点的集合，设 $D^2 = (V - V^1, A^2)$ 是具有顶点集 $V - V^1$ 的偏爱有向图[⊖]，其中，从 t_i 到 t_j 存在弧 (t_i, t_j)，当且仅当在所有 $V - V^1$ 中交易商的商品中，t_i 最喜欢 t_j 的商品。该有向图 D^2 中每个顶点的出度均为 1，再由引理 12.1.7，我们可以求得一个有向圈 γ_2。令 V^2 是 γ_2 中顶点的集合，并考虑

⊖ 充分注意：D^2 的顶点集只是交易商的子集。

偏爱有向图 $D^3=(V-(V^1\cup V^2),A^3)$，以此类推，分别得到 $k\geqslant 1$ 个具有顶点集 V^1, $V^2,\cdots,V^k$ 的有向圈 $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$，其中，$V^1,V^2,\cdots,V^k$ 是交易商集合 V 的一个划分，圈集 Γ 确定了一个分配 ρ：每个交易商 t_p 恰好是 Γ 中一个有向圈中的顶点，在该有向圈中，存在从 t_p 到某个 t_q 的弧，定义 $\rho(t_p)=t_q$，就得到了一个分配。

下面我们证明分配 ρ 是一个核心分配。设 U 是少于 n 个交易商的任意子集，j 是满足 $U\cap V^j\neq\varnothing$ 的最小整数，则

$$U\subseteq V^j\cup\cdots\cup V^k=V-(V^1\cup\cdots\cup V^{j-1})$$

且 U 是有向图 D^j 中顶点的子集。设 t_s 是 $U\cap V^j$ 中的任意一个交易商，则在分配 ρ 中，t_s 得到的商品是他在 $V-(V^1\cup\cdots\cup V^{j-1})$ 中交易商的商品中排位最高的商品，因而也是 U 中所有交易商的商品中排位最高的商品。所以，在与 U 中成员的交易中，t_s 不能得到比他在 ρ 中排位还高的商品，因此，ρ 是一个核心分配。 □

例 考虑由表（12-5）所确定的交易问题，其偏爱有向图 D^1 如图 12-5 所示，该有向图中恰好只有一个有向圈，即：

$$t_1\rightarrow t_3\rightarrow t_4\rightarrow t_1$$

其偏爱有向图 D^2 如图 12-6 所示，它由两个不相交的有向圈构成，即

$$t_2\rightarrow t_2 \text{ 和 } t_5\rightarrow t_5$$

我们可以剔除其中的任意一个，则另外一个就是偏爱有向图 D^3 ⊖。该问题的一个核心分配是：

$$\rho(t_1)=t_3,\rho(t_3)=t_4,\rho(t_4)=t_1,\rho(t_2)=t_2,\rho(t_5)=t_5$$ □

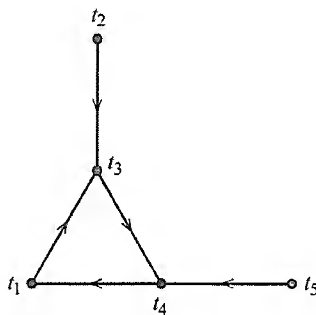


图 12-5

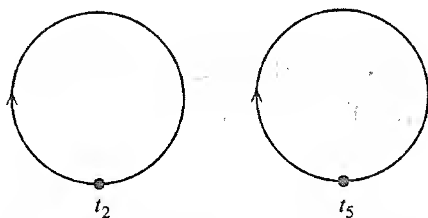


图 12-6

12.2 网络

网络是一个有向图 (V,A)，其中给出了两个特殊的顶点，源 s 和目标 t，这里 $s\neq t$，且在图中，每条弧 α 都有一个非负的权 $c(\alpha)$，叫做该弧的容量，用 $N=(V,A,s,t,c)$ 来表示一个网络。

网络中要处理的一个基本问题就是：在有向图中所给定的弧及其所给定弧的容量的限制下，把一种物质从源移到目标。正式地说，网络 N 中的流(flow)定义为一个函数 f，它为每条弧 α 定义了一个实数 $f(\alpha)$，满足下列条件限制：

⊖ 一般而言，当一个偏爱有向图是由两两互不相交的有向圈构成的话，则由定理 12.1.9 的证明中构造的核心分配 ρ 也就确定了。

(ⅰ)$0\leqslant f(\alpha)\leqslant c(\alpha)$(通过一条弧的流是非负的，且不超过弧的容量)；

(ⅱ)对每个顶点$x\neq s,t$，$\sum_{\iota(\alpha)=x} f(\alpha)=\sum_{\tau(\alpha)=x} f(\alpha)$(对每个不同于源和目标的顶点$x$，进入$x$的流量等于流出$x$的流量)。

为了说明流出源的净流量：

$$\sum_{\iota(\alpha)=s} f(\alpha)-\sum_{\tau(\alpha)=s} f(\alpha) \tag{12-6}$$

等于进入目标的净流量：

$$\sum_{\tau(\alpha)=t} f(\alpha)-\sum_{\iota(\alpha)=t} f(\alpha) \tag{12-7}$$

(其共同值为从源到目标的流量)，我们来证明下面的结论。对任意顶点集U，令

$$\overrightarrow{U}=\{\alpha:\ \iota(\alpha)\text{ 在 }U\text{ 中},\ \tau(\alpha)\text{ 不在 }U\text{ 中}\}$$

和

$$\overleftarrow{U}=\{\alpha:\ \iota(\alpha)\text{ 不在 }U\text{ 中},\ \tau(\alpha)\text{ 在 }U\text{ 中}\}$$

引理 12.2.1　设f是网络$N=(V,A,s,t,c)$中的流，U是包含源s但不包含目标t的顶点集，则

$$\sum_{\alpha\text{在}\overrightarrow{U}\text{中}} f(\alpha)-\sum_{\alpha\text{在}\overleftarrow{U}\text{中}} f(\alpha)=\sum_{\iota(\alpha)=s} f(\alpha)-\sum_{\tau(\alpha)=s} f(\alpha)$$

证明：用两种方法来求下述和式

$$\sum_{x\text{在}U\text{中}}\Big(\sum_{\iota(\alpha)=x} f(\alpha)-\sum_{\tau(\alpha)=x} f(\alpha)\Big) \tag{12-8}$$

的值。一方面，由流的定义知：除了与顶点s有关的项之外，在外层和号中的所有项均为零，因此，和式的值为

$$\sum_{\iota(\alpha)=s} f(\alpha)-\sum_{\tau(\alpha)=s} f(\alpha)$$

可以把表达式 (12-6) 改写成下面的形式

$$\sum_{x\text{在}U\text{中}}\sum_{\iota(\alpha)=x} f(\alpha)-\sum_{x\text{在}U\text{中}}\sum_{\tau(\alpha)=x} f(\alpha)$$

等价于

$$\sum_{\iota(\alpha)\text{在}U\text{中}} f(\alpha)-\sum_{\tau(\alpha)\text{在}U\text{中}} f(\alpha) \tag{12-9}$$

由于起始顶点与终止顶点均在U中的任意一条弧α上，对于和 (12-9) 的净增值是$f(\alpha)-f(\alpha)=0$，因此，和 (12-9) 等于

$$\sum_{\alpha\text{在}\overrightarrow{U}\text{中}} f(\alpha)-\sum_{\alpha\text{在}\overleftarrow{U}\text{中}} f(\alpha)$$

所以，引理 12.2.1 中的等式成立。　□

在引理 12.2.1 中，取$U=V-\{t\}$，则 $\overrightarrow{U}$ 是终止顶点均为t的所有弧的集合，$\overleftarrow{U}$ 是起始顶点均为t的所有弧的集合，因此

$$\sum_{\iota(\alpha)=s} f(\alpha) - \sum_{\tau(\alpha)=s} f(\alpha) = \sum_{\tau(\alpha)=t} f(\alpha) - \sum_{\iota(\alpha)=t} f(\alpha) \qquad (12\text{-}10)$$

在式（12-10）中，两个表达式的共同值叫做流f的值，记为 val（f）。

给定一个网络$N=(V,A,s,t,c)$，N 中的一个流是最大流，如果在 N 的所有流中，它的值最大。最大流的值（流的最大值）等于与网络相关的另外一个量的最小值，我们将仅在容量函数是整数值[⊖]的情况下，来证明这一重要事实。在证明该事实的过程中，我们得到了一个构造最大容量的算法。

网络 $N=(V,A,s,t,c)$中的一个割是弧的集合 C，它满足：从源 s 到目标t 的每条路中，至少包含 C 中的一条弧。割 C 的容量 cap(C)是 C 中所有弧的容量之和。一个割是最小割(minimum cut)，如果它在 N 的所有割中容量最小。

如果 U 是包含s但不包含t 的顶点集，则 $\overrightarrow{U}$ 显然是一个割。一个割是极小割(minimal cut)，如果从 C 中去掉任意一条弧后所得的集合就不再是割了[⊜]（这意味着：对 C 中的每条弧α，都存在一条从 s 到t 的路，该路中包含 α，但不包含 C 中其他的弧）。我们首先证明：任何极小割都是对某个这样的 U 的形如$\overrightarrow{U}$ 的割。这意味着：一个割的最小容量是通过形如 $\overrightarrow{U}$ 的割而得到的。

引理 12.2.2 设 C 是网络$N=(V,A,s,t,c)$中的一个极小割，U 是所有这样的顶点x的集合：从源 s 到x 存在一条路径，该路径不含 C 中的弧，则 $\overrightarrow{U}$ 是割，且$C=\overrightarrow{U}$。

证明：我们注意到：s 在 U 中，这是因为只由顶点 s 构成的路径是一条平凡的路径，该路径中不含 C 中的弧。因为 C 是割，所以目标 t 不在 U 中，从而 $\overrightarrow{U}$ 是割。又因为 $\overrightarrow{U}$ 中的每条弧（x，y）必须都在 C 中，否则将存在一条从 s 到 y 的路：该路不含 U 中的弧，且 y 就会在 U 中。因此 $\overrightarrow{U}\subseteq C$。

现在设$\alpha=(a,b)$是 C 中任意一条弧。因为 C 是一个极小割，所以存在从 s 到 t 的一条路 γ，该路中包含 α，但不含 C 中的其他弧，这意味着：α 的起始顶点 a 在 U 中。假如存在一条从 s 到 b 的路 γ'，该路中不含 C 中的弧，则 γ'连接 γ 从 b 到 t 的部分，将是一条从 s 到 t 的路，该路中不含 C 中的弧。由此可知，α 的终止顶点 b 不在 U 中，所以，α 属于 $\overrightarrow{U}$，且 $C\subseteq\overrightarrow{U}$。 □

下面我们来证明非常重要的最大流最小割定理。

定理 12.2.3 设 $N=(V,A,s,t,c)$是一个网络，则 N 中一个流的最大值等于N 中一个割的最小容量。换句话说，一个最大流的值等于一个最小割的容量。如果所有弧的容量都是整数，则存在一个所有值也都是整数的最大流。

证明：我们仅限在容量值都是整数的假定下来证明这个定理。整个定理的建立，可以借

⊖ 由此可知，通过对所有有理数选择一个共同的分母，则对值均为有理数的容量函数也是成立的。在容量函数的值不都是有理数的情况下，我们不得不采取一个极限过程。

⊜ 因此，最小割是从算术量的角度定义的，而极小割是从集合论的角度定义的，如果所有弧的容量都是正的话，则最小割就是极小割。

助于有限的讨论来完成。

证明中的第一部分并没有用到容量函数的整数性质。我们首先证明：对于任意的流 f 和任意的割 C，有

$$\mathrm{val}(f)\leqslant \mathrm{cap}(C)$$

由引理 12.2.2 知，只要证明对形如 $U\overrightarrow{U}$ 的割，这个不等式成立就可以了，其中 U 是 s 在 U 中且 t 不在 U 中的顶点集。根据引理 12.2.1 及流的值非负的事实，有

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= \sum_{\alpha在\overrightarrow{U}中} f(\alpha)-\sum_{\alpha在\overleftarrow{U}中} f(\alpha)\\ &\leqslant \sum_{\alpha在\overrightarrow{U}中} c(\alpha)\\ &= \mathrm{cap}\overrightarrow{U}\end{aligned}$$

剩下的就是要证明：存在一个只有整数值的流 $\hat{f}$ 和一个割 $\hat{C}$，使得 $\mathrm{val}(\hat{f})=\mathrm{cap}(\hat{C})$。这样的流 $\hat{f}$ 就是一个最大流，而这样的割 $\hat{C}$ 就是一个最小割。

从 N 上任意一个整数值的流 f 开始。所有流的值都为零的零流满足这一要求，尽管一般而言，通过反复试验，可以找到一个整数值的流——就当前的问题而言——一个合理的整数值的流。下面我们叙述一个算法，该算法将导致以下两种可能之一：

突破（Breakthrough）：找到了一个整数值的流 f'，满足 $\mathrm{val}(f')=\mathrm{val}(f)+1$，在这种情况下，我们用 $f=f'$ 来重复此算法。

非突破（Non-Breakthrough）：突破没有发生，在这种情况下，我们给出一个割，其容量等于流 f 的值。这个割就是我们所期望的最小割 $\hat{C}$，而该流 f 就是我们所期望的最大流 $\hat{f}$。

基本流算法

在网络 $N=(V,A,s,t,c)$ 上，从任意一个整数值的流 f 开始。

ⅰ）令 $U=\{s\}$。

ⅱ）当存在一条弧 $\alpha=(x,y)$，满足下列两条之一时：

a）x 在 U 中，y 不在 U 中，且 $f(\alpha)<c(\alpha)$，或

b）x 不在 U 中，y 在 U 中，且 $f(\alpha)>0$，

把 y 放入 U（在情况(a)时）或把 x 放入 U（在情况(b)时）。

ⅲ）输出 U。

这样，在这个算法中，我们是要做下面的两件事之一：ⅰ）寻找 $\overrightarrow{U}$ 中的一条弧（从 s 流向 t），其流量值小于其容量值（并通过把弧的终止顶点放入 U 来修改 U）；或 ⅱ）寻找 $\overleftarrow{U}$ 中的一条弧（从 t 流向 s），其流量值是正的（并通过把弧的起始顶点放入 U 来修改 U）。当网络中再没有这样的弧时，算法结束，于是输出当前的集合 U。

根据目标 t 是否在 U 中来考虑下面的两种情况，我们将会看到，这两种情况对应于突破和非突破。

情况 1：目标 t 在 U 中。

根据算法，对某个整数 m，存在不同顶点的序列

$$x_0=s，x_1，x_2，\cdots，x_{m-1}，x_m=t$$

使得对任意的$j=0,1,2,\cdots,m-1$，必发生下面两种情况之一：

ⅰ）$\alpha_j=(x_j,x_{j+1})$是网络的一条弧，满足$f(\alpha_j)<c(\alpha_j)$；或

ⅱ）$\alpha_j=(x_{j+1},x_j)$是网络的一条弧，满足$f(\alpha_j)>0$。

下面在弧的集合 A 上定义弧的一个整数值函数f'：

$$f'(\alpha)=\begin{cases} f(\alpha)+1，如果\ \alpha\ 是上述ⅰ）中的弧\ \alpha_j\ 之一 \\ f(\alpha)-1，如果\ \alpha\ 是上述ⅱ）中的\ \alpha_j\ 之一 \\ f(\alpha)，其他情况 \end{cases}$$

由f'的定义及所有容量和流f的值都是整数的假设，有$0\leqslant f'(\alpha)\leqslant c(\alpha)$。这样的$f'$是一个流，因为我们只需要通过说明：对任意一个顶点 x_j，$j=1，2，\cdots，m-1$，进入 x_j 的总流量等于流出 x_j 的总流量就可以来验证(例如，如果 $(x_{j-1}，x_j)$ 和 $(x_{j+1}，x_j)$ 都是弧，则流量在 x_j 的净变化为：$+1-1=0$)。流f'的值 val (f') 等于 val (f) $+1$，这是因为：当 $(s，x_1)=(x_0，x_1)$ 是弧时，流出 s 的流量增 1：而当 $(x_1，s)=(x_1，x_0)$ 是弧时，流入 s 的流量减 1。无论是那种情况，从 s 处流出的流的净增量为 1。

情况 2：目标 t 不在 U 中。

在这种情况下，$\overrightarrow{U}$ 是一个割，根据该算法有

ⅰ）对 $\overrightarrow{U}$ 中的每条弧α，有$f(\alpha)=c(\alpha)$；

ⅱ）对 $\overleftarrow{U}$ 中的每条弧，有$f(\alpha)=0$。

因此，

$$\begin{aligned}\text{val}(f)&=\sum_{\alpha在\overrightarrow{U}中}f(\alpha)-\sum_{\alpha在\overleftarrow{U}中}f(\alpha)\\&=\sum_{\alpha在\overrightarrow{U}中}c(\alpha)\\&=\text{cap}\overrightarrow{U}\end{aligned}$$

所以$\hat{f}=f$是一个最大流，而$\hat{C}=\overrightarrow{U}$是一个最小割。 □

在结束本节之前，再通过最大流最小割定理，推导两个重要的组合学结论，包括第 9 章的 König 定理。

例　设$D=(V,A)$是一个模拟通信网络的有向图，顶点代表网络中的接点（中继点），弧代表有向(单向)通信线路，考虑相应于 V 中的顶点 s 和 t 的两个接点。通过铺设有向线路，我们希望建立一个从 s 到 t 的通信线路。因为通信线路可能会发生故障，为了在发生某种故障的情况下，也能从 s 向 t 发送信息，则在有向图中存有冗余是有必要的，即：即使某些弧有故障也仍能使信息从 s 到达 t。我们在 D 的弧中定义一个 *st-分离集* S 为 D 的弧的集，使得在从 s 到 t 的任意一条路，至少使用 S 中的一条弧。只有当 *st*-分离集中的所有弧都发生了故障时，才不能从 s 向 t 发送信息。下面的 Menger 定理刻画了具有最少弧数的 *st*-分离集的特性。 □

定理 12.2.4　设 s 和 t 是有向图 $D=(V, A)$ 中的不同顶点，则从 s 到 t 的逐对弧不相交的路径的最多数目等于一个 st-分离集中弧的最少数目。

证明：设 $N=(V,A,s,t,c)$ 是每条弧的容量均为 1 的网络，则 N 中的割是 D 中的一个 st-分离集（反之亦然），且割的容量等于割中弧的个数。

考虑 N 中的一个整数值的流 f，令 $\text{val}(f)=p$，因为所有容量值为 1，所以 f 的取值只能是 0 和 1：对每条弧 α，f 或"选取" α（当 $f(\alpha)=1$ 时），或不选取 α（当 $f(\alpha)=0$ 时）。通过对 p 进行归纳法，证明从 s 到 t 存在 p 条逐对弧不相交的路径，这些路径由经 f 所选择的弧组成。当 $p=0$ 时，是一种平凡情况。假设 $p\geqslant 1$，则存在从 s 到 t 的一条路径 γ；否则，如果 U 是从 s 能够沿一条路径到达的顶点集，则 $\overrightarrow{U}=\varnothing$ 是 N 中容量为零的割，这与 $p\geqslant 1$ 矛盾。设 f' 是由 f 通过对 γ 的弧流的值减 1 而得到的值为 $p-1$ 的整数流，则根据归纳法，从 s 到 t 存在 $p-1$ 条逐对弧不相交的路径，它们由经 f' 所选择的弧组成，这 $p-1$ 条路径与 γ 一起就是 p 条逐对弧不相交的路，它们由 f 所选择的弧组成。

反之，如果从 s 到 t 存在 p 条逐对弧不相交的路径，则显然 N 中存在值为 p 的一个整数流。根据最大流最小割定理 12.2.3，该定理得证。　□

回忆第 9 章和第 11 章，二分图 G 是一个简单图，其顶点可以被划分为这样的两个集合 X 和 Y：使得任意一条边都连接 X 中的一个顶点和 Y 中的一个顶点。集合对 X，Y 叫做 G 的一个二分划，根据第 9 章，G 中的一个匹配是逐对顶点不相交的边的集合；G 的一个覆盖是满足下述条件的顶点集 C：使得 G 的每一条边至少有一个顶点在 C 中。G 的一个匹配中边的最多数目记为 $\rho(G)$，一个覆盖中顶点的最少数目记为 $c(G)$，下面说明如何根据 Menger 定理 12.2.4 来推导第 9 章中的推论 9.2.4。

定理 12.2.5　设 G 是一个二分图，则 $\rho(G)=c(G)$。

证明：设 X，Y 是 G 的一个二分划，先构造一个有向图 $D=(X\cup Y\cup\{s,t\},A)$。

设 s 和 t 是不属于 $X\cup Y$ 的不同元素，D 中的弧如下得到：

ⅰ）对每一个 x 属于 X，(s, x) 是 N 的弧；

ⅱ）对 G 中的每一条边 $\{x, y\}$，(x, y) 是 N 的弧（从而 N 的所有弧都是从 x 到 y 的方向）；

ⅲ）对每一个 y 属于 Y，(y, t) 是 N 的弧。

设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ 是从 s 到 t 的 D 中逐对弧不相交的路径的集合。对 X 中的某个 x_i 和 Y 中的某个 y_i，每条路径 γ_i 都形如 s，x_i，y_i，t，且边 $\{x_1, y_1\}, \cdots, \{x_p, y_p\}$ 构成 G 的大小为 p 的一个匹配。反之，根据 G 中一个大小为 p 的匹配，可以构造出 D 中的 p 条逐对弧不相交的路径，因此，$\rho(G)$ 等于 D 中从 s 到 t 逐对弧不相交的路径的最大数目。

现在设 $C=X'\cup Y'$ 是 G 的一个覆盖，其中 $X'\subseteq X$，$Y'\subseteq Y$，因为 D 中从 s 到 t 的每条路径都使用一条形如 (x, y) 的弧，其中 $\{x, y\}$ 是 G 的一条边，所以

$$S=\{(s, x')\mid x' 属于 X'\}\cup\{(y', t)\mid y' 属于 Y'\} \tag{12-11}$$

是 D 中的一个 st-分离集，其中 $|C|=|S|$。反之，如果 S 是 D 中形如式（12-11）的一个 st-分离集，则由 $C=X'\cup Y'$ 定义的集 C 是 G 的一个覆盖。现在假设 T 是 D 中任意一个 st-分离集，则将 T 中形如 (x, y) 的弧（x 属于 X，y 属于 Y）用弧 (s, x) 代替，所得到的集合 $\hat{T}$ 也是一个 st-分离集。此外，对某个 $X'\subseteq X$ 及 $Y'\subseteq Y$，$\hat{T}$ 具有式（12-11）的形

式，且$|\hat{T}| \leqslant |T|$（因为，比如 T 中可能存在多条形如（x，·）的弧），并且 $X' \cup Y'$ 是 G 的一个覆盖。所以 $c(G)$ 等于 D 中一个 st-分离集中弧的最少数目，因此，由定理 12.2.4，有 $\rho(G)=c(G)$。 □

12.3 练习题

1. 证明定理 12.1.2。
2. 证明定理 12.1.3。
3. 证明：K_n 的一个定向是一个可递竞赛图，当且仅当它不存在任何长度为 3 的有向圈。
4. 给出一个有向图的例子，其中不存在有向闭欧拉迹，但它的基础一般图中存在闭欧拉迹。
5. 证明：一个有向图中不存在有向圈，当且仅当它的顶点可以从 1 到 n 标记，使得每条弧的终止顶点比其起始顶点的标记大。
6. 证明：一个有向图是强连通的，当且仅当存在一个闭的有向途径，它包含每个顶点至少一次。
7. 设 T 是任意一个竞赛图，证明：为了获得一个带有有向哈密尔顿圈的竞赛图，最多只需改变一个弧的方向就可以了。
8. 利用定理 12.1.5 的证明，写出一个算法，用来确定竞赛图中的一条哈密尔顿路。
9. 证明：一个竞赛图是强连通的，当且仅当图中存在有向哈密尔顿圈。
10. 证明：每个竞赛图都含有一个顶点 u，使得对所有其他顶点 x，都存在一条从 u 到 x 的、长度不超过 2 的路径。
11. 证明：每个图都有这样的性质，即它的每条边都可以定向，使得对每个顶点 x，其入度和其出度之差最大为 1。

*12. 设计一个算法，在强连通竞赛图中构造一个有向哈密尔顿圈。

13. 利用 12.1 节中的算法，确定图 11-15 到图 11-18 所示图的强连通定向。
14. 证明定理 12.1.6 的下列推广：设 G 是一个连通图，则当每个桥 $\{a, b\}$ 都用两个弧 (a, b) 和 (b, a) 代替后，即每个方向都有一个弧，就可以给出 G 的剩余边一个定向，使得所产生的有向图是强连通的。
15. 修改算法：构造无桥连通图的一个强连通定向，使其适用于习题 14 的情形。
16. 考虑这样一个交易问题：交易商 t_1 把他自己的商品排在第一位。证明：在任何一个核心分配中，t_1 总是持有他自己的商品。
17. 构造一个具有如下性质的交易问题的例子：其中有 n 个交易商，且在每一个核心分配中，恰好只有一人能得到他排位第一的商品。
18. 说明：由下面的偏爱表给出的交易问题恰好有两个核心分配。

	t_1	t_2	t_3
t_1	2	1	3
t_2	3	2	1
t_3	1	3	2

这两个结果中的哪一个是应用定理 12.1.9 的构造性证明得到的？

19. 在一个交易问题中，假设一个交易商把他自己的商品排在了第 k 位，证明：在任意一个核心分配中，该交易商获得的商品排位不会低于 k（因此，一个交易商是不会拿着比他带来的估价还低的商品离开交易场的）。
20. 证明：在利用定理 12.1.9 的构造性证明得到的核心分配中，至少有一个参预者获得的商品是他估价最高的。通过例子说明：可能存在这样的核心分配，其中任何一个参预者都得不到他的首选商品。
21. 证明：在一个交易问题中，存在一个核心分配，使得每个交易商都得到他排位第 1 的商品，当且仅当用定理 12.1.9 的证明构造出的有向图 D^1 是由两两没有公共顶点的有向圈构成的。
22. 在如下偏爱表所示的交易问题中构造一个核心分配：

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_1	2	3	1	4	7	5	6
t_2	1	6	4	3	2	7	5
t_3	2	7	3	5	1	4	6
t_4	3	4	2	7	1	6	5
t_5	1	3	4	2	5	7	6
t_6	2	4	1	5	3	7	6
t_7	7	3	4	2	1	6	5

23. 明确写出定理 12.1.9 中所隐含的求核心分配的算法。
24. 确定图 12-7 中每个网络 $N=(V,A,s,t,c)$ 的一个最大流和一个最小割（弧边上的数是该弧的容量）。
25. 在练习题 24 所给网络上的有向图中，确定从 s 到 t 的逐对弧不相交的路径的最大数目，通过给出一个具有相同弧数的 st-分离集，来验证该数目是最大数目（参看定理 12.2.4）。
26. 考虑图 12-8 所示的网络，其中有三个代表某种商品的源 s_1，s_2 和 s_3 以及三个目标 t_1，t_2 和 t_3。每个源都有某种特定的商品要出售，而每个目标也都在需求某种特定的商品，它们的供应量和需求量是供应点和收点旁边括号里的数，供应品要在每条弧的容量限制下从源流向目标。在现有的供应量下，确定是否所有需求都能同时满足（处理此问题的一个可能的办法是：引入一个辅助的源 s 和一个辅助的目标 t，从 s 到每个 s_i 的弧的容量等于 s_i 的供应量，且从每个 t_j 到 t 的弧的容量等于 t_j 的需求量，

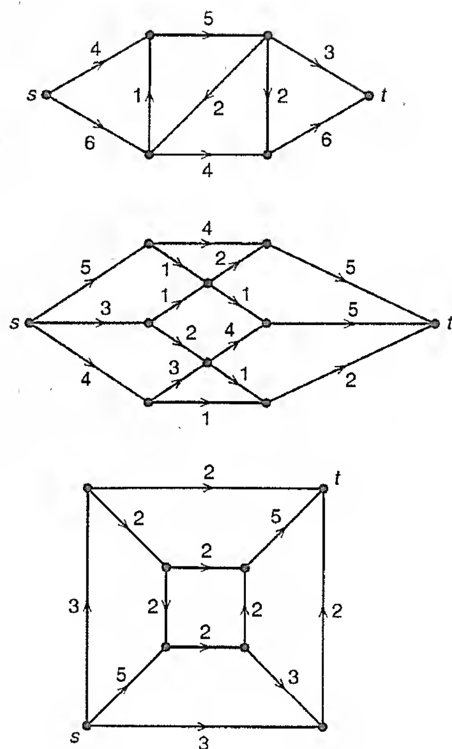


图　12-7

然后，在这个扩展的网络上，找出从 s 到 t 的一个最大流，并检查是否所有需求都已满足）。

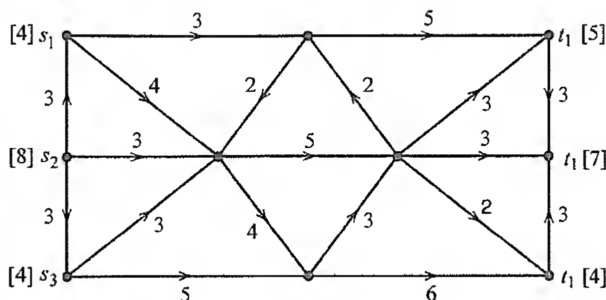


图　12-8

27. 在练习题 26 中，将 s_1，s_2，s_3 处的供应量分别改为 a，b，c，再确定就现有的供应量下，是否所有需求都能同时满足。

*28. 建立并证明一个定理，在带有多重源和多重收点的网络中，给出存在一个流，使得以给定的供应量同时满足所有需求量的充分必要条件。

29. 考虑长度为 n 的 2^n 个二进制序列的集合 A。这道练习涉及到 2^n 个 0 和 1 的一个循环排列 γ_n 的存在性，该 γ_n 中 2^n 个连续 n 个比特位的序列构成 A 的全部序列，这些序列是互异的。这样一个循环排列就叫做 de Bruijn 圈。例如，若 $n=2$，则循环排列 0，0，1，1（把第一个 0 看成是接在最后的 1 之后）给出 4 个序列 0，0；0，1；1，1；1，0。对于 $n=3$，排列 0，0，0，1，0，1，1，1（看成是循环的）是一个 de Bruijn 圈。现在定义一个有向图 Γ_n，它的顶点是 2^{n-1}个长度为 $n-1$ 的二进制序列。给定两个这样的二进制序列 x 和 y，我们从 x 到 y 放一条弧 e，假设 x 的最后 $n-2$ 个比特与 y 的前 $n-2$ 个比特相同，此时我们用 x 的第一个比特位标记弧 e。

　　ⅰ）证明 Γ_n 的每一个顶点的入度和出度都等于 2。于是，Γ_n 有总数为 $2\cdot2^{n-1}$条弧。

　　ⅱ）证明 Γ_n 是强连通的，从而 Γ_n 有一个闭的欧拉有向迹（长为 2^n）。

　　ⅲ）令 b_1，b_2，…，b_{2^n}为遍历 Γ_n 的一个欧拉有向迹时的那些弧（看作是循环排列）的标记。证明 b_1，b_2，…，b_{2^n}是一个 de Bruijn 圈。

　　ⅳ）证明，给定有向图 Γ_n 的任意两个顶点 x 和 y，存在一条最多长为 $n-1$ 的从 x 到 y 的路径。

第13章 再论图

在第2章的图论中，我们学习了与图有关的一些基本的数，其中最为著名的是与四色问题有关的色数。100多年来，如下问题曾经一直未被解决[一]：考虑画在平面或球面上使各国相连的一张地图。要求一个区域用一种颜色着色，并使相邻区域的颜色不同，那么用4种颜色以这种方式就足以对任何地图进行着色吗？简短的回答是肯定的，但详细的回答需要严格的论证[二]。实质上，要借助计算机来进行计算。四色问题可用图论的语言重新描述：在每个国家内部各选一个顶点，每当两个国家共享一条公共边界时[三]，就用一条边连接这两个顶点，以这种方式得到一个平面图，称为该地图的对偶图。将地图上的区域着色，使得相邻区域的颜色不同，这等价于对它的对偶图中的顶点着色[四]，使得两相邻顶点的颜色不同。因此，四色问题也可陈述为：每一个平面图是4-可着色的。在本章中我们将证明：每一个平面图是5-可着色的，并更广泛地探讨图的着色问题以及有关其他图的参数。

13.1 色数

本节中，我们只考虑简单图，因为连接一对不同的顶点，无论出现一条以上的边还是圈，对所考虑的这类问题都没有实质性的影响。

设$G=(V,E)$是一个图，G的顶点着色就是对G的每个顶点指定一种颜色，且使得相邻顶点有不同的颜色。如果这些颜色选自于一个有k种颜色的集合而不管k种颜色是否都用到，那么顶点着色称为k-顶点着色，简称为k-着色。如果G有一个k-着色，那么称G是k-可着色的。使得G是k-可着色的最小的k称为G的色数，用$\chi(G)$表示。这些颜色本身的性质[五]并不重要，因此，有时将这些颜色描述为红、兰、绿、…，而有时又简单地用整数1，2，3，…来指定颜色。同构图具有相同的色数。

将没有任何边的图定义为零图[六]，n阶的零图用N_n表示。

定理13.1.1 设G是一个n阶图，其中$n\geqslant 1$，则

$$1\leqslant\chi(G)\leqslant n$$

而且，$\chi(G)=n$当且仅当G为完全图，$\chi(G)=1$当且仅当G为零图。

[一] 100多年未被解决的问题不是自然就出名的。使4色问题如此著名的原因在于该问题叙述简单并且几乎所有的人都能理解。除此之外，这个问题还非常具有吸引力！

[二] 至少当前所知的证明是如此。但是，证明4种颜色足够却超出非专业人员的能力。曾经尝试过一些初等方法但都失败了！关于4色问题的简单来历见1.4节。

[三] 只有一个或多个（一般只是有限多个）公共点的两个国家不能认为具有公共的边界。

[四] 更准确地说，看成是对顶点指定颜色。

[五] 我们是不是应该说颜色？

[六] 零图未必就是空图，因为它可能有顶点。空图是没有顶点的图。因此，图$G=(V,E)$是零图当且仅当$E=\varnothing$而G是空图当且仅当$V=\varnothing$（从而$E=\varnothing$）。空图是非常特殊的零图，即0阶零图。感觉混乱吗？别担心。只要记住，零图没有边。

证明：因为具有一个或更多顶点的图至少需要一种颜色，并且，将 n 种不同颜色任意分派到 G 的顶点上都为一顶点着色，所以不等式显然成立。在 K_n 的任何顶点着色中，没有任何两个顶点能指定为相同的颜色，因此，$\chi(K_n)=n$。假如 G 不是一个完全图，那么存在两个不相邻接的顶点 x 与 y，将 x 与 y 指定为相同的颜色，而将剩余的 $n-2$ 个顶点指定为不同的颜色，得到 G 的一个（$n-1$）-着色，所以，$\chi(G)\leqslant n-1$。将 N_n 的所有顶点指定为相同的颜色是一个顶点着色，因此，$\chi(N_n)=1$。假设 G 不是零图，那么存在邻接的顶点 x 与 y，并且，对于 G 的任何顶点着色，x 与 y 不能被指定为同一种颜色。所以，$\chi(G)\geqslant 2$。 □

推论 13.1.2 设 G 是一个图，H 是 G 的一个子图，那么 $\chi(G)\geqslant\chi(H)$。如果 G 具有一个等于 p 阶完全图 K_p 的子图[㊀]，则 $\chi(G)\geqslant p$。

证明：按照色数的定义，如果 H 为 G 的任一子图，那么 $\chi(G)\geqslant\chi(H)$，利用定理 13.1.1，则得：

$$\chi(G)\geqslant\chi(K_p)=p$$ □

例 设 G 为如图 13-1 所示的一个图，因为 G 具有一个与 K_3 等同的子图，故 G 的色数至少为 3。现将顶点 x 和 v 涂红色，将顶点 u 和 y 涂蓝色，将顶点 z 涂绿色，我们得到 G 的一个 3-着色，即得 $\chi(G)=3$。 □

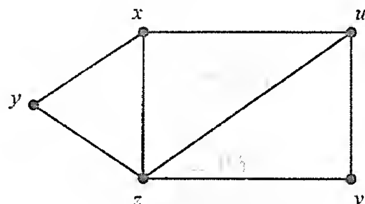


图 13-1

设 $G=(V,E)$ 是使用颜色为 1，2，3，…，k 的一个 k-着色图，用 V_i 表示顶点被指定为颜色 i（$i=1$，2，…，k）的所有那些顶点的子集，于是，V_1，V_2，…，V_k 是 V 的一个划分，称作 G 的一个色划分，而且所导出的子图 G_{V_1}，G_{V_2}，…，G_{V_k} 都为零图。相反，如果能将这些顶点划分为 k 个部分，每一部分导出一个零图，那么色数最多为 k。因此，描述 G 的色数的另一种方式是色数 $\chi(G)$ 是使得 G 的顶点可划分为 k 个子集且每个子集导出一个零图的最小整数 k。在图 13-1 所描述的图的着色问题中，色划分分别为：$\{x, v\}$（红色顶点），$\{u, y\}$（蓝色顶点），$\{z\}$（绿色顶点）。运用这些概念，便可得到关于图的色数的另一个下界。

推论 13.1.3 设 $G=(V,E)$ 是一个 n 阶图，q 是 G 的导出子图且等于零图 N_q 的最大阶数，则[㊁]

$$\chi(G)\geqslant\left\lceil\frac{n}{q}\right\rceil$$

证明：设 $\chi(G)=k$，令 V_1，V_2，…，V_k 为 G 的一个色划分，则对于每一个 i 有 $|V_i|\leqslant q$，且

$$n=|V|=\sum_{i=1}^{k}|V_i|\leqslant\sum_{i=1}^{k}q=k\times q$$

因此

$$\chi(G)=k\geqslant n/q$$

㊀ 这个子图必然是导出子图。

㊁ 回顾 x 的上取整 $\lceil x\rceil$ 是使得 $a\geqslant x$ 的最小整数 a。

因为$\chi(G)$为一整数，故推论成立。 □

例 继续考虑图 13-1，对该图验证可得到导出的零图的最大阶数为 $q=2$（即：每三个顶点中，至少有两个为相邻顶点），因此，由推论 13.1.3 再次得到：

$$\chi(G)\geqslant\lceil 5/2\rceil=3$$ □

根据定理 13.1.1，色数为 1 的图是零图，于是自然引出对色数为 2 的图的特性进行探索。色数为 2 的图具有一个包含两个集合的色划分，这便引出了二分图。

定理 13.1.4 设图 G 至少有一条边，那么$\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二分图。

证明： 至少有一条边的图的色数至少为 2。如果 G 是一个二分图，那么将左边顶点着红色，右边顶点着蓝色[㊀]，便得到图 G 的一个 2-着色。相反，从 2-着色得到的色划分是 G 的一个二分化，于是，G 是二分图。 □

根据定理 11.4.1 和定理 13.1.4 得到：一个非零图的色数为 2 当且仅当每个圈有偶数长度。色数为 3 的图可能有非常复杂的结构并且不具有简单的特性。

例（调度问题） 许多调度问题都可用公式表示为求解图的色数问题（但经常用于处理比色数小的数）。其基本思想是：将一个图与一个调度问题相联系，其顶点为要调度的“任务”，每当两任务间发生冲突时就在它们中间画一条边，这样两个任务就不会被安排在同一时间。G 的一个色划分提供了一个没有任何冲突的调度表，这样，图的色数就等于无冲突下调度表中时间间隙的最小数。

例如，假设要调度 9 项任务a,b,c,d,e,f,g,h,i，这里每项任务与其随后的任务相冲突，且 i 与 a 相冲突。在这种情况下，冲突图 G 为一个阶数为 9 的图，其边被安排在长度为 9 的一个圈中。在该图的任意 5 个顶点中，至少有 2 个是相邻接的，因此，在推论 13.1.3 中的 q 值最大为 4，从而，$\chi(G)\geqslant 3$。容易找到一个 3-着色使$\chi(G)=3$，所以该调度问题需要 3 个时间间隙。 □

求出一个图的色数是一个难题，对此至今没有一个已知的好算法[㊁]，所以对图的色数进行估计以及寻找在使用的颜色数“不太大”的情形下顶点着色的某些方法具有非常重要的意义。在推论 13.1.2 和推论 13.1.3 中，我们已给出了关于色数的两个下界，定理 13.1.1 包含一个上界，即对于 n 阶非完全图其上界为 $n-1$，不过该界值没有多大的意义，人们希望做得更好。实际上，我们将证明从顶点的度中会得到更好的界值，并且为获得不超过这种界值的顶点着色存在一种简单算法，该算法是贪婪(greedy)算法[㊂]的另一个实例。贪婪算法是按顺序取第一个可用的颜色而忽略对以后的顶点可能会产生的后果。我们使用正整数对顶点着色，因此，就可谈论一种颜色小于另一种颜色了。

顶点着色的贪婪算法

设 G 是一个图，它的顶点按某一顺序记为$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

ⅰ）对顶点 x_1 指定颜色 1。

㊀ 当然，把左和右用作两种颜色我们可以说“给左顶点着色左而给右顶点着色右”。

㊁ 一种好算法是其所需要的步数像图的阶数的多项式那样地增长。大多数专家相信不可能有好的算法。

㊂ 最小权生成树的贪婪算法在 11.7 节给出。不同于构造最小权生成树的这一贪婪算法，当前的算法只是给出色数的一个上界。

ⅱ) 对每个 $i=2,3,\cdots,n$，令 p 是与 x_i 邻接的顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}$ 中没有任何一个顶点着色 p 的最小的颜色，并且对 x_i 指定颜色 p。

定理 13.1.5 设 G 是一个图，对于该图顶点的最大度为 Δ，那么贪婪算法产生 G 的顶点的一个 $(\Delta+1)$－着色[㊀]，因此

$$\chi(G)\leqslant\Delta+1$$

证明： 贪婪算法用语言描述就是依次考虑每一个顶点，并将尚未指定给与其邻接的顶点的最小颜色指定给该顶点，特别是绝不能将两个邻接顶点指定为相同的颜色，因此贪婪算法确实产生一个顶点着色。最多存在 Δ 个顶点与顶点 x_i 邻接，于是，在 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}$ 中最多有 Δ 个与 x_i 邻接。所以，当我们考虑算法第（2）步中的顶点 x_i 时，在颜色 $1,2,\cdots,\Delta+1$ 中至少有一种颜色尚未指定给与 x_i 邻接的顶点，并且算法将这些颜色中最小的指定给 x_i。于是得到贪婪算法产生图 G 的顶点的一个（$\Delta+1$）-着色。 □

贪婪算法可能只是用最少的即 $\chi(G)$ 种颜色对 G 的顶点着色。其好坏取决于贪婪算法被使用前各顶点所列的顺序。令 $V_1,V_2,\cdots,V_{\chi(G)}$ 是用 $\chi(G)$ 种颜色给顶点着色产生的一个色划分。假设我们首先列出 V_1 的顶点，随后列出 V_2 的顶点，…及 $V_{\chi(G)}$ 的顶点[㊁]。容易看到贪婪算法用颜色 1 给 V_1 中的顶点着色，用颜色 1 或 2 给 V_2 中的顶点着色，…，用颜色1、2、…、$\chi(G)$ 中之一给 $V_{\chi(G)}$ 中的顶点着色。因此，当用这样的方法列出顶点时贪婪算法可能是用最少的颜色给所有的顶点着色。

例 考虑一个完全二分图 $K_{1,n}$，顶点的最大度 $\Delta=n$。于是，根据定理 13.1.5，贪婪算法产生一个 $(n+1)$－着色。事实上，贪婪算法会做得更好。不管各顶点怎样列出，贪婪算法仅用两种颜色即最少可能的颜色给各顶点着色。因此，贪婪算法有时能给出比定理 13.1.5 好得多的着色。

现在考虑如图 13-2 所示的二分图，其顶点为 x,a,b,y,z,c。用贪婪算法对这些顶点指定的颜色分别为 1，2，1，3，2，4，于是贪婪算法产生一个 4-着色，然而，着色数却为 2。 □

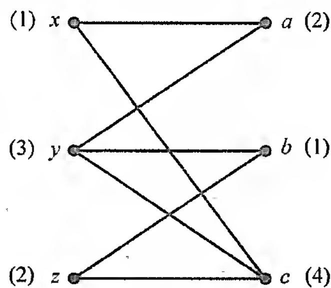


图 13-2

除两类图外，由定理 13.1.5 给出的色数的上界是可以改进的。这两类图分别为：完全图 K_n，对它而言，$\Delta=n-1$ 且 $\chi(G)=n$ 和边被排在一个圈中（奇数长度）且阶数为奇数 n 的图 C_n，对它而言，$\Delta=2$ 且 $\chi(G)=3$。下面的 Brooks 定理[㊂]的证明略。

定理 13.1.6 设 G 是一个连通图，其顶点的最大度为 Δ。如果 G 既不是完全图 K_n 也不是奇数阶循环图 C_n，则

$$\chi(G)\leqslant\Delta$$

从我们对色数的讨论中得到的结论之一是：要想用最少的颜色数对图的顶点进行着色

㊀ 要注意，（$\Delta+1$）-着色并不意味着所有 $\Delta+1$ 种颜色都真的用到。

㊁ 我们要做的只不过是将相同颜色的顶点分在一起。

㊂ R. L. Brooks: On coloring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37 (1941), 194-197。

（使邻接顶点的颜色不同）是很困难的。现在我们放弃颜色数目为最少的限制，而考虑一个更为复杂的问题：已知一个图 G 和 k 种颜色的集合 $\{1,2,\cdots,k\}$，那么存在图 G 的多少 k-着色？如果已知 $\chi(G)>k$，那么问题很简单，答案为 0[㊀]。

对于每个非负整数 k，图 G 顶点的 k-着色数用

$$p_G(k)$$

表示。如果 $\chi(G)>k$，那么 $p_G(k)=0$。例如，对于一个完全图有

$$p_{K_n}(k)=k(k-1)\cdots(k-(n-1))=[k]_n$$

这是因为每一个顶点具有不同的颜色[㊁]。对于一个零图而言，有

$$P_{N_n}(k)=k^n$$

这是因为我们可以对每个顶点任意指定颜色[㊂]。

例 我们来确定图 13-1 中图 G 的 $p_G(k)$。首先对 x，y，z 进行着色。因为每个顶点必须接受不同的颜色，故对这些顶点共有 $k(k-1)(k-2)$ 种着色方案。然后对 u 着色，并保证它必须接受与 x 和 z 不同的颜色，则有 $(k-2)$ 种方法对 u 着色。最后 v 可接受 u 和 z 的颜色之外的任意颜色，因此有 $k-2$ 种方法对 v 着色，所以

$$p_G(k)=k(k-1)(k-2)\times(k-2)\times(k-2)=k(k-1)(k-2)^3$$ □

不难计算出关于树的顶点的着色方法数。令人惊奇的是：对每个 k，树的 k-着色数只取决于该树的顶点个数而不取决于所考虑的是哪棵树！

定理 13.1.7 设 T 是一棵 n 阶树，则

$$p_T(k)=k(k-1)^{n-1}$$

证明： 像 11.5 节所描述的那样生成 T，并对各顶点进行着色。开始的顶点可以用 k 种颜色中任意一种着色，添加的每一个新顶点 y 仅与前面唯一一个顶点 x 相邻，于是，y 可用与 x 不同的 $k-1$ 种颜色中任意一种着色。所以，除了第一个顶点外，其余 $n-1$ 个顶点的每一个可有 $k-1$ 种方法着色，故公式成立。 □

细心的读者会注意到，至今为止，所得到的每一个计算图的顶点着色方法数的公式都是颜色数 k 的多项式函数。事实上，这并非偶然，而是一种普遍现象：$p_G(k)$ 总是 k 的多项式函数。现在我们开始证明该事实。作为该性质的结果，$p_G(k)$ 称为图 G 的*色多项式*。求 G 的色多项式在 k 的值就是给出 G 的 k-着色数。G 的色数为不是色多项式根的最小非负整数。

通过简单的观察可知 $p_G(k)$ 是一个多项式。设 x、y 为图 G 的两个邻接顶点，G_1 为从 G 中去掉连接 x 和 y 的边 $\{x,y\}$ 后而得到的图。G_1 的 k-着色可划分为两部分 $C(k)$ 和 $D(k)$。第一部分 $C(k)$ 是 x 和 y 着同样颜色的 G_1 的 k-着色，第二部分 $D(k)$ 是 x 和 y

㊀ 如果 $\chi(G)>k$，但我们没有其他信息，则问题困难得多，这是因为回答它时我们要确定是否确有 $\chi(G)\leqslant k$。$\chi(G)\leqslant k$ 当且仅当用 k 种颜色给 G 着色的方法数不是 0。

㊁ $[k]_n$ 是 8.2 节引入的函数，计数 k 个不同对象集合中的 n-排列数，在这里，k 个对象是 k 种颜色，n-排列是一种颜色指定给 K_n 里的 n 个顶点中的每一个，因为每对顶点在 K_n 中是邻接的，所有的顶点有不同的着色。

㊂ 回想第 3 章 k^n 是 k 个对象（这里 k 种颜色）集合中的 n-排列数，k 个对象无限制的重复是允许的，因为 N_n 中没有任何顶点是邻接的，我们能自由重复颜色。

着不同颜色的 G_1 的 k-着色，因此，

$$p_{G_1}(k)=|C(k)|+|D(k)|$$

在 G 的k-着色与G_1(x 和 y 被指定不同的颜色）的 k-着色之间存在一一对应，因此

$$p_G(k)=|D(k)|$$

设 G_2 是从 G 中通过把顶点 x 和 y 看成同一顶点得到的图，即删除边 $\{x,\ y\}$，用一个新顶点（记为 $\overline{xy}$）替换 x 和 y 并且连接 $\overline{xy}$ 到 G 中与 x 或 y 相连的任意顶点㊀。在 G_2 的 k 着色与 G_1（x 和 y 被指定相同的颜色）的 k-着色之间存在一一对应，因此，

$$p_{G_2}(k)=|C(k)|$$

结合前面的三个方程得

$$p_{G_1}(k)=p_G(k)+p_{G_2}(k)$$

因此，

$$p_G(k)=p_{G_1}(k)-p_{G_2}(k) \tag{13-1}$$

换句话说，G 的k-着色数可以通过G_1 的 k-着色数（删除边 $\{x,\ y\}$ 使得 x 和 y 被指定相同的颜色成为可能）减去 G_2 的 k-着色数而得到（视顶点 x 和 y 为同一顶点，使得它们必然着成相同颜色)。这是一个十分有用的观察，为什么？

G_1 与 G 的阶相同且比 G 少一条边。G_2 比 G 少一阶且至少少一条边。换句话说，G_1 和 G_2 比 G 更接近零图。这就提出了一种求 G 的 k-着色数的一种算法：不断地删除边与合并顶点直到零图为止。由式（13-1）知 G 的 k-着色数可以根据每种零图的 k-着色数表达，但是我们从 p 阶零图的 k-着色数是 k^p 知道零图的 k-着色数。因此，我们能通过加减这些零图的 k-着色数而得到 G 的 k-着色数㊁。此外，因为 k^p 是 k 的多项式，所以，G 的 k-着色数就是 k 的多项式。即 G 的色多项式确实是一个多项式！在对上面的讨论还未形式化之前，我们考察一下例子。

例 设 G 是一个 5 阶循环图 C_5，它的边排列成一个圈，任意选择 G 的一条边，由式(13-1)，得到

$$p_G(k)=p_{G_1}(k)-p_{G_2}(k)$$

其中，G_1 是一棵 5 阶树，它的边以链状方式排列，G_2 是一个 4 阶循环图 C_4。由定理 13.1.7 得 $p_{G_1}(k)=k(k-1)^4$㊂。对 G_2 继续使用上述方法得 $p_{G_2}(k)=k(k-1)^3-p_{G_3}(k)$，其中，$G_3$ 是一个 3 阶循环图 C_3。因为 G_3 是一个完全图 K_3，所以，$p_{G_3}(k)=k(k-1)(k-2)$。从而得到 $p_G(k)=k(k-1)^4-(k(k-1)^3-k(k-1)(k-2))=k(k-1)(k-2)(k^2-2k+2)$。

注意：$p_G(0)=0, p_G(1)=0, p_G(2)=0$ 且 $p_G(3)>0$ 。因此，$\chi(G)=3$ ，这是显而易见的。

□

设 G 是一个图，$\alpha=\{x,y\}$是图 G 的一条边，记$G_{\ominus\alpha}$为将 α 边从图 G 中删除后的图，$G_{\otimes\alpha}$为合并顶点 x 和 y 的图（跟上面的定义一样），因此式（13-1）可重写为

$$p_G(k)=p_{G_{\ominus\alpha}}(k)-p_{G_{\otimes\alpha}}(k) \tag{13-2}$$

㊀ 我们能把 x 和 y 看成移到一起，直到它们恰好重合，这也许产生了一条多重边，这种情况我们删除一个复制。

㊁ 零图也许是无用的，但正像我们刚才所看到的那样，它们在图的着色中起着重要的作用。

㊂ 这说明了该过程的一个关键点，即如果人们获得了一个图，它的色多项式是已知的，那么就利用该信息。

如上所述,重复使用删除和合并就给出了一种求 $p_G(k)$的算法。在下面的算法中,考虑对象$(\pm,H)$,其中,H 是一个图,我们称这样的对象为符号图,即在图的前面放上+或者-的符号。

求一个图的色多项式的算法

设$G=(V,E)$是一个图。

ⅰ) 取$\mathcal{G}=\{(+,G)\}$。

ⅱ) 当$\mathcal{G}$中含有不是零图的符号图时，做

a) 从$\mathcal{G}$中选择一个非零符号图（ε，H）和 H 的一条边α。

b) 将(ε,H)从$\mathcal{G}$中删除,然后加入另外两个符号图$(\varepsilon,H_{\ominus\alpha})$和$(-\varepsilon,H_{\otimes\alpha})$。

ⅲ) 取 $p_G(k)=\sum \varepsilon k^p$,其中求和对 p 中的所有符号图(ε,H)进行,p 是H 的阶数。

换句话说，先在图 G 前加上一个+号，不断对图作删除和合并处理以减小图，直到零图为止，而有关的符号可通过式（13-2）和它的累加求得，当图均为零图后，计算如此获得的每个零图的阶 p，然后形成单项式 $\pm k^p$，它就是色多项式（符号需调整），重复使用式(13-2)，加上所有这些多项式便得到 G 的色多项式。特别地，因为单项式的和是多项式，所以得到的是一个多项式。在删除和合并的处理过程中，只有一个图是跟 G 有相同阶的零图，该图是经过把 G 中所有的边连续删除，没有任何合并而得到的结果，并且符号为+。因此，我们证明了下面的定理。

定理 13.1.8 设 G 是阶为 $n\geqslant 1$ 的图，那么，G 的 k-着色数是 k 的一个 n 阶多项式（首项系数是 1），并且该多项式（G 的色多项式）可通过上面的算法正确地计算。

如果图 G 是不连通的，显而易见，图 G 的色多项式是其连通子图的色多项式的积，特别地，色数是它的连通子图中色数的最大值。下一定理我们把该结论一般化，得到的公式有时能减少计算一个图的色多项式的计算量。

设图$G=(V,E)$是一个连通图，U 是G 的顶点的子集。如果由不在 U 中的顶点导出的子图 G_{V-U}是不连通的[⊖]，那么称 U 为G 的一个关节集。如果 G 不是完全图，那么 G 含有两个非邻接的顶点 a 和b，因此$V-\{a,b\}$是一个关节集。一个完全图没有关节集。所以，一个连通图有关节集当且仅当它是非完全图。

引理 13.1.9 设 G 是一个图并且假设G 含有一个等于完全图K_r 的子图H，那么 G 的色多项式可以被K_r 的色多项式$[k]_r$ 整除。

证明： 在 G 的任何k-着色中，H 的所有顶点都着不同的颜色，而且，对于 H 中顶点的每一种颜色的选择都可以扩展到 G 的剩余顶点的相同着色数 q（k）。因此，$p_G(k)=[k]_r q(k)$。 □

定理 13.1.10 设 U 是G 的一个关节集，假设导出子图 G_U 是一个完全图K_r,G_{V-U}的连通分支是导出子图$G_{U_1},\cdots,G_{U_t}$。令$H_i=G_{U\cup U_i}(i=1,\cdots,t)$是由 $U\cup U_i$ 导出的子图，则

$$p_G(k)=\frac{p_{H_1}(k)\times\cdots\times p_{H_t}(k)}{([k]_r)^{t-1}}$$

特别地，G 的色数是$H_1,\cdots,H_t$ 色数中的最大色数。

⊖ 回忆该子图的顶点是 $V-U$ 中的那些顶点，且在 G_{V-U}中两顶点是邻接的当且仅当在G 中他们是邻接的。

证明：图$H_1,\cdots,H_t$中除那些两两不相交的顶点外都是U的顶点，G的每种k-着色能通过如下方法获得：首先选择H_1的一种k-着色（这种着色存在$p_{H_1}(k)$个，并且现在U的所有顶点着了色），然后完成每一个$H_i(i=2,\cdots,t)$的着色（由引理13.1.9知每一个可用$p_{H_i}(k)/[k]_r$种方法）。 □

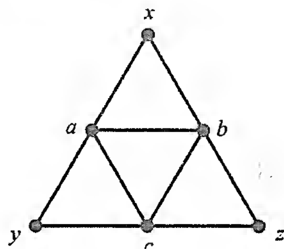


图 13-3

例 设G如图13-3所示，$U=\{a,b,c\}$，应用定理13.1.10，得

$$p_G(k)=\frac{(q(k))^3}{(k(k-1)(k-2))^2}$$

其中，$q(k)$是比4阶完全图少一条边的G'的色多项式，通过简单计算（事实上，再使用定理13.1.10）得到$q(k)=k(k-1)(k-2)^2$，所以

$$p_G(k)=k(k-1)(k-2)^4$$

□

13.2 平面和平面图

设$G=(V,E)$是一个一般平面图，G'是G的一个平面表示，则G'是一个平面图，并且，G'是由平面上的点的集合和曲线的集合组成的。G'的点称为顶点点(vertex-point)，因为它们对应G的顶点，曲线称为边曲线，因为它们对应G的边。同样，一条边曲线α是经过顶点x的一条简单曲线当且仅当G的顶点x与G的边α关联[㊀]。

平面图G'把平面分为若干个区域，这些区域是由一条或更多条边曲线所围成的并且只有一个区域可扩展到无穷远。

例 图13-4所示的平面图有10个顶点、14条边曲线和6个区域，每个区域是由某些边曲线所围成的[㊁]，但是我们应该注意如何对边曲线的边数进行计数。如区域R_2、R_3、R_5和R_6分别是由1条、2条、6条和2条边曲线所围成的。区域R_4是由10条边曲线（而不是4条或7条）所围成的，这是因为当我们沿着R_4的边界行进时，有3条边曲线经过了两次（见图13-4的虚线部分）。区域R_1是由7条边曲线所围成的[㊂]。总之，在计算所围区域的边曲线时，边被计数两次或者是因为每条边曲线是两个不同区域的公共边界或者是因为同一区域中被经过两次。

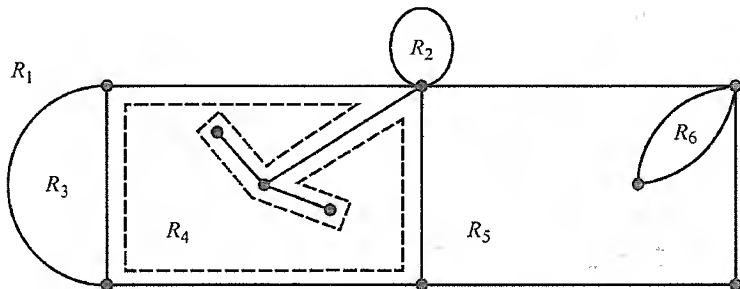


图 13-4

□

㊀ 回顾我们把顶点，点与它对应的顶点，边与它对应的边曲线给相同的标记。

㊁ 因此，一个平面图有点、曲线及现在的区域。

㊂ R_1也许会出现没有被任何边曲线所围，因为它可以各种方向扩展到无限远。然而，画在平面上的几何图形也能看成是画在一个球上的，粗略地讲，我们把一个巨大的球放在图形的上面，然后用平面“包”住球，那么无穷区域现在就是球面上的某有限区域。还要注意一个区域有“内”边界曲线，如R_1和R_4。

设 G' 是有 n 个顶点点、e 条边曲线，r 个区域的平面图，并且设所围区域的边曲线数分别是：

$$f_1, f_2, \cdots, f_r$$

则由上面的例子可以得到以下关系：

$$f_1+f_2+\cdots+f_r=2e \tag{13-3}$$

现在我们可以导出 n、e 和 r 之间的一种关系，特别地，只要 n，e，r 三个数中有两个数确定了，则第三个数也就可以确定了。这种关系就是众所周知的欧拉公式。

定理 13.2.1　设 G 是一个有 e 条边曲线的 n 阶平面图并且假设 G 是连通的，那么 G 把平面分割成的区域数 r 满足

$$r=e-n+2 \tag{13-4}$$

证明： 首先假设 G 是一棵树，则 $e=n-1$ 且 $r=1$（唯一的区域是无穷区域，它的每条边曲线分界两次），因此式（13-4）成立。

现在假设 G 不是一棵树，因为 G 是连通的，所以 G 有生成树 T，T 的顶点数为 $n'=n$，边数为 $e'=n-1$，区域数为 $r'=1$ 且满足 $r'=e'-n'+2$。我们可以设想，从 T 的一条边曲线开始，然后每次添加一条新的边曲线，直到得到 G。每次插入一条新的边曲线就把已经存在的区域分割成两个区域，因此，每次插入另一条边曲线时，e' 增加 1，r' 增加 1，n' 不变（n' 总是 n）。所以，生成树从 $r'=e'-n'+2$ 开始到添加所有余下的边曲线，该关系始终成立。定理证毕。 □

欧拉公式对平面图有一个重要的推论（无环和多重边）。

定理 13.2.2　设 G 是一个连通的平面图。那么存在 G 的一个顶点，它的度至多是 5。

证明： 设 G' 是 G 的一个平面表示。因为图没有环，所以 G' 中没有任何区域是只有一条边曲线作为边界的。类似地，既然图中无多重边，所以也没有任何区域是只有两条边曲线作为边界的（除非 G 只有一条边）。因此式（13-3）中的每个 f_i 满足 $f_i\geqslant 3$，且

$$3r\leqslant 2e;\text{ 即}\frac{2e}{3}\geqslant r$$

通过该不等式，欧拉公式可以化为

$$\frac{2e}{3}\geqslant r=e-n+2,\text{ 即 } e\leqslant 3n-6 \tag{13-5}$$

令 d_1，d_2，…，d_n 为 G 中顶点的度。由定理 11.1.1 可以得到

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2e$$

因此，G 中顶点的平均度满足

$$\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}\leqslant\frac{6n-12}{n}<6$$

既然顶点的平均度小于 6，所以必然有些顶点的度不大于 5。 □

如果图 G 中有一个不是平面图的子图，那么 G 就不是平面的。因此，在试图描述平面图中，更令人感兴趣的是寻找非平面图 G，它的每个子图而不是 G 本身是平面图。

例　一个完全图 K_n 是平面的当且仅当 $n\leqslant 4$。

如果 $n\leqslant4$，那么 K_n 是平面的。现在考虑 K_5。像定理 13.2.2 证明中所表明的那样，一个平面图的顶点数 n 和边数 e 满足 $e\leqslant3n-6$。因为 K_5 有 $n=5$ 个顶点和 $e=10$ 条边，所以 K_5 不是平面的。既然 K_5 不是平面图，所有对于 $n\geqslant5$，K_n 不是平面图。 □

例 一个完全二分图 $K_{p,q}$ 是平面的当且仅当 $p\leqslant2$ 或 $q\leqslant2$

当 $p\leqslant2$ 或 $q\leqslant2$ 时，很容易画出 $K_{p,q}$ 的平面示意图。现在考虑 $K_{3,3}$，因为一个二分图没有任何长度为 3 的圈，所以在一个平面二分图的平面示意图中，每个区域至少被 4 条边曲线所围。按证明定理 13.2.2 那样进行论证，可以得到 $r\leqslant e/2$。应用欧拉公式得

$$\frac{e}{2}\geqslant e-n+2，即\ e\leqslant2n-4$$

既然 $K_{3,3}$ 中有 $n=6$ 个顶点和 $e=9$ 条边，所以 $K_{3,3}$ 不是平面的，从而当 $p\geqslant3$ 和 $q\geqslant3$ 时，$K_{p,q}$ 不是平面的。 □

设 $G=(V,E)$ 是非平面图，$\{x,y\}$ 为 G 中的任意一条边，G' 可从 G 中按下述方法得到：选择一个不属于 V 的新顶点 z，用两条边 $\{x,z\}$ 和 $\{z,y\}$ 取代 $\{x,y\}$。那么我们说 G' 是从 G 中通过*细分边* $\{x, y\}$ 而得到的。如果 G 不是平面的，则 G' 显然也不是平面的[㊀]。如果图 H 能从 G 中通过连续的细分边而获得，那么称 H 是图 G 的一个*细分*。如果 H 是 G 的一个细分，那么可以把 H 看成是通过在 G 中的每条边上插入几个新顶点（也可能没有）而获得的。例如，图 13-5 中的图分别是 $K_{3,3}$ 和 K_5 的细分。可以看出，这些图都不是平面的。

一个非平面图不可能包含一个 K_5 或 $K_{3,3}$ 的一个细分。Kuratowski 的一个著名定理[㊁]就是该结论的逆也成立，下面我们陈述该定理而不加证明。

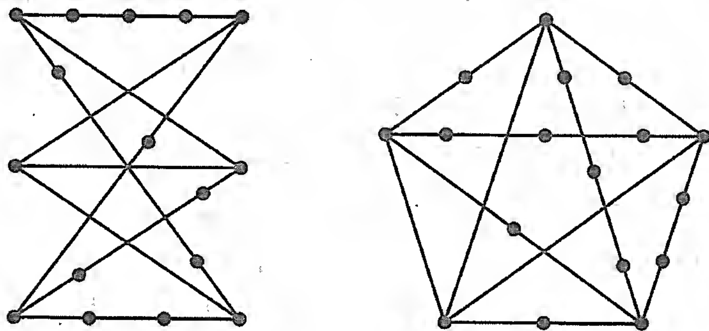


图 13-5

定理 13.2.3 *图 G 是平面的当且仅当 G 不含有 $K_{3,3}$ 或 K_5 的细分的子图。*

粗略地说，定理 13.2.3 说明一个不是平面的图一定有像 $K_{3,3}$ 或 K_5 的一个子图。因此，图 $K_{3,3}$ 和 K_5 只是两个可平面化的界限。Wagner[㊂] Harary 和 Tutte[㊃] 提出，平面图也可以用边的收缩概念代替边的细分来描述。如果图 H 可以从 G 中通过连续收缩边而获得，那么 H 是图 G 的一个*收缩*。

定理 13.2.4 *图 G 是平面的当且仅当 G 不含有一个收缩到 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图。*

㊀ 如果存在 G' 的一个平面表示，则通过“删去”顶点 z，我们得到 G 的一个平面表示。

㊁ K. Kuratowski: Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, 15 (1930), 271-283。

㊂ K. Wagner: Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.*, 114 (1937), 570-590。

㊃ F. Harary and W. T. Tutte: A dual form of Kuratowski's theorem, *Canadian Math. Bull.*, 8(1965), 17-20。

13.3　五色定理

本节，我们将证明一个平面图的色数至多是 5。此问题是由P. J. Heawood 于 1890 年发现A. Kempe 在 1879 年发表的一个证明（在这篇文章里，他提出一个平面图的色数至多是 4）中的错误而首先证明的。尽管A. Kempe 的证明是错误的，但是它包含了很好的思想，Heawood 在证明他的 5 色定理时也用到了该思想。正如本节和 1.4 节所介绍的那样，每个平面图的色数不超过 4 的证明现在人们已经获得，但是该证明依赖于计算机大量的检验。

用定理 13.2.2，我们很容易证明一个平面图 G 的色数至多是 6。事实上，假设存在一个平面图 G，它的色数不小于 6 并且设 G 是这种顶点数最少的图。由定理 13.2.2，我们知道 G 有一个顶点 x 的度至多是 5。从图 G 中去掉 x（以及与其关联的边）得到少一个顶点的平面图 G'，由 G 中顶点数是最少的假设可知图 G' 有一个 5-着色。因为 G 中与顶点 x 邻接的顶点数不超过 5，所以可以取 G' 有一个 5-着色并且指定 x 一种颜色，使得产生 G 的一个 5-着色，于是推出一个矛盾，从而得到每个平面图的色数不超过 6。要证明一个平面图着色可用 5 色就更难了，但是还是可以的。然而，从 5 色进至 4 色则相当困难。

在证明 5 种颜色足以对任何平面图的顶点进行着色之前，我们先做一些分析。在上一节中，已经证明了一个 5 阶完全图 K_5 不是平面的，因此，一个平面图不能包含每对顶点都是邻接的 5 个顶点，于是，得到每个平面图有 5-着色的结论是错误的。例如，用 3 代替 5，一个 5 阶的循环图 C_5 没有 K_3 作为子图，然而它的色数是 3 且没有 2-着色。所以不能简单地说不存在 5 个顶点使得每个顶点被指定不同的颜色，因此，4-着色是可能的。

下面的定理在五色定理的证明中是非常重要的一步，它应用到非平面图及平面图中。

定理 13.3.1　*设图 $H=(U,F)$ 的顶点存在一种已知的 k-着色，两种颜色为红色和蓝色，W 是 U 中顶点的子集，这些顶点被指定为红色或蓝色，$H_{r,b}$ 是由 W 中顶点导出的 H 的子图，$C_{r,b}$ 是 $H_{r,b}$ 的一个连通分支。把 $H_{r,b}$ 中顶点指定的红色和蓝色互换，则得到 H 的另一个 k-着色。*

证明：假设存在两个着相同颜色的邻接顶点，那么颜色一定是红色或蓝色，比如红色，如果 x 和 y 是 $C_{r,b}$ 中的两个顶点，那么在转换颜色之前，x 和 y 着蓝色是不可能的。如果 x 和 y 都不是 $C_{r,b}$ 中的顶点，那么它们的颜色不变，于是它们开始用红色又是不可能的，因此 x 和 y 有一个是 $C_{r,b}$ 中的顶点而另一个不是，比如说 x 属于 $C_{r,b}$ 而 y 不属于 $C_{r,b}$，所以开始 x 用蓝色，y 用红色。因为 x 和 y 是邻接的，一个被指定为红色，另一个被指定为蓝色，所以它们一定是在 $H_{r,b}$ 的同一个连通分支里，这同 x 属于 $C_{r,b}$ 而 y 不属于矛盾。　□

定理 13.3.2　*一个平面图的色数至多是 5。*

证明：设 G 是一个 n 阶平面图。如果 $n\leqslant 5$，那么 $\chi(G)\leqslant 5$。现在设 $n>5$，并且对 n 用归纳法证明定理。假设把 G 作为一个平面图画在平面上，由定理 13.2.2 知，存在一个顶点 x，它的度至多是 5。设 H 是 G 的 $n-1$ 阶子图，并且是由那些不同于 x 的顶点导出的，由归纳假设存在一个 H 的 5-着色。如果 x 的度等于或小于 4，那么我们能指定 5 种颜色之一给 x 而获得 G 的 5-着色[⊖]。现在假设 x 的度为 5，那么存在 5 个顶点与 x 邻接，如果这些顶点中有两个被指定为相同色，那么为了获得 G 的一个 5-着色，跟上面一样存在一种可

⊖ 这正好像我们的证明：6 种颜色足以给一个平面图的顶点着色，但对于 5-着色，我们还没有证明，因为现在必须讨论 x 有 5 度的情况。

分配给 x 的颜色。因此，现在进一步假设与 x 邻接的每个顶点y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 被指定为不同颜色。像图 13-6 所示的那样，围绕顶点 x 按顺序标号顶点y_1, y_2, y_3, y_4, y_5，颜色是数1，2,3,4,5，且y_j 着色 $j(j=1,2,3,4,5)$。

考虑由颜色 1 和 3 的顶点导出的 H 的子图$H_{1,3}$，如果 y_1 和 y_3 属于 $H_{1,3}$的不相同的连通分支，那么把引理 13.1.1 应用到 H 上得到一个y_1 和 y_3 着相同色的 5-着色，这样为 x 空出一种颜色并且获得 G 的 5-着色。现在假设 y_1 和 y_3 属于 $H_{1,3}$的同一连通分支，那么在 H 中存在一条连接 y_1 和 y_3 的路径，使得在该路径上顶点的颜色在 1 和 3 之间交替。沿着连接 x 与y_1 和 x 与y_3 曲线边的路径确定一条闭曲线 γ，与 x 邻接的剩下三个顶点y_2，y_4，y_5 当中，一个是在 γ 里面，另外两个在 γ 外面或以别的方式环绕，见图 13-7，在该图中，y_4 和 y_5 在外面。现在考虑由颜色 2 和 4 的顶点导出的 H 的子图$H_{2,4}$，但顶点 y_2 和 y_4（见图 13-7）不可能属于 $H_{2,4}$的同一连通分支，因为 y_2 是在一条简单闭曲线的内部，y_4 在该曲线的外部。在含有 y_2 的 $H_{2,4}$中的连通分支里，交换顶点颜色 2 和 4，由引理 13.1.1 得到 H 的一个 5-着色，在该着色中与 x 邻接的顶点没有一个被指定为颜色 2。现在我们指定 x 为颜色 2 而得到 G 的一个 5-着色。 □

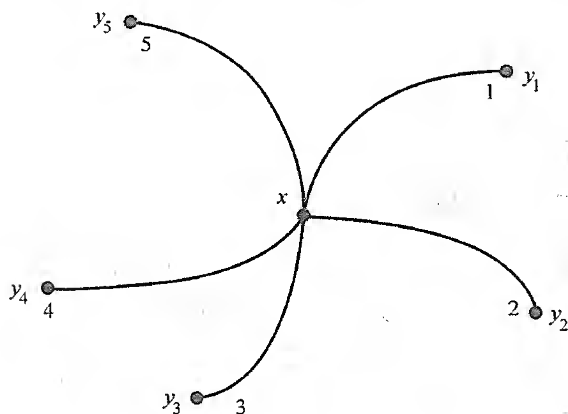


图 13-6

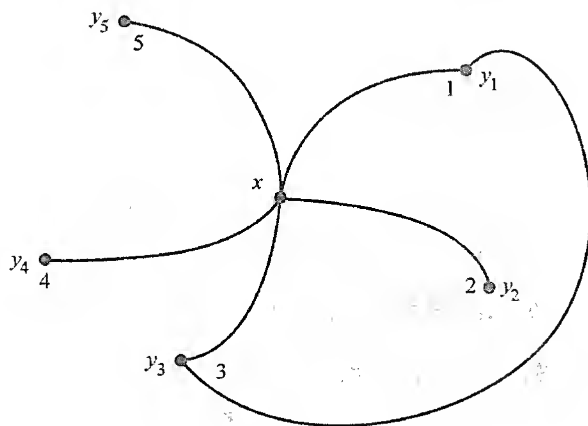


图 13-7

1943 年，Hadwiger[⊖]提出了一个关于图的色数猜想，该猜想除少数几种情况外，一直未得到解决，这不足为奇，因为该猜想的一个真实实例等价于任何平面图 4-着色的存在性。猜想断言：色数满足$\chi(G)\geqslant p$ 的连通图 G 能收缩到 K_p。等价地，如果 G 不能收缩到 K_p，那么$\chi(G)<p$ 。该猜想的逆命题为假，即：有可能一个图收缩到 K_p，而色数小于 p。例如，它的边能排成一个圈的 4 阶图有色数 2，然而图本身能收缩到 K_3。

定理 13.3.3 Hadwiger 猜想对于 $p=5$ 成立当且仅当每个平面图有一个 4-着色。

部分证明：我们只证明，如果 Hadwiger 猜想对 $p=5$ 成立，那么每个平面图 G 有一个 4-着色。设 G 是一个平面图并且假设G 能收缩到K_5，因为平面图的收缩还是平面图，这就推出 K_5 是平面的，从而得到一条假命题，因此 G 不能收缩到K_5，所以 Hadwiger 猜想对于 $p=5$ 为真推出$\chi(G)\leqslant 4$。 □

我们已经知道，Hadwiger 猜想对于 $p\leqslant 4$ 和 $p=6$ 为真，在下面的定理中，证明 Hadwiger 猜想对于 $p=2$，3 的情形，至于 $p=4$ 的情形留作习题。

⊖ H. Hadwiger: Über eine Klassifikation der streckenkomplexe, *Vierteljschr. Naturforsch. Ges.*, *Zurich*, 88(1943), 133-142。

定理13.3.4 设 $p\leqslant 3$，如果 G 是有色数 $\chi(G)\geqslant p$ 的一个连通图，那么 G 能收缩到 K_p。

证明：如果 $p=1$，那么通过每条边的收缩得到 K_1。如果 $p=2$，那么 G 至少有一条边 α，除 α 外收缩所有边得到 K_2。现在假设 $p=3$，$\chi(G)\geqslant 3$，那么 G 不是二分图，由定理11.4.1知 G 有一条长度为奇数的圈，设 γ 是 G 中一条长度最小的奇数圈，则只有连接 γ 中顶点的边才是 γ 的边，否则我们能找一条长度比 γ 更短的奇数圈，除 γ 中的边外，收缩 G 中所有的边而得到 γ。我们可以进一步收缩边，直到获得 K_3。 □

13.4 独立数和团数

设 $G=(V, E)$ 是 n 阶图，如果 G 的顶点集合 U 中任何两个顶点都不邻接（等价于由 U 中的顶点导出的 G 的子集 G_U 是一个零图），则称它为*独立集*[⊖]。因此，色数 $\chi(G)$ 等于使得 G 的顶点能被分成 k 个独立集的最小整数 k。一个独立集的每个子集也是独立集，因而我们寻求大的独立集，在一个独立集中顶点的最大个数称为图 G 的*独立数*，用 $\alpha(G)$ 表示，独立数是在 G 的顶点着色中着相同色的顶点的最大个数。推论13.1.3能重新表示为：

$$\chi(G)\geqslant\left\lceil\frac{n}{\alpha(G)}\right\rceil$$

对于一个零图 N_n，完全图 K_n，完全二分图 $K_{m,n}$ 我们有

$$\alpha(N_n)=n, \alpha(K_n)=1, \alpha(K_{m,n})=\max\{m, n\}$$

一般来说，求一个图的独立数是一个非常难的计算问题。

例 设图 G 如图13-8所示，那么 $\{a,e\}$ 是一个独立集，它不是任何一个更大的独立集的子集。同样 $\{b,c,d\}$ 是具有相同性质的独立集，任意4个顶点当中，有两个是邻接的，因此，$\alpha(G)=3$。 □

例 某动物园希望把各种动物放在同一个围栏里，显然，如果一种动物捕食另一种动物，那么两者不应该放在同一个围栏里。问能放在一个围栏里的最大的动物种数是多少？

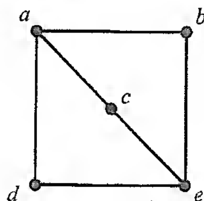


图 13-8

我们建一个*动物园图* G，它的顶点是动物园里的不同种的动物，在两种动物之间放一条边当且仅当它们当中一种捕食另一种。能放在同一个围栏里的动物的最大种数等于 G 的独立数 $\alpha(G)$。为了容纳所有种类的动物，需要多少围栏？答案是 G 的色数 $\chi(G)$。 □

例（*8王后问题*） 考虑一个8×8的棋盘，作为王后的棋子是已知的，在下棋时，王后能攻击位于它的行或列上的任何棋子，或者包含它的两条对角线上的任何一个棋子。如果9个王后放在棋盘上，则必然有两个位于同一行上并因此而互相攻击。问放8个王后在棋盘上以致没有任何王后能互相攻击是否可能？

设 G 是棋盘的*王后图*，G 的顶点就是棋盘上的方格，满足有两个方格邻接当且仅当放在某个方格上的王后能攻击放在另一个方格上的王后。因此，我们的问题是问王后图的独立数是否等于8。事实上，$\alpha(G)=8$ 并且存在92种不同方案把8个非攻击王后放在棋盘上。其方案之一如图13-9所示。 □

⊖ 有时也称稳定的。

设$G=(V,E)$是一个图，U 是顶点的独立集，并且不是任何更大独立集的子集。因此，U 中任何两个顶点都不是邻接的。不在 U 中的每个顶点至少与 U 中一个顶点邻接[⊖]，具有这种性质的顶点集合称为一个控制集。严格地说，设 W 是 G 的一个顶点集，如果不在 W 中的每个顶点至少与 W 中一个顶点邻接，则称 W 为一个控制集。W 中的顶点可以是邻接的也可以是非邻接的。显然，如果 W 是一个控制集，则包含 W 的任何顶点集也是一个控制集，现在的问题是找一个控制集中最少的顶点数，在一个控制集中最少的顶点数称为 G 的控制数，用 dom（G）表示。

例 考虑一栋建筑物（也许是收藏艺术品的美术馆），它是由许多复杂的走廊构成的。人们的愿望是整个建筑物放某些看守使得建筑物的每个部分都在看守可见的范围内，从而至少要一个看守保护。问需要雇用多少看守保护建筑物？

构造一个图 G，它的顶点是两个或两个以上走廊的结合处或者一个走廊的端点，它的边为对应的走廊，例如，我们也许有如图 13-10 所示的走廊图，能保护这座建筑物的最少看守人数等于 G 的控制数 dom（G）。对于图 13-10 中的图 G，不难检查 dom（G）$=2$，$\{a, b\}$是 2 个顶点的控制集。 □

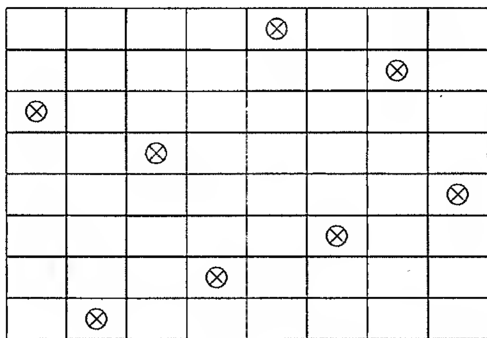


图 13-9

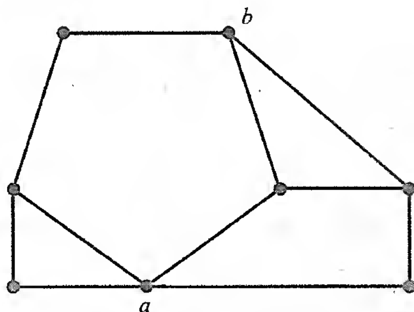


图 13-10

对于零图、完全图、完全二分图，我们有

$$\mathrm{dom}(N_n)=n, \mathrm{dom}(K_n)=1, \mathrm{dom}(K_{m,n})=2 \quad (m,n\geqslant 2)$$

一般情况下，计算一个图的控制数是非常困难的。一个非连通图的控制数显然是它的连通分支控制数的和。对于一个连通图，我们有简单的不等式。

定理 13.4.1 设 G 是一个阶为 $n\geqslant 2$ 的连通图，则

$$\mathrm{dom}(G)\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

证明：设 T 是 G 的一棵生成树，则

$$\mathrm{dom}(G)\leqslant\mathrm{dom}(T)$$

因此，对 $n\geqslant 2$ 阶树证明不等式就足够了。我们对 n 使用归纳法。如果 $n=2$，则 T 的每个顶点都是一个控制集，因此，$\mathrm{dom}(T)=1=\left[\frac{2}{2}\right]$。现在假设$n\geqslant 3$，令 y 是与一个悬挂顶点 x 邻接的一个顶点，T^* 是从 T 中删除顶点 y 和所有与 y 关联的边而获得的图。T^* 的连通分支

⊖ 如果不存在，则可以扩大 U。

是树且在这些树中至少有一棵树的阶为 1。设$T_1,\cdots,T_k$是阶至少为 2 的树，它们的阶分别为$n_1\geqslant 2,\cdots,n_k\geqslant 2$，此时 $n_1+\cdots+n_k\leqslant n-2$ 。由归纳假设，每个 T_i 有一个大小至多为$\lfloor n_i/2\rfloor$的控制集，这些控制集与 y 的并给出了一个 T 的大小至多为

$$1+\left\lfloor\frac{n_1}{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n_k}{2}\right\rfloor\leqslant 1+\left\lfloor\frac{n_1+\cdots+n_k}{2}\right\rfloor\leqslant 1+\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

的控制集。 □

图 G 中的一个团定义为每对顶点都是邻接顶点的一个子集 U(等价于由 U 导出的子图是完全图),在一个团中顶点的最大个数称为 G 的团数,记为 $\omega(G)$。对于零图、完全图、完全二分图,我们有

$$\omega(N_n)=1,\omega(K_n)=n,\omega(K_{m,n})=2$$

一个图中团的概念在下述意义下与独立集是“互补的”。设$\overline{G}=(V,\overline{E})$是 G 的补图，回顾 G 的补图跟G 有相同的顶点集并且 $\overline{G}$ 中两个顶点是邻接的当且仅当它们在 G 中不是邻接的。从定义得到，对 V 的一个子集 U，U 是G 的一个独立集当且仅当 U 是 $\overline{G}$ 的一个团，U 是G 的一个团当且仅当 U 是 $\overline{G}$ 的一个独立集，特别地

$$\alpha(G)=\omega(\overline{G}),\omega(G)=\alpha(\overline{G})$$

色数和团数的关系由下述不等式给出（参看定理 13.1.2）

$$\chi(G)\geqslant\omega(G) \tag{13-6}$$

至少有一条边的每个二分图满足$\chi(G)=\omega(G)=2$ 。阶为$n>3$ 的奇数且在一条圈里有 n 条边的一个循环图 C_n 满足$\chi(C_n)=3>2=\omega(C_n)$。

因为独立集与团是互补的概念，又因为一个顶点着色是图的顶点划分成独立集的一个划分，所以很自然考虑顶点着色的互补概念。在顶点着色的定义里用团取代独立集，则得到如下概念。图 G 的一个团划分就是它的顶点被划分成团的一个划分，G 中一个团划分的最小团数定义为G 的团划分数，用 θ（G）表示。因此，我们有

$$\chi(G)=\theta(\overline{G}),\theta(G)=\chi(\overline{G})$$

对于式（13-6）的不等式“补式”是

$$\theta(G)\geqslant\alpha(G) \tag{13-7}$$

该不等式成立是因为两个非邻接顶点不能在同一个团里。

很自然要考察哪些图对于式（13-6）等号（图的色数等于它的团数）成立和哪些图对于式（13-7）等号（图的团划分数等于它的独立数）成立，并且对于这两个不等式等号成立的图也不必太特殊，例如，设 H 是色数等于p 的任意图（因此，$\omega(H)\leqslant p$)。设 G 是有两个连通分支的图，一个分支是 H，另一个是 K_p，那么$\chi(G)=p,\omega(G)=p$,因此，不管 H 的结构如何，式（13-6）的等号都成立。要求式（13-6）不仅对 G 成立，而且对 G 的每个导出子图成立，则可以强加某些结构。

如果对图 G 的每个导出子图H 有$\chi(H)=\omega(H)$，则称图 G 是χ-完美的。如果对图 G

的每个导出子图 H 有$\theta(H)=\alpha(H)$，则称图 G 是 θ-完美的。1961 年 Berge[㊀]提出了一个猜想：只存在一种完美性。1972 年 Lovász[㊁]给出了它的证明。我们陈述该定理而不加证明。

定理 13.4.2 图 G 是χ-完美的当且仅当它是 θ-完美的。等价地，G 是 χ-完美的当且仅当 $\overline{G}$ 是χ-完美的。

作为该定理的结果，我们现在考察完美图并且给出一大类的完美图的存在性。

设$G=(V,E)$是一个图，G 中一条圈的弦是连接该圈中两个非连续顶点的一条边，因此，一条弦是连接圈的两个顶点的一条边，但它自已不是圈的边。长度为 3 的圈不可能有任何弦。如果长度比 3 大的每个圈都有一条弦，那么称该图为弦图。一个弦图没有任何无弦圈，一个弦图的导出子图也是弦图。

例 完全图和所有二分图都是完美的。一个完全图 K_n 是弦图，因为每一个是树[㊂]。一个完全二分图$K_{m,n}(m\geqslant 2,n\geqslant 2)$不是弦图，因为这种图有一条长度为 4 的无弦圈。从一个完全图 K_n 中删除一条边而获得的图是一个弦图，因为 K_n 中每一条长度大于 3 的圈至少有两条弦。 □

考虑由直线上的区间产生的一类特殊的弦图。实直线上的一个闭区间可用

$$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$$

表示，设

$$I_1=[a_1,b_1],I_2=[a_2,b_2],\cdots,I_n=[a_n,b_n] \tag{13-8}$$

是一系列闭区间，G 是一个图，它的顶点集合为$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$，其中，两个区间 I_i 和 I_j 是邻接的当且仅当$I_i\cap I_j\neq\varnothing$，这种图 G 称为区间图并且与区间图同构的任何图也称为区间图，因此，一个区间图的顶点能看成是有两个顶点邻接的区间当且仅当这些区间至少有一个公共点。

例 完全图 K_n 是一个区间图，选区间（13-8）为：

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<b_n<\cdots<b_2<b_1$$

如果$i\neq j$ 且$i<j$ ，则$I_j\subset I_i$ ，因此，$I_i\cap I_j\neq\varnothing$，故区间图是一个完全图。

现在设 G 是从K_4 中删除一条边而获得的 4 阶图，选区间（13-8）（$n=4$）为：

$$a_4<a_1<a_3<b_4<a_2<b_1<b_2<b_3$$

除区间 I_2 和 I_4 外，每一对区间有一个非空交集。 □

定理 13.4.3 每个区间图都是弦图。

证明：设 G 是有区间$I_1,I_2,\cdots,I_n$ 的区间图，假设 $k>3$，并设

$$I_{j1}-I_{j2}-\cdots-I_{jk}-I_{j1}$$

是一个长度为 k 的圈。我们将证明该圈中至少存在一个区间与圈中相隔两个区间远的区间有非

㊀ C. Berge: Färbung von Graphen, deren Sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ.*, *Halle-Wittenberg Math. -Natur, Reihe*(1961), 114-115。

㊁ L. Lovász: Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.*, 2(1972), 253-267。

㊂ 如果图没有任何圈，则它一定不可能有一条无弦圈。

空交集。假定该结论不对,那么将会得到一个矛盾。假设 I_m, I_p, I_q, I_r 是上述圈中连续的四个区间,满足 $I_m \cap I_q = \varnothing$ 和 $I_p \cap I_r = \varnothing$ 且使得没有弦连接 I_m, I_q 和 I_p, I_r 。于是

$$I_m \cap I_p \neq \varnothing, I_p \cap I_q \neq \varnothing \; I_q \cap I_r \neq \varnothing, I_m \cap I_q = \varnothing, I_p \cap I_r = \varnothing$$

如果 $a_q < a_p$ 且 $b_p < b_q$,则 $I_p \subset I_q$,从而 $\varnothing \neq I_m \cap I_p \subset I_m \cap I_q$,矛盾。对 $a_p \leqslant a_q$ 或者 $b_q \leqslant b_p$,如果 $a_p \leqslant a_q$ 那么 $a_q \leqslant a_r$,如果 $b_q \leqslant b_p$,则 $b_r \leqslant b_q$。因此,对圈上三个连续的区间 I_p, I_q, I_r,有

$$a_p \leqslant a_q \leqslant a_r \text{ 或者 } b_r \leqslant b_q \leqslant b_p \tag{13-9}$$

令 $p = j_1$,先假设 $a_{j1} \leqslant a_{j2}$,那么重复使用式(13-9)得

$$a_{j1} \leqslant a_{j2} \leqslant \cdots \leqslant a_{jk} \leqslant a_{j1}$$

于是得到所有的区间有相同的左端点。如果 $b_{j2} \leqslant b_{j1}$,那么我们用类似的方法可以得到所有区间有相同的右端点。不论是哪一种情况,圈中的所有区间有一个公共点,这与我们的假设圈中相隔两个的区间没有公共点相矛盾,该矛盾就证明了定理的正确性。 □

本节最后,我们将证明弦图从而区间图是完美的。在该证明中我们使用了两个引理,回顾图 $G=(V, E)$ 的顶点子集 U,如果由不在 U 中的顶点导出的子图 G_{V-U} 是非连通的,那么子集 U 是一个关节集。第一个引理证明:如果某些更小的导出图具有这种性质,那么图的色数等于它的团数。

引理 13.4.4 设 $G=(V,E)$ 是连通图,U 是它的关节集,且使得由 U 导出的子图 G_U 是一个完全图。导出子图 G_{V-U} 中的连通分支为 $G_1=(U_1,E_1),\cdots,G_t=(U_t,E_t)$,假设导出子图 $G_{U_i \cup U}$ 满足

$$\chi(G_{U_i \cup U}) = \omega(G_{U_i \cup U}) \quad (i=1, 2, \cdots, t)$$

那么

$$\chi(G) = \omega(G)$$

证明: 令 $k = \omega(G)$。因为 $G_{U_i \cup U}$ 的每一个团也是 G 的团,所以

$$\omega(G_{U_i \cup U}) \leqslant k \qquad (i=1, 2, \cdots, t)$$

因为在不同的 U_i 中的顶点是不相邻接的,所以对某些 j,G 的每一个团也是 $G_{U_j \cup U}$ 的团,因此,至少存在一个 j 满足

$$\omega(G_{U_j \cup U}) = k$$

根据假设和定理 13.1.10 得

$$\begin{aligned} \chi(G) &= \max\{\chi(G_{U_1 \cup U}), \cdots, \chi(G_{U_t \cup U})\} \\ &= \max\{\omega(G_{U_1 \cup U}), \cdots, \omega(G_{U_t \cup U})\} \\ &= k = \omega(G) \end{aligned}$$

□

假如对关节集 U 的所有子集 $W \subseteq U$,但是 $W \neq U$,W 不是关节集,那么 U 是一个极小关节集。在下一个定理中我们将证明弦图中的极小关节集将导出一个完全子图。

定理 13.4.5 设 $G=(V, E)$ 是一个连通的弦图,U 是它的一个极小关节集,那么由 U 导出的子图 G_U 是一个完全图。

证明： 假设该结论不成立，即 G_U 不是完全图，那么我们将得到一个矛盾。设 a 和 b 是 U 中两个不邻接的顶点。因为 U 是关节集，那么图 G_{V-U} 至少有两个连通分支 $G_1=(U_1,E_1)$ 和 $G_2=(U_2,E_2)$。如果 a 不与 G_1 中的任何顶点邻接，那么得到 $U-\{a\}$ 也是一个关节集，而 U 已经是极小关节集了，所以，a 必定至少与 U_1 中一个顶点邻接。类似地，我们可证明 a 至少与 U_2 中的一个顶点邻接。对 b 也有同样的结论：b 至少与 U_1 的一个顶点邻接且至少与 U_2 的一个顶点邻接。因为 G_1 和 G_2 是连通的，所以存在一条连接 a 到 b 的路径 γ_1，该路径中不同于 a 和 b 的所有顶点属于 U_1，同样存在一条连接 b 到 a 的链 γ_2，该路径中不同于 a 和 b 的所有顶点属于 U_2，我们可以选择 γ_1 和 γ_2 使其长度最短，由此得到 γ_2 在 γ_1 后面，

$$\gamma=\gamma_1,\ \gamma_2$$

它是 G 中的一条圈而且长度不小于4，此外，我们选择的 γ_1 和 γ_2 具有最短的长度，所以，γ 的弦只可能是连接 a 和 b 的边，因为选择的 a 和 b 是非邻接的，所以，我们推出 γ 没有弦，这与 G 是弦图矛盾。证毕。 □

现在我们来证明弦图是完美的。

定理 13.4.6 每个弦图都是完美的。

证明： 因为一个弦图的导出子图也是弦图，所以只需证明对一个弦图 G 满足 $\chi(G)=\omega(G)$ 就足够了。

设 G 是一个 n 阶弦图，对 n 用归纳法证明：

$$\chi(G)=\omega(G)$$

因为完全图是完美的，所以假设 G 不是完全图，这样 G 就应该有一个极小关节集 U，由定理 13.4.5 知 G_U 是一个完全图，设 $G_1=(U_1,E_1),\cdots,G_t=(U_t,E_t)$ 是 G_{V-U} 中的连通分支，根据归纳假设，每个图 $G_{U_i\cup U}$ 满足

$$\chi(G_{U_i\cup U})=\omega(G_{U_i\cup U})\qquad(i=1,2,\cdots,t)$$

应用引理 13.4.4 便推出 $\chi(G)=\omega(G)$。 □

从定理 13.4.3 和定理 13.4.6 我们立即获得下面的推论：

推论 13.4.7 每个区间图都是完美的。

试图刻画完美图的特征已做了大量的尝试工作，这些尝试大都是直接针对解决下列 Berge[⊖] 猜想的：

图 G 是完美的当且仅当 G 及它的补图 $\overline{G}$ 都没有一个长度大于3的奇数的圈并且也没有任何弦的导出子图。

如果图 G 或者其补图 $\overline{G}$ 有一个长度大于3且是奇数的无弦圈的导出子图，那么 G 不是完美的。它的证明留作练习。

13.5 连通性

图要么是连通的要么是不连通的。但是显然有些连通图比其他的连通图更加“连通”。

⊖ C. Berge: Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ., Halle-Wittenberg Math.-Natur, Reihe* (1961), 114-115。

例 我们可以通过判断使一个图不连通的难易程度来判断图的连通程度，但是，如何判断使一个图不连通的难易程度呢？有两种自然的方法。例如，考虑形成一个路径的 $n \geqslant 3$ 阶的一棵树，如果我们取一个不是链的两端的顶点并且删除它（当然，要删除了两个关联的边），结果得到一个非连通图。事实上，此种情况的树中路径不是特殊的。对于任何树，删除一个非悬挂顶点，都将得到一个非连通图。因此，树不是非常连通的，为了使它成为非连通图只需删除它的一个顶点。如果不是删除顶点（及其关联的边）而是边（不删除任何顶点），那么树仍然是非连通的，即：删除任何一条边都将得到一个非连通图。相反，对一个 n 阶完全图 K_n，删除顶点它还是连通的，因为删除顶点总是留下一个更小的完全图。如果是删除边而不是顶点，那么可以使 K_n 不连通。如果删除与一个特定顶点关联的所有 $n-1$ 条边，那么得到一个非连通图[㊀]。经过简单的计算便知删除少于 $n-1$ 条边 K_n 仍是连通的。因此，通过两种计算方法[㊁]中的任意一种方法都可得知完全图 K_n 是非常连通的。 □

为了简化解释，在本节的余下部分，假设所有图的阶为 $n \geqslant 2$。

设 $G=(V,E)$ 是一个 n 阶图。如果 G 是完全图 K_n，那么我们定义它的顶点连通度为

$$\kappa(K_n)=n-1$$

否则，定义它的顶点连通度为

$$\kappa(G)=\min\{|U|:G_{V-U}\text{是非连通的}\}$$

即最小顶点数。删除这些顶点便是非连通图。同样，一个非完全图的连通度等于极小关节集的元素个数，一个非完全连通图中存在一对非邻接顶点 a 和 b，将图中 a 和 b 之外的顶点全部删除，便得到一个非连通图，因此，如果 G 是一个 n 阶非完全图，则 $\kappa(G) \leqslant n-2$。非连通图的连通度显然为 0，因此，有如下基本结论：

定理 13.5.1 *设 G 是一个 n 阶图，那么*

$$0 \leqslant \kappa(G) \leqslant n-1$$

左边的等号成立当且仅当 G 是非连通的，右边的等号成立当且仅当 G 是一个完全图。

图 G 的边连通度定义为从图 G 中删除边而使 G 非连通的最小边数，用 $\lambda(G)$ 表示。一个非连通图 G 的边连通度满足 $\lambda(G)=0$。一个连通图 G 的边连通度为 1 当且仅当它有一个桥。一个完全图 K_n 的边连通度为 $n-1$。如果将一个图中与某个特定的顶点 x 相关联的所有边删除，显然得到一个非连通图，因此，图 G 的边连通度满足 $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$，其中，$\delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度。下面的定理描述了边连通度和顶点连通度之间的基本关系[㊂]。

定理 13.5.2 *对每个图 G，有*

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

㊀ 事实上一个 K_{n-1} 和一个顶点从它中分离出来。

㊁ 而且，正如我们期望的，对于用任何度量图的连通程度的合理的方法，完全图 K_n 都是非常连通的。

㊂ 该定理首先由 H. Whitney 证明：Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American J. Math.*, 54 (1932), 150-168。下面给出的证明源自 R. A. Brualdi 和 J. Csima, A note on vertex-and edge-connectivity, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 2 (1991), 67-70。

证明：前面已经证明了上面不等式的后半部分，现在我们证明前半部分。设 G 为 n 阶，如果 G 是一个完全图 K_n，则 $\kappa(G)=\lambda(G)=n-1$。下面我们假设 G 不是完全图，如果 G 是非连通的，因为 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$，所以不等式成立。现在假设 G 是连通的，F 为 $\lambda(G)$ 条边组成的集合，删除这些边将得到一个非连通图 H。于是 H 含有两个连通分支[㊀]，分别有顶点集 V_1 和 V_2，其中，$|V_1|+|V_2|=n$。如果 F 是由连接 V_1 中顶点与 V_2 中顶点的所有边构成的，那么 $|F|\geqslant n-1$，因此，$\lambda(G)=n-1$，得到 G 是完全图，这与假设矛盾。所以在 V_1 中存在顶点 a，V_2 中存在顶点 b，使得 a 和 b 在 G 中是不邻接的。对 F 中每条边 α，我们如此选择一个顶点：如果 a 是 α 的一个顶点，那么选择 α 的另一个顶点（在 V_2 中的那一个），否则选择 α 在 V_1 中的顶点。这样得到的顶点集 U 满足 $|U|\leqslant|F|$，而且将顶点集 U 从 G 中删除，将得到一个非连通图，因为不可能存在从 a 到 b 的路径。因此

$$\kappa(G)\leqslant|U|\leqslant|F|=\lambda(G)$$

证毕。 □

例　假设某通信系统有 N 个工作站[㊁]，某些工作站是通过直接通信线路相连的，并且假设该系统是连通的，即每个工作站能通过中间的通信链路与其他每个工作站通信。因此，就有一个自然的 n 阶连通图 G（顶点对应工作站，边对应直接连接）。连接可能出现错误而失败，工作站也有可能关闭，这都将影响通信。G 的顶点连通度和边连通度与系统的可靠性密切相关。事实上，多达 $\kappa(G)-1$ 个工作站可以被关闭，而剩下的在它们当中仍然可以正常通信。多达 $\lambda(G)-1$ 个连接可能出现错误而所有的工作站仍然能够互相通信。 □

设 G 是一个图，那么 G 是连通的当且仅当它的顶点连通度满足 $\kappa(G)\geqslant 1$，如果 k 是一个整数且 $\kappa(G)\geqslant k$，则称 G 为 *k-连通的*。因此，1-连通图是连通图。注意，如果图是 κ-连通的，那么它也是 $(k-1)$-连通的。图的顶点连通度等于使图为 k-连通的最大整数 k。在本节的剩下部分我们将研究 2-连通图的结构，特别证明图的边（一般不是顶点）将自然被分成“2-连通分支”[㊂]。我们定义图 G 的一个*关节顶点*为一个顶点 a 使得删除该顶点便使 G 不连通，即使得 $\{a\}$ 是一个关节集的一个顶点。

定理 13.5.3　*设 G 是一个 $n\geqslant 3$ 阶图，则下面三个论断是等价的：*

ⅰ）G 是 2-连通的。

ⅱ）G 是连通的且没有关节顶点。

ⅲ）对每三个顶点 a,b,c，都存在一条连接 a 和 b 而不含 c 的路径。

证明：如果 $\kappa(G)\geqslant 2$，则 G 是连通的且没有一个关节顶点。反之，因为 $n\geqslant 3$，如果 G 是连通的且没有关节顶点，那么 $\kappa(G)\geqslant 2$，因此断言ⅰ）和ⅱ）是等价的。

现在假设ⅱ）成立。设 a，b，c 为三个顶点。因为 G 没有关节顶点，那么删除 c 不会使 G 不连通，所以存在一个连接 a 和 b 而不含 c 的路径，从而断言ⅲ）成立。反之，假设ⅲ）成立，显然 G 是连通的。假设 c 是 G 的一个关节顶点，删除 c 将导致 G 不连通，于是，从不同的连通分支中选择 a 和 b，这与ⅲ）矛盾。因此 G 没有关节顶点，即ⅱ）成

㊀ 假如有多于两个的分支，那么就能通过移去更少的边而使 G 不连通。

㊁ 或者，我们可以在一台计算机中有 n 个芯片。

㊂ 由于 1-连通的含义就是连通，因此我们知道，一个图的顶点及它的边自然被化分成 1-连通部分，即其连通分支。当考虑 2-连通部分时，我们只得到边的一个自然划分。

立，从而证明了 ii)和 iii)是等价的。 □

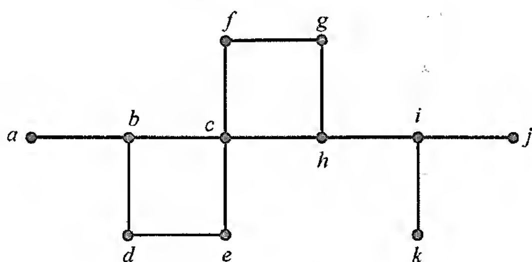


图 13-11

在定理 13.5.3 中，假设 $n\geqslant 3$ 是因为完全图 K_2 是连通的并且没有关节顶点，即满足 ii),但不满足 i),因为 $\kappa\ (k_2)\ =1$。

设$G=(V,E)$是 $n\geqslant 2$ 阶连通图。我们定义 G 的块为连通的且没有任何关节顶点的 G 的极大导出子图，更精确地讲，令 U 为 G 的顶点集的一个子集，如果G_U是连通的且没有任何关节顶点，并且对 G 的所有满足 $U\subseteq W$，$U\neq W$ 的顶点子集 W，导出子图 G_W 是非连通的或者有一个关节顶点，那么导出子图 G_U 就是 G 的一个块。从定理 13.5.3 得到 G 的块要么是完全图 K_2 要么是 2-连通的。

例 设图 G 如图 13-11 所示，那么块将是由 U 等于

$$\{a,b\},\{b,c,d,e\},\{c,f,g,h\},\{h,i\},\{i,j\},\{i,k\}$$

导出的子图 G_U。四个块是 K_2，另外两个块是 2-连通的。注意：当某些块可能含有一个公共顶点时，G 的每条边只属于某一个块。 □

定理 13.5.4 设$G=(V,E)$是一个 $n\geqslant 2$ 阶连通图，并令

$$G_{U_1}=(U_1,E_1),G_{U_2}=(U_2,E_2),\cdots,G_{U_r}=(U_r,E_r)$$

是 G 的块，那么 E_1，E_2，…，E_r 是 G 的边集合 E 的一个划分[⊖]，并且任何一对块至多有一个公共顶点。

证明： 因为一个块可能是 K_2，所以 G 的每条边属于某个块，而为 K_2 的块不可能与其他块有一条公共边，所以与其他块只多有一个公共顶点。从而，我们只需考虑阶至少为 3 的块 G_{U_i}，G_{U_j}（$i\neq j$），它们是 2-连通的。如果能证明这些块最多有一个公共点，那么就推出一条边不可能属于两个不同的块。

假设 $U_i\cap U_j$ 至少含有 2 个顶点，因为 U_i 和 U_j 的交集非空，那么导出图 $G_{U_i\cup U_j}$是连通的。令 x 是 $U_i\cup U_j$ 的任意一个顶点，因为 G_{U_i}，G_{U_j} 是 2-连通的，所以 $G_{U_i-\{x\}}$和 $G_{U_j-\{x\}}$是连通图。此外，因为 $U_i\cap U_j$ 有 2 个公共顶点，所以，$G_{U_i\cup U_j-\{x\}}$是连通的，于是，得到导出图 $G_{U_i\cup U_j}$是 2-连通的，从而我们得到了一个更大的 2-连通的导出子图，这与我们的假设 G_{U_i}，G_{U_j} 是块（最大的 2-连通的导出子图）矛盾，所以两个不同的块最多只能有一个公共顶点。 □

最后我们给出 2-连通图的另一个特征。

定理 13.5.5 设 G 是一个 $n\geqslant 3$ 阶图，那么 G 是 2-连通的当且仅当对任意两个不同的顶点 a 和 b 都存在一条包含 a 和 b 的圈。

证明： 如果 G 的任意两个不同的顶点都在一个圈中，那么 G 肯定是连通的而且没有任何关节顶点。根据定理 13.5.3 知 G 是 2-连通的。

⊖ 因此，G 的每边恰好属于一个块。

现在假设 G 是2-连通的，a 和 b 是 G 中的不同顶点，U 是所有不同于 a 的顶点 x 的集合，且满足对这些 x 都存在一条包含顶点 a 和 x 的圈。我们先证明 $U\neq\varnothing$，即至少有一条圈含有顶点 a。设 $\{a, y\}$ 是包含 a 的任意一条边。通过定理13.5.1得，$\lambda(G)\geqslant\kappa(G)\geqslant2$，因此，删除边 $\{a, y\}$，G 还是连通的。于是有一条含 a 和 y 但不含边 $\{a, y\}$ 的路径，从而存在一条包含 a 和 y 的圈，故 $U\neq\varnothing$。

现在证明 b 属于 U。假设 b 不属于 U，那么就会得到一个矛盾。令 z 是 U 中离 b 点的距离为 p 的最近的顶点。γ 是一条从 z 到 b 长度为 p 的路径。因为 z 属于 U，所以存在一个圈 γ_1 含有 a 和 z，圈 γ_1 含有连接 a 和 z 的两条路径 γ'_1 和 γ_1''。因为 G 是2-连通的，从定理13.5.2得到存在连接 a 和 b 但不包含 z 的一条路径 γ_2。令 u 是属于 γ 的第一个顶点并且也是 γ_2 的一个顶点[一]。令 v 是属于 γ_2 的最后一个顶点并且也是 γ_1 的一个顶点[二]。顶点 v 要么属于 γ_1' 要么属于 γ_1''。假设属于 γ_1'，那么得到 a 沿 γ_1' 到 v，v 沿 γ_2 到 u，u 沿 γ 到 z，z 沿 γ_1'' 回到 a，这样我们构造了含有 a 和 u 的一条圈。因此，u 属于 U。但是 u 比 z 更加接近 b，这与我们对 z 的选择相矛盾。从而推出 b 属于 U，所以存在一条包含 a 和 b 的圈。 □

下面的推论给出了定理13.5.5中2-连通图特征的另一种表述。

推论13.5.6 设 G 是一个 $n\geqslant3$ 阶图，那么 G 是2-连通的当且仅当对任意两个不同的顶点 a 和 b 都存在连接 a 和 b 的两条路径，并且这两条路径只有 a 和 b 两个公共点。

该推论是Menger[三]定理的一个特例。Menger定理是对任意的 k，描述 k-连通图的特征。我们陈述该定理（有向图的明格尔定理的"间接描述"在12.2节中已证明），但不加证明。

定理13.5.7 设 k 是一个正整数，G 是一个阶为 $n\geqslant k+1$ 的图，则 G 是 k-连通的当且仅当对任意两个不同的顶点 a 和 b 都存在连接 a 和 b 的 k 条路径使得每对路径只有 a 和 b 两个公共点。

如果 $k=1$，那么定理简化为：一个图是1-连通的，即连通的当且仅当每对顶点可通过一条路径连接。

13.6 练习题

1. 证明同构图有相同的色数和色多项式。
2. 证明非连通图的色数是它的连通分支的最大色数。
3. 证明非连通图的色多项式等于它的连通分支的色多项式的积。
4. 证明长度为奇数的一个循环图 G_n，它的色数等于3。
5. 求图13-12中各图的色数。
6. 证明色数为 k 的图至少有 $\binom{k}{2}$ 条边。
7. 证明贪婪算法总是产生用两种颜色对 $K_{m,n}$（m，$n\geqslant1$）的顶点进行着色。
8. 设 G 是一个具有色多项式 p_G（k）的 $n\geqslant1$ 阶图。

    ⅰ）证明 $p_G(k)$ 的常数项等于0。

[一] 这样的顶点存在，因为 b 是 γ 的顶点，也是 γ_2 的顶点。

[二] 这样的顶点存在，因为 a 是 γ_2 的顶点，也是 γ_1 的顶点。

[三] K. Menger：Zur allgemeinen Kurventheorie，*Fund. Math.*，10（1927），95-115。

ⅱ）证明在$p_G(k)$中k的系数是非零的当且仅当G是连通的。

ⅲ）证明在$p_G(k)$中，k^{n-1}的系数等于$-m$，其中m是G的边数。

9. 设G是色多项式为$p_G(k)=k(k-1)^{n-1}$的n阶图（即G的色多项式跟一棵n阶树的一样），证明G是一棵树。

10. 从K_n中删除一条边而获得的图的色数是多少？

11. 证明从K_n中删除一条边而获得的图的色多项式等于

$$[k]_n+[k]_{n-1}$$

12. 从K_n中删除有一个公共顶点的两条边而获得的图的色数是多少？

13. 从K_n中删除没有公共顶点的两条边而获得的图的色数是多少？

14. 证明一个循环图C_n的色多项式等于

$$(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$$

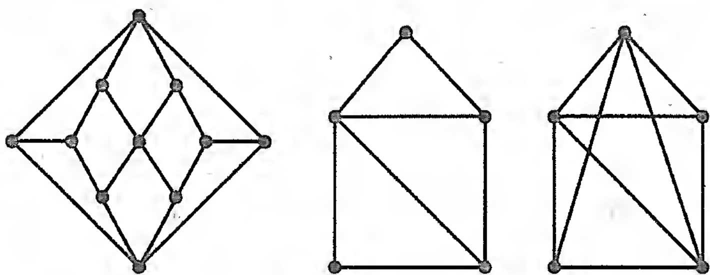


图　13-12

15. 某图恰好有一个长度为奇数的圈，证明该图的色数等于3。

16. 证明多项式$k^4-4k^3+3k^2$不是任何图的色多项式。

17. 用定理13.1.10求图13-13的色数：

18. 用计算一个图的色多项式的算法，求一个三维立方体顶点和边的图Q_3的色多项式。

19. 找出具有两个不同平面表示的一个平面图，使得对某个整数f，一个是有f条边曲线所围的区域，而另一个是无此限制的区域。

20. 给出一个色数为4且不包含K_4作为导出子图的平面图例子。

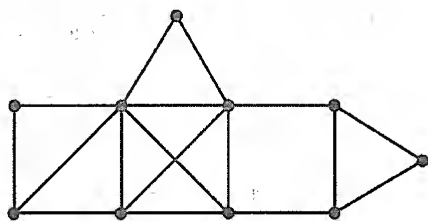


图　13-13

21. 一个平面被有限条直线分成若干区域，证明这些区域能用两种颜色着色，并使共边界的区域着不同的颜色。

22. 用圆取代直线，重复练习题21。

23. 设G是有$e=3n-6$条边的n阶连通的平面图，证明在G的任意一个平面表中，每个区域恰被3条边曲线所围。

24. 证明一个连通图总能收缩到一个单一顶点。

25. 证明一个平面图的收缩还是平面的。

26. 设G是每个顶点有相同度k的n阶平面图，证明$k\leqslant 5$。

27. 设G是$n\geqslant 2$阶平面图，证明G至少有两个顶点，它的度最多是5。

28. 如果一个图通过删除一个顶点而获得的每个子图都有更少的色数，那么称该图为色的临界图。设$G=(V,E)$是一个色临界图，证明：

ⅰ）$\chi(G_{V-\{x\}})=\chi(G)-1$，对每个顶点$x$都成立。

ⅱ）G是连通的。

ⅲ）G 的每个顶点至少有等于$\chi(G)-1$ 的度。

ⅳ）G 没有关节集 U 使得 G_U 是一个完全图。

ⅴ）每个图 H 有一个导出子图 G，使得$\chi(G)=\chi(H)$，并且 G 是色临界图。

29. 设 $p\geqslant3$ 是一个整数，证明每个顶点的度至少为 $p-1$ 的图包含一条长度大于或等于 p 的圈，然后用习题 28 证明色数等于 p 的图包含一条长度至少为 p 的圈。

*30. 设 G 是没有任何关节顶点且使每个顶点的度至少为 3 的一个图，证明：G 包含一个能收缩到K_4 的子图（提示：从一个最大长度为 p 的圈开始，由习题 28 得 $p\geqslant4$）。现在用习题 28 获得 Hadwiger 猜想对于 $p=4$ 的一个证明。

31. 设 G 是连通图，T 是G 的一棵生成树，证明 T 包含一个生成子图 T'使得对每个顶点 v，它在 G 中的度与在 T'中的度关于模 2 是相等的。

32. 找一种不同于图 13-9 中给出的 8 王后问题的解答。

33. 证明一棵 n 阶树的独立数至少是$\lceil n/2\rceil$。

34. 证明非连通图的补是连通的。

35. 设 H 是图 G 的一个生成子图，证明 dom（G）$\leqslant$dom（H）。

36. 对每个整数 $n\geqslant2$，求一棵控制数等于$\lfloor n/2\rfloor$ 的 n 阶树。

37. 求一个三维立方体边和顶点的图 Q_3 的控制数。

38. 求循环图 C_n 的控制数。

39. 对于 $n=5$ 和 6，通过找 3 个方格，把王后放在该方格上，使得其他每个方格至少受到一个王后的攻击，证明一个 $n\times n$ 棋盘的王后图的控制数最多是 3。

40. 证明一个 7×7 棋盘的王后图的控制数最多是 4。

*41. 证明一个 8×8 棋盘的王后图的控制数最多是 5。

42. 证明一个区间图的导出子图是一个区间图。

43. 证明一个弦图的导出子图是弦图。

44. 证明只有是弦图的连通二分图是树。

45. 证明所有的二分图都是完美的。

46. 设 G 是一个图，使得或者 G 或者它的补$\overline{G}$ 有一个导出子图，该子图有一条长度大于 3 的奇数的无弦圈，证明 G 不是完美的。

47. 证明 K_n 的边连通度等于$n-1$。

48. 给出一个不同于完全图的图 G，且$\kappa(G)=\lambda(G)$的例子。

49. 给出一个图 G 且有$\kappa(G)<\lambda(G)$的例子。

50. 给出一个图 G 且有$\kappa(G)<\lambda(G)<\delta(G)$的例子。

51. 求完全二分图 $K_{m,n}$的边连通度。

52. 设 G 是一个 n 阶图且顶点度为 d_1，d_2，…，d_n。假设这些度满足 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，证明：如果对所有 $k\leqslant n-d_n-1$ 有 $d_k\geqslant k$，那么 G 是一个连通图。

53. 设 G 是一个n 阶图，每个顶点的度均为 d，

ⅰ）为了保证 G 是连通的，d 必须多大？

ⅱ）为了保证 G 是 2-连通的，d 必须多大？

54. 已知图为下面给出的图 13-14，求该图的块。

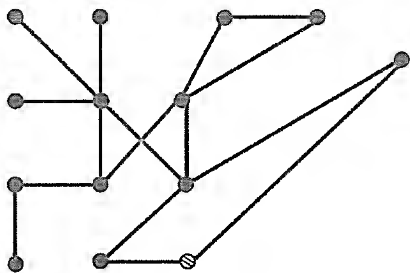


图　13-14

55. 证明一棵树的块都是 K_2。

56. 设 G 是一个连通图，证明 G 的一条边是一座桥当且仅当它是块等于 K_2 的边。

57. 设 G 是一个图，证明 G 是 2-连通的当且仅当对每个顶点 x 和每条边 α，都存在既包含顶点 x 又包含边 α 的一个圈。

58. 设 G 是一个图，它的每个顶点都有正的度，证明 G 是 2-连通的当且仅当对每对边 α_1 和 α_2，存在一条包含 α_1 和 α_2 的圈。

59. 证明阶为 $n\geqslant 2$ 的连通图至少有两个顶点，它们不是关节顶点（提示：取一条最长链的两个端顶点）。

第 14 章　Pólya 计数法

假如你要用红、蓝两种颜色给一个正四面体的 4 个顶点着色，试问存在多少种不同的着色？因为一个四面体有 4 个顶点，每个顶点可用两种颜色之一着色，于是，得到该问题的一个答案为 $2^4=16$。但我们能认为这 16 种着色是不同的吗？若四面体在空间是固定的，则各顶点可通过它的位置而彼此区分，并且该问题与各顶点所着的颜色相关联，因此，在这种情形下的 16 种着色是不同的。若四面体是可转动的，那么由于四面体有对称性质，所以该问题与哪个顶点着红色及哪个顶点着蓝色并不彼此相关联。两种着色可互相区分的唯一途径是通过每种颜色的顶点数决定的。故全部顶点为红色的有 1 种着色，三个顶点为红色的有 1 种着色，两个顶点为红色的有 1 种着色，一个顶点为红色的有 1 种着色及无顶点为红色的有 1 种着色，共给出 5 种不同的着色。

假如用红、蓝两种颜色给正方形的 4 个顶点着色，我们再次得到，在正方形位置固定的条件下有 16 种不同的着色。如果允许正方形转动，问存在多少种不同的着色？尽管正方形不具有四面体的完全对称性，但它仍有很强的对称性，如图 14-1 所示。全部顶点为红色的有 1 种着色，三个顶点为红色的有 1 种着色，两个顶点为红色的有 2 种着色（这两个红色顶点可以邻接或是被一个蓝色顶点隔开），一个顶点为红色的有 1 种着色及顶点无红色的有 1 种着色，共有 6 种不同的着色。

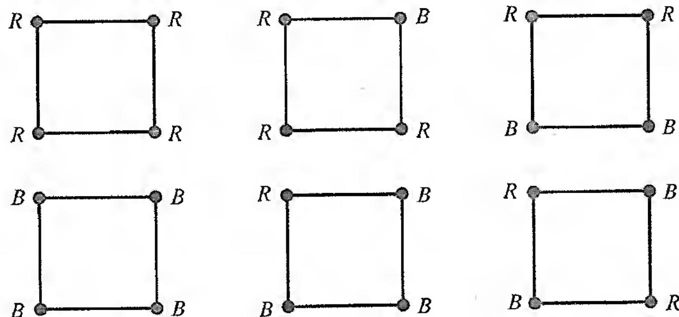


图　14-1

如果允许四面体和正方形自由转动，那么给顶点着色的 $2^4=16$ 种方法被划分成一些部分，使得同一部分中的两种着色被视为相同的（着色是等价的），而不同部分中的两种着色为不同的（着色是不等价的）。因此，不等价的着色的数是不同部分的个数。本章的目的在于发展和阐明在对称情形下计算不等价着色的技术。

14.1　置换群与对称群

设 X 是一个有限集。不失一般性，取 X 为包含前 n 个正整数的集合

$$\{1, 2, \cdots, n\}$$

X 的每个置换

$$i_1, i_2, \cdots, i_n$$

可视为 X 到其自身定义的一个一对一的函数

$$f: X \to X$$

其中

$$f(1)=i_1,\ f(2)=i_2,\ \cdots,\ f(n)=i_n$$

根据鸽巢原理，f：$X \to X$ 是满的[⊖]。我们要强调的是一个置换可视为一个函数，用 $2\times n$ 阵列

$$\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n \\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix} \tag{14-1}$$

也可表示该置换。在式（14-1）中，整数 k 对应的函数值 i_k 放到 k 的下面。

例 $\{1,2,3\}$ 的 6 个置换可视为如下诸函数。

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

□

将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 $n!$ 个置换构成的的集合记为 S_n，于是，S_3 是由上例所列出的 6 个置换所构成的。既然置换为函数，那么它们就可以结合（使用合成运算，即一个跟在另一后面）。如果

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n \\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix}$$

和

$$g=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n \\ j_1 & j_2\cdots j_n\end{pmatrix}$$

是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的两个置换，按先 f 后 g 的顺序进行合成，则得置换

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n \\ j_1 & j_2\cdots j_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n \\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix}$$

其中

$$(g\circ f)(k)=g(f(k))=j_{i_k}$$

函数的合成定义了 S_n 上的一个二元运算：如果 f 和 g 均属于 S_n，则 $g\circ f$ 也属于 S_n。

例 设 S_4 中的置换 f 和 g 为

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\qquad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

则

$$(g\circ f)(1)=3,(g\circ f)(2)=4,(g\circ f)(3)=1,(g\circ f)(4)=2$$

因此

⊖ 因此，从 X 到 X 的一对一的函数是一一对应的。

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

类似可得

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$ □

S_n 中置换的合成这一二元运算“ $\circ$”满足结合律[⊖]

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$$

但不满足交换律，如上例。尽管某些情形下等式可能成立，但通常情况下

$$f\circ g\neq g\circ f$$

我们用通常的幂符号来表示一个置换与它自身的合成：

$$f^1=f,\ f^2=f\circ f,\ f^3=f\circ f\circ f,\ \cdots,\ f^k=f\circ f\circ\cdots\circ f\ (k\text{ 个 }f)$$

恒等置换就是各整数对应到它自身的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的置换：

$$\iota(k)=k \qquad \text{对所有的 } k=1, 2, \cdots, n$$

它等价于

$$\iota=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ 1 & 2\cdots n\end{pmatrix}$$

显然等式

$$\iota\circ f=f\circ\iota=f$$

对 S_n 中的所有置换 f 成立。由于 S_n 中的每个置换是一对一的函数，所以存在逆函数 $f^{-1}\in S_n$ 满足：

$$\text{如果} f(s)=k\text{，那么} f^{-1}(k)=s$$

通过交换 $2\times n$ 阵列 f 的第一行与第二行，并重新排列列使得第一行的整数以自然顺序 1，2，…，n 出现，便得到了 $2\times n$ 阵列 f^{-1}。对每个置换 f，我们定义 $f^0=\iota$。于是，恒等置换的逆是它自身：$\iota^{-1}=\iota$。

例 考虑 S_6 中的置换

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

交换第一行与第二行，得

$$\begin{pmatrix}5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

⊖ 函数的合成总是可结合的。

再重新排列列，得

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ □

从逆运算的定义推出 S_n 中任意元 f 与它的逆满足：

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\iota$$

如果 S_n 中的置换的非空子集 G 满足如下三条性质，则定义它为 X 的一个置换的群，简称置换群：

ⅰ）（合成运算的封闭性）对 G 中所有的置换 f 与 g，$f\circ g$ 也属于 G。

ⅱ）（单位元）S_n 中的恒等置换 ι 属于 G。

ⅲ）（逆元的封闭性）对 G 中的每一个置换 f，它的逆 f^{-1} 也属于 G。

$X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有置换的集合 S_n 是一个置换群，称它为 n 阶对称群。特别地，仅含恒等置换的集合 $G=\{\iota\}$ 是一个置换群。

每一个置换群满足消去律：

$$f\circ g=f\circ h \text{ 意味着 } g=h$$

因为用 f^{-1} 左乘等式两端，并根据结合律，便得

$$f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ(f\circ h)$$

$$(f^{-1}\circ f)\circ g=(f^{-1}\circ f)\circ h$$

$$\iota\circ g=\iota\circ h$$

$$g=h$$

例 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的置换，它定义为

$$\rho_n=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$$

则当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时，有 $\rho_n(i)=i+1$ 且 $\rho_n(n)=1$。考虑将 1 到 n 的整数均等地放到圆周上或正 n 角形的 n 个角点上，当 $n=8$时，如图 14-2 所示。那么 ρ_n 按顺时针方向将各整数传到随后的整数。实际上，可将 ρ_n 视为圆的 $360/n$ 度的旋转，置换 ρ_n^2 为圆的 $2\times(360/n)$ 度的旋转，更一般地，对非负整数 k，ρ_n^k 为圆的 $k\times(360/n)$度的旋转，从而推出

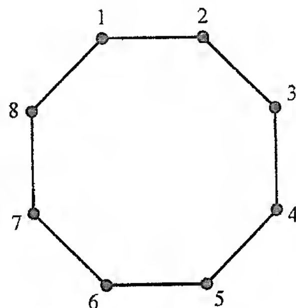


图 14-2

$$\rho_n^k=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n\\ k+1 & k+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & k-1\end{pmatrix}$$

特别地，当 $r=k \bmod n$ 时，有 $\rho_n^r=\rho_n^k$。因此，仅有 ρ_n 的 n 个不同的幂，即

$$\rho_n^0=\iota,\ \rho_n,\ \rho_n^2,\ \cdots,\ \rho_n^{n-1}$$

并且

$$\rho_n^{-1}=\rho_n^{n-1}$$

更一般地，对 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$，有

$$(\rho_n^k)^{-1}=\rho_n^{n-k}$$

从而得到

$$C_n=\{\rho_n^0=\iota, \rho_n, \rho_n^2, \cdots, \rho_n^{n-1}\}$$

是一个置换群㊀，它是 n 阶循环群的一个例子。读者可以看到，该群隐含了可用于计算 n 个不同的对象安置到一个圆周上的方法数。下面将是更详细的内容。 □

设 Ω 是一个几何图形，Ω 到它自身的一个（几何）运动称为 Ω 的一个*对称*。我们要考虑的几何图形，如正方形、四面体、立方体，是由角点（或顶点）、边及三维情形下的面（或侧面）所构成的，因此每个对称可看作是角点、边及三维情形下的面上的一个置换。Ω 的一个对称后跟着另一个对称还是一个对称，即两个对称的合成仍是一个对称。类似地，一个对称的逆也是一个对称。最后，使所有对象固定不动的运动㊁也是一个对称即恒等对称。于是，我们推断出 Ω 的对称就是它的角点上的置换群 G_C、边上的置换群 G_E 以及 Ω 是三维情形下的面上的置换群 G_F㊂。因此由图形的所有对称决定的置换集合自然是一个置换群，从而得到了*角点对称群*、*边对称群*、*面对称群*等等。

例 考虑如图 14-3 所示的一个正方形 Ω，它的角点标以 1、2、3、4，边标以 a、b、c、d，那么存在 8 个 Ω 的对称，并只有两种类型。有围绕正方形中心的 0°、90°、180°、270°角的 4 个旋转，这 4 个对称的运动出现在包含 Ω 的平面上，它们构成了 Ω 的*平面对称*。平面对称本身就形成一个群。其他对称是关于 Ω 的对角点的连线和对边中点的连线的 4 个反射。这些对称，它们的运动是在空间进行的，因为“翻”正方形需要离开它所在的平面。

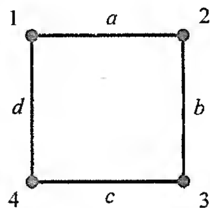


图 14-3

作用在角点上的旋转产生 4 个置换

$$\rho_4^0=\iota=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\qquad \rho_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\qquad \rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

作用在角点上的反射产生 4 个置换㊃

㊀ 用更正式的语言来叙述就是，置换群 C_n 同构于整数 mod n 的加群，见 10.1 节的讨论。

㊁ 因此，在这个运动中实际上没有任何运动！

㊂ 存在群的一个抽象的概念，它被定义为具有二元运算的非空集合，满足结合律以及（ⅰ）对合成运算是封闭的，（ⅱ）单位元存在，（ⅲ）对求逆元运算是封闭的。由于对函数的合成运算结合律自然成立，因此置换群是群。图形 Ω 的对称在该定义下形成群，但正如所指出的那样，这些对称能够作为其角点的置换群，其边的置换群等等。

㊃ τ_1 来自关于连接顶点 1 和 3 的连线的反射，τ_2 来自关于连接顶点 2 和 4 的连线的反射，τ_3 来自关于连接直线 a 和 c 的中点的连线的反射，τ_4 则来自连接直线 b 和 d 的中点的连线的反射。

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

故正方形的角点对称群是

$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$$

可以验证

$$\tau_3=\rho_4\circ\tau_1,\quad \tau_2=\rho_4^2\circ\tau_1 \text{ 和 } \tau_4=\rho_4^3\circ\tau_1$$

因此，又得到

$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\rho_4\circ\tau_1,\rho_4^2\circ\tau_1,\rho_4^3\circ\tau_1\}$$

如图 14-3 所示，将 Ω 的边标以 a、b、c、d，那么边对称群 G_E 可用a、b、c、d 分别替换角点对称群 G_C 中的 1、2、3、4 而获得。因此，若对 τ_2 进行这一替换，则得

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$$

这就是关于正方形两条边 b 与 d 的中点连线的反射导致的边的置换。 □

同理，对于任意的 $n\geqslant3$，可得到正 n 角形的对称群。除 n 个旋转 $\rho_n^0=\iota$，ρ_n，…，ρ_n^{n-1} 外，还有 n 个反射 τ_1，τ_2，…，τ_n。如果 n 为偶数，则有 $n/2$ 个关于对角点的反射和 $n/2$ 个关于对边中点连线的反射。如果 n 为奇数，则有 n 个关于角点与其对边中点的连线的反射。关于$\{1,2,\cdots,n\}$的 $2n$ 个置换形成的群

$$D_n=\{\rho_n^0=\iota,\rho_n,\rho_n^2,\cdots,\rho_n^{n-1},\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\}$$

就是一个阶为 $2n$ 的二面体群的一个例子。我们在下例中计算 D_5。

例（10 阶二面体群） 如图 14-4 所示，考察其顶点标以 1、2、3、4、5 的正五角形。它的（角点）对称群 D_5 包含 5 个旋转和 5 个反射，5 个旋转为

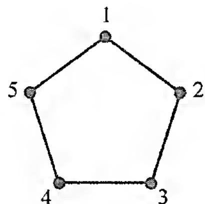


图 14-4

$$\rho_5^0=\iota=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}\qquad \rho_5^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$$

$$\rho_5^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}\qquad \rho_5^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\rho_5^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$$

将第 i 个角点与其对边的连线的反射记为 τ_i（$i=1,2,3,4,5$），则

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$\tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$$

□

假设 X 仍为前 n 个正整数集合 $\{1,2,\cdots,n\}$，G 为集合 X 的一个置换群。X 的一种着色是指对 X 的每一个元素指定一种颜色。设 $\mathcal{C}$ 是 X 的一个着色集合。通常我们有多种颜色，比如红色与蓝色，$\mathcal{C}$ 就是用这些颜色对 X 的所有着色所构成的。但这并非必须都是这种情况，集合 $\mathcal{C}$ 可以是 X 的任意着色集合，只要求 G 是以刚才所描述的方式将 $\mathcal{C}$ 中的一种着色对应到 $\mathcal{C}$ 中的另一种着色。

设 $\mathbf{c}$ 是 X 的一种着色，1，2，…，n 的颜色分别记以 $c(1)$，$c(2)$，…，$c(n)$。令

$$f=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

是 G 中的一个置换，那么定义 $f*c$ 是使得 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色，即

$$(f*\mathbf{c})(i_k)=c(k)\text{，或用 } f \text{ 的逆}$$
$$(f*\mathbf{c})(k)=c(f^{-1}(k))$$

也就是说，因为 f 将 k 变到 i_k，所以，k 的颜色，即 $\mathbf{c}(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且变成 i_k 的颜色。着色集 $\mathcal{C}$ 需具备性质：对于 G 中任意元 f 和 $\mathcal{C}$ 中任意元 $\mathbf{c}$，$f*\mathbf{c}$ 仍属于 $\mathcal{C}$。这意味着 f 置换了 $\mathcal{C}$ 中的着色，于是，G 充当了着色集 $\mathcal{C}$ 上的一个置换群。因此，$f*\mathbf{c}$ 表示通过 f 变换 $\mathbf{c}$ 的 $\mathcal{C}$ 中的着色。注意，如果 $\mathcal{C}$ 是 X 对给定颜色集合上的所有着色的集合，那么 $\mathcal{C}$ 自然具备所需要的性质。

在两个运算$\circ$（G 中置换的合成）与 $*$ （G 中的置换对 $\mathcal{C}$ 中着色的作用）之间成立的基本关系是

$$(g\circ f)*\mathbf{c}=g*(f*\mathbf{c}) \tag{14-2}$$

方程（14-2）的左边是将 k 的颜色变到 $(g\circ f)(k)$ 的着色，右边是将 k 的颜色变到 $f(k)$，然后变到 $g(f(k))$ 的着色。因为由合成运算的定义有 $(g\circ f)(k)=g(f(k))$，故式（14-2）成立。

例　继续考虑前面的例子，Ω 是如图 14-3 所示的正方形，其中 G_C 是 Ω 的角点对称群。令 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的角点 1、2、3、4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合。置换群 G_C 包含 8 个置换，$\mathcal{C}$ 有 16 种着色。用 R 表示红色，B 表示蓝色并且按 1、2、3、4 的顺序书写角点的颜色来表示一种着色。因此，如

$$(R,B,B,R) \tag{14-3}$$

是角点 1 为红色、角点 2 为蓝色、角点 3 为蓝色、角点 4 为红色的一种着色。置换 ρ_4 则将该着色变到下面着色

$$(R,R,B,B)$$

其中，角点 1 与 2 为红色，角点 3 与 4 为蓝色。在下表中我们列出 G_C 中各置换作用在着色 (14-3) 上的效果

G_C 中的置换	作用在着色（R，B，B，R）上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(R，B，B，R)
ρ_4	(R，R，B，B)
ρ_4^2	(B，R，R，B)
ρ_4^3	(B，B，R，R)
τ_1	(R，R，B，B)
τ_2	(B，B，R，R)
τ_3	(B，R，R，B)
τ_4	(R，B，B，R)

注意，置换 τ_4 不改变着色（14-3），即 τ_4 保持着色（14-3）不变，当然，单位元 ι 也不改变它。事实上，表中的每个着色只出现两次。如果在 G_C 中存在一个置换，它将一种着色变到另一种着色，那么就称这两种着色是等价的，于是，(R,B,B,R)等价于如下各种着色

$$(R,B,B,R),(R,R,B,B),(B,R,R,B),(B,B,R,R)$$

因为置换不会改变各颜色的角点的个数，所以两种着色是等价的一个必要条件是它们包含相同数目的红色与相同数目的蓝色[⊖]。着色（R，B，R，B）也包含 2 个红色角点与 2 个蓝色角点，但与(R,B,B,R)不等价。事实上，可以验证（R，B，R，B）仅等价于(R,B,R,B)和(B,R,B,R)，并且，我们检验 G_C 中的所有置换作用在(R,B,R,B)上的结果时，这些着色各出现四次。特别地，我们能够推出在有两个红色角点和两个蓝色角点的所有着色中存在两种不等价的着色。显然，着色(R,R,R,R)仅与它自身等价。同样，着色(B,B,B,B)也仅与它自身等价。考虑有 1 个红色角点和 3 个蓝色角点的着色(R,B,B,B)，通过一个旋转，它与(R,B,B,B)、(B,R,B,B)、(B,B,R,B)、(B,B,B,R)中的每一种着色等价，因此，具有 1 个红色角点的所有着色是等价的。同理，具有 3 个红色角点（有 1 个蓝色角点）的所有着色通过一个旋转都是等价的。故在正方形的角点对称群 G_C 的作用下，用两种颜色对正方形的角点进行着色，共有 $2+1+1+1+1=6$ 种不等价的着色方案。如果不允许正方形的完全对称群而只是用由 4 个旋转 $\rho_4^0=\iota$，ρ_4，ρ_4^2，ρ_4^3 所构成的对称群，不等价的着色数仍为 6，这是因为如果两种着色通过正方形的一个对称的作用是等价的，那么这两种着色通过旋转的作用也是等价的。 □

现在我们给出着色等价的一般定义。令 G 是作用在集合 X 上的一个置换群，通常取 X 为前 n 个正整数的集合。令$\mathcal{C}$是 X 的一个着色集合，使得对于 G 中任意元 f 和$\mathcal{C}$中任意元 $\mathbf{c}$，X 的着色 $f*\mathbf{c}$ 仍属于$\mathcal{C}$。于是，在这种意义下 G 作用于$\mathcal{C}$，对$\mathcal{C}$中进行的着色仍属于$\mathcal{C}$。设 $\mathbf{c}_1$ 与 $\mathbf{c}_2$ 是$\mathcal{C}$中的两种着色，下面我们定义一个关于$\mathcal{C}$的等价关系，记为 $\underset{\sim}{G}$（简记～）：如果存在 G 中的一个置换 f，使得

⊖ 当然，如果两种着色有相同数目的红色，那么它们必然有相同数目的蓝色。

$$f * c_1 = c_2$$

则称 c_1（在 G 的作用下）等价于 c_2。如果它们不相等，则称这两种着色是不等价的。我们得到

ⅰ）（自反性）对于任意的 c，$c \sim c$（因为 $\iota * c = c$）；

ⅱ）（对称性）如果 $c_1 \sim c_2$，则 $c_2 \sim c_1$（如果对 G 中的某个 f，有 $f * c_1 = c_2$，则 $f^{-1} * c_2 = c_1$）；

ⅲ）（传递性）如果 $c_1 \sim c_2$ 且 $c_2 \sim c_3$，则 $c_1 \sim c_3$（如果 $f * c_1 = c_2$ 且 $g * c_2 = c_3$，则 $(g \circ f) * c_1 = c_3$）。

由此得到～是在 4.5 节中所定义的意义下关于 $\mathcal{C}$ 的一个等价关系，这就证明了我们使用术语"等价"是合理的。

注意一个置换群的三个基本性质，即单位元、逆运算的封闭性及合成运算的封闭性是如何在ⅰ)～ⅲ)的证明中使用的。根据第 4 章中的定理 4.5.3，等价将把 $\mathcal{C}$ 中的着色划分成许多部分，使得两种着色属同一部分当且仅当它们为等价的着色。在下一节中，我们将导出关于部分的个数，即在置换群 G 的作用下 $\mathcal{C}$ 中不等价的着色数的一般公式。

14.2 Burnside 定理

本节我们将导出在集合 X 的一个置换群的作用下，计算集合 X 的不等价着色数的一个 Burnside 公式㊀，并应用这个公式。

设 G 是 X 的一个置换群，$\mathcal{C}$ 是 G 作用在 $\mathcal{C}$ 上的 X 的一个着色集合。回顾一下，这意味着对于 G 中的任意 f 与 $\mathcal{C}$ 中的任意 c，

$$f * c$$

属于 $\mathcal{C}$，并且 G 中的每个 f 置换 $\mathcal{C}$ 中的着色。适当选取 f 与 c，可使得

$$f * c = c \qquad (14\text{-}4)$$

例如，如果在图 14-3 中对正方形的顶点 1 与 3 着红色，顶点 2 与 4 着蓝色，那么关于顶点 1 与 3 连线的反射或者顶点 2 与 4 连线的反射或者通过 180°的旋转均不改变着色；这些运动均保持了各顶点的颜色，于是保持了原着色。如果允许式（14-4）中的 f 在 G 中所有的置换间变化或者允许 c 在 $\mathcal{C}$ 中的所有着色间变化，那么我们得到使着色 c 保持不变的 G 中所有置换的集合

$$G(c) = \{f : f \in G, f * c = c\} \qquad (14\text{-}5)$$

以及在 f 的作用下使着色 c 保持不变的 G 中所有着色的集合

$$\mathcal{C}(f) = \{c : c \in \mathcal{C}, f * c = c\} \qquad (14\text{-}6)$$

使着色 c 保持不变的所有置换的集合 $G(c)$ 称为 c 的稳定核㊁，而且任何着色的稳定核也形成一个置换群。

㊀ W.Burnside: *Theory of Groups of Finite Order*, 2nd edition, Cambridge University Press, London, 1911（由 Dover, New York, 1955 重印）, P.191。

㊁ 稳定（stable）是保持不变（fixed）的同义词。

定理 14.2.1　对于每一种着色 $\mathbf{c}$，$\mathbf{c}$ 的稳定核 $G(\mathbf{c})$ 是一个置换群，而且对 G 中任意置换 f 与 g，$g*\mathbf{c}=f*\mathbf{c}$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g$ 属于 $G(\mathbf{c})$。

证明：如果 f 和 g 都使 $\mathbf{c}$ 保持不变，则先 f 后 g 将使 $\mathbf{c}$ 保持不变，即 $(g\circ f)(\mathbf{c})=\mathbf{c}$。于是，在合成运算下，$G(\mathbf{c})$ 具有封闭性。显然，单位元 ι 使得所有着色不变。如果 f 使 $\mathbf{c}$ 不变，那么 f^{-1} 也使 $\mathbf{c}$ 不变，于是 $G(\mathbf{c})$ 具有对逆元的封闭性。由于满足置换群定义的所有性质，所以，$G(\mathbf{c})$ 是一个置换群。

假设 $f*\mathbf{c}=g*\mathbf{c}$，利用基本关系式（14-2）得

$$(f^{-1}\circ g)*\mathbf{c}=f^{-1}*(g*\mathbf{c})=f^{-1}*(f*\mathbf{c})=(f^{-1}\circ f)*\mathbf{c}=\iota*\mathbf{c}=\mathbf{c}$$

所以 $f^{-1}\circ g$ 使 $\mathbf{c}$ 不变，因此 $f^{-1}\circ g$ 属于 $G(\mathbf{c})$。反之，假设 $f^{-1}\circ g$ 属于 $G(\mathbf{c})$，通过类似的计算可证得

$$f*\mathbf{c}=g*\mathbf{c}$$

□

作为定理 14.2.1 的一个推论，我们可以从已知的一种着色 $\mathbf{c}$ 出发，确定出在 G 的作用下不同的着色数。

推论 14.2.2　设 $\mathbf{c}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一种着色，那么与 $\mathbf{c}$ 等价的着色数

$$|\{f*\mathbf{c}: f\in G\}|$$

等于 G 中的置换个数除以 $\mathbf{c}$ 的稳定核中的置换个数，即

$$\frac{|G|}{|G(\mathbf{c})|}$$

证明：设 f 是 G 中的一个置换，根据定理 14.2.1，满足

$$g*\mathbf{c}=f*\mathbf{c}$$

的置换 g 实际上就是

$$\{f\circ h:\ h\in G\ (\mathbf{c})\}\tag{14-7}$$

中的那些置换。由消去律，则从 $f\circ h=f\circ h'$ 推出 $h=h'$。于是，集合（14-7）中的置换个数等于 $G(\mathbf{c})$ 中置换 h 的个数 $|G(\mathbf{c})|$。从而，对每个置换 f，恰好存在 $|G(\mathbf{c})|$ 个置换，这些置换作用在 $\mathbf{c}$ 上跟 f 有同样的效果。因为总共有 $|G|$ 个置换，所以，与 $\mathbf{c}$ 等价的着色数

$$|\{f*\mathbf{c}: f\in G\}|$$

等于

$$\frac{|G|}{|G(\mathbf{c})|}$$

即推论得证。　□

下面的 Burnside 定理给出了一个计数不等价着色数的公式。

定理 14.2.3　设 G 是 X 的一个置换群，$\mathcal{C}$ 是 X 的一个着色集并且使得对于 G 中的任意 f 与 $\mathcal{C}$ 中的任意 $\mathbf{c}$，$f*\mathbf{c}$ 属于 $\mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}$ 中不等价的着色数 N（G，$\mathcal{C}$）为

$$N(G,\mathcal{C})=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)| \tag{14-8}$$

换言之，$\mathcal{C}$中不等价的着色数等于使着色通过 G 中的置换保持不变的着色的平均数。

证明：就我们现有的知识，论证就是我们前面已多次用到的一些技巧的简单应用，即先采取两种不同的方式进行计数，然后使计数相等。究竟计什么数呢？我们要数使 f 保持 $\mathbf{c}$ 不变即 $f*\mathbf{c}=\mathbf{c}$ 的对偶$(f,\mathbf{c})$的个数。一种计数的方式是考察 G 中的每个 f，并计算 f 保持着色不变的着色数，然后相加所有的量。因$\mathcal{C}(f)$是通过 f 保持着色不变的着色集，所以用这种方式计数得到

$$\sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)| \tag{14-9}$$

另一种计数的方式是考察$\mathcal{C}$中的每个 $\mathbf{c}$，计算满足 $f*\mathbf{c}=\mathbf{c}$ 的置换 f 的个数，然后相加所有的量。对每种着色 $\mathbf{c}$，满足 $f*\mathbf{c}=\mathbf{c}$ 的所有 f 的集合就是我们所称的 $\mathbf{c}$ 的稳定核$G(\mathbf{c})$。因此，每个 $\mathbf{c}$ 对和的贡献是

$$|G(\mathbf{c})|$$

由推论 14.2.2 得

$$|G(\mathbf{c})|=\frac{|G|}{(\text{与 }\mathbf{c}\text{ 等价的着色数})} \tag{14-10}$$

于是，用这种方式计数得到

$$\sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{C}}\frac{|G|}{(\text{与 }\mathbf{c}\text{ 等价的着色数})} \tag{14-11}$$

但如果我们按等价类将着色归类，那么求和式（14-11）可以简化。在同一等价类中，两种着色对求和贡献了同样的量（14-10），因此，每个等价类的总贡献是$|G|$。由于等价类的个数就是不等价的着色数$N(G,\mathcal{C})$，所以，式（14-11）等于

$$N(G,\mathcal{C})\times|G| \tag{14-12}$$

使式（14-9）与式（14-12）相等得到

$$\sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)|=N(G,\mathcal{C})\times|G|$$

解出$N(G,\mathcal{C})$即得式（14-8）。 □

在本节的其余部分，我们将举几个例子来说明 Burnside 定理。

例（循环排列计数） 把 n 个不同的对象放在一个圆上，问有多少种放法？

正如 13.1 节中所提示的那样，问题相当于用 n 种不同的颜色对正 n 角形 Ω 的角点进行着色，答案应为 Ω 的旋转群的不等价着色数。令$\mathcal{C}$是由对 Ω 的 n 个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有 $n!$ 种方法所组成的集合，则作用在$\mathcal{C}$上的循环群为[⊖]

$$C_n=\{\rho_n^0=\iota,\rho_n,\rho_n^2,\cdots,\rho_n^{n-1}\}$$

[⊖] 回忆：ρ_n 是 $360/n$ 度旋转。

且循环排列的个数等于$\mathcal{C}$中不等价的着色数。C_n 中的恒等置换 ι 使$\mathcal{C}$中的 $n!$ 种着色不变，由于在$\mathcal{C}$的着色中每个顶点具有不同的颜色[⊖]，所以$\mathcal{C}$中每个其他的置换均不保持$\mathcal{C}$中任何着色。因此，根据定理 14.2.3 中的式（14-8），我们得到不等价的着色数为

$$N(C_n,\mathcal{C})=\frac{1}{n}(n!\ +0+\cdots+0)=(n-1)!$$ □

例（项链计数问题） 用 $n\geqslant 3$ 种不同颜色的珠子镶成一个项链，问有多少种方法？

这与上例的情形几乎相同，只是项链可被翻转。现将置换群 G 取为一个正 n 角形的顶点对称群，于是，在这种情况下，G 是阶为 $2n$ 的二面体群 D_n。能使着色不变的唯一置换是恒等置换并且它使所有的 $n!$ 种着色不变。所以，由式（14-8）得到不等价的着色数即不同种项链数为

$$N(D_n,\mathcal{C})=\frac{1}{2n}(n!\ +0+\cdots+0)=\frac{(n-1)!}{2}$$ □

例 用红色与蓝色对一个正五角形的顶点进行着色，问有多少种不同的方法？

一个正五角形的对称群是二面体群

$$D_5=\{\rho_5^0=\iota,\rho_5,\rho_5^2,\rho_5^3,\rho_5^4,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5\}$$

其中，τ_j 是 13.1 节中所描述的关于连接顶点 j 与其对边中点连线的反射($j=1,2,3,4,5$)。设$\mathcal{C}$是关于正五角形顶点的所有 $2^5=32$ 种着色的集合。对 D_5 中的各置换求出在其作用下保持不变的着色数，然后利用定理 14.2.3。单位元 ι 使所有着色保持不变，其他四个旋转各自仅保持两种着色，即所有顶点为红色的着色和所有顶点为蓝色的着色不变，于是

$$|\mathcal{C}(\rho_5^i)|=\begin{cases}32, & i=0\\ 2, & i=1,2,3,4\end{cases}$$

现考虑任意一个反射 τ_j，比如 τ_1。为了在 τ_1 的作用下使着色保持不变，顶点 2 与 5 必须具有相同的颜色，且顶点 3 与 4 必须具有相同的颜色。所以，在 τ_1 的作用下保持着色不变可通过如下方法获得：对顶点 1 选择一种颜色（两种选择）、对顶点 2 与 5 选择一种颜色（两种选择）、对顶点 3 与 4 选择一种颜色（两种选择）。因此，在 τ_1 的作用下保持着色不变的着色数是 $2\times2\times2=8$。对其他各反射可进行类似计算，于是对每一个 $j=1,2,3,4,5$，有

$$|\mathcal{C}(\tau_j)|=8$$

因此，由式（14-8）得到不等价的着色数为

$$N(D_5,\mathcal{C})=\frac{1}{10}(32+2+2+2+2+8+8+8+8+8)=8$$ □

例 用红色、蓝色与绿色对一个正五角形的顶点进行着色，问有多少种不等价的方法？

⊖ 事实上，如果所有的颜色是不同的，那么就没有不同于恒等置换的置换能够保持任何颜色都不变。这是因为对于异于恒等置换的置换，至少有一种颜色必须变化，从而着色也就改变了。

参考上例，但现在的正五角形所有顶点的着色集$\mathcal{C}$的元素个数是 $3^5=243$，单位元 ι 使 243 种着色保持不变，其他每个旋转仅使 3 种着色保持不变。每个反射使 $3\times3\times3=27$ 种着色保持不变。于是不等价的着色数为

$$N(D_5,\mathcal{C})=\frac{1}{10}(243+3+3+3+3+27+27+27+27+27)=39$$

用 p 种颜色对一个正五角形的顶点进行着色，存在多少种不同的方法呢？推广以上的计算则得不等价的着色数应为

$$\frac{1}{10}(p^5+4\times p+5\times p^3)=\frac{p(p^2+4)(p^2+1)}{10}$$

□

例 设$S=\{\infty\cdot r,\infty\cdot b,\infty\cdot g,\infty\cdot y\}$是四个不相同对象 r，b，g，y 的多重集合，且每个对象均具有一个无限重复数。如果对从左到右的一个置换与从右到左的置换不加区分，那么存在多少种 S 的 n－置换？例如，将 r，g，g，g，b，y，y 与 y，y，b，g，g，g，r 视为是等价的。

答案是在置换群

$$G=\{\iota,\tau\}$$

的作用下，用红、蓝、绿、黄四种颜色对从 1 到 n 的整数进行着色的不等价的方法数。

$$\iota=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\n&n-1&\cdots&2&1\end{pmatrix}$$

这里 ι 为通常的恒等置换，置换 τ 是通过把 1 到 n 的整数按逆顺序排列得到的。注意 G 确实构成一个群，因为 $\tau\circ\tau=\iota$，从而，$\tau^{-1}=\tau$⊖。令$\mathcal{C}$是用 4 种已知的颜色对 1 到 n 的整数进行的 4^n 种着色所组成的集合，那么 ι 使$\mathcal{C}$中所有的着色保持不变。在 τ 的作用下，保持着色不变的着色数取决于 n 是偶数还是奇数。首先假设 n 为偶数，那么，在 τ 的作用下，保持着色不变当且仅当 1 与 n 具有相同的颜色，2 与 $n-1$ 具有相同的颜色，…，及 $n/2$ 与 $(n/2)+1$ 具有相同的颜色。所以 τ 使$\mathcal{C}$中的 $4^{n/2}$种着色保持不变。现在假设 n 是奇数，于是，在 τ 的作用下，保持着色不变当且仅当 1 与 n 具有相同的颜色，2 与 $n-1$ 具有相同的颜色，…，$(n-1)/2$ 与$(n+3)/2$ 具有相同的颜色，对$(n+1)/2$ 的颜色不作限制。所以，在 τ 的作用下，保持着色不变的着色数是 $4^{(n-1)/2}\times4=4^{(n+1)/2}$。综合以上两种情况，我们用弱取整函数表达则得

$$|\mathcal{C}(\tau)|=4^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}$$

应用 Burnside 公式（14-8），得到不等价的着色数为

$$N(G,\mathcal{C})=\frac{4^n+4^{\lfloor\frac{(n+1)}{2}\rfloor}}{2}$$

如果用 p 种颜色代替 4 种颜色，则不等价的着色数为

⊖ 考虑一条线段，其上有 n 个等间隔的点，分别标为 1，2，…，n。此时，τ 就是该线段 180 度的旋转，等价地，τ 也是该线段关于其垂直平分线的反射。

$$N(G, \mathcal{C})=\frac{p^n+p^{\lfloor\frac{(n+1)}{2}\rfloor}}{2}$$ □

在下一节中我们将利用定理 14.2.3 引出更深入的理论，它将使我们能够更容易地解决更困难的计数问题。

14.3 Pólya 计数公式

本节将讨论的计数公式是 Pólya 在他的一篇长而重要和颇具影响的文章[⊖]中提出（并被广泛应用）的。直到大约 1960 年，人们才认识到，在 Pólya 的这篇著名文章发表 10 年之前，Redfield 的发表过一篇文章，在该文章中他就提前使用了 Pólya 的基本方法[⊜]。

正如上节中所看到的那样，在置换群 G 作用在着色集 $\mathcal{C}$ 的情况下，Burnside 定理之所以能成功地用于计数不等价的着色数，与它能够求出 $\mathcal{C}$ 中颜色不变的着色数 $|\mathcal{C}(f)|$ 有关，而 $\mathcal{C}$ 中的颜色不变是由 G 中的置换 f 保持的。通过考虑置换的循环结构，计算可变得容易简便。

设 f 是 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换，$D_f=(X,A_f)$ 是顶点集为 X 且弧集为

$$A_f=\{(i,f(i)):i\in X\}$$

的有向图。该有向图有 n 个顶点与 n 个弧，各顶点的入度和出度等于 1。正如推论 11.8.8 所表明的那样，弧集 A_f 可以被划分为若干个有向圈，且每个顶点恰好只属于一个有向圈。理由很简单，因为从任意一个顶点 j 开始沿离开 j 的唯一弧继续向前并到达另一顶点 k，再对 k 继续重复该过程直至回到顶点 j，于是产生了一个有向圈；因为每个顶点的入度和出度均为 1，所以最终必然能到达我们的初始顶点 j，去掉如此获得的有向图的顶点和弧，直到 D_f 的所有顶点和弧取完为止，从而将 D_f 的顶点与弧全都划分成了有向圈。

例 设

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

是 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的一个置换，那么应用上面提到的过程，可把 D_f 划分成如下的有向圈：

$$1\to6\to3\to5\to1,\ 2\to8\to7\to2,\ 4\to4$$

对于 $\{1,2,\cdots,8\}$ 上的置换：1 变到 6、6 变到 3、3 变到 5、5 变到 1，余下的整数保持不变，我们记为[⊜]

$$[1\ \ 6\ \ 3\ \ 5]$$

⊖ G.Pólya：Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen，Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica*，68 (1937)，145-254。

⊜ J.H.Redfield：The theory of group-reduced distributions，*American Journal of Mathematics*，49 (1927)，433-455。

⊜ 这个记号有些含糊，因为不能由它确定被置换的元素的集合。我们所能得知的只是：该集合至少是 $\{1,3,5,6\}$。但是由于该集合在所处理的特定问题中是不言自明的，因此这里不会引起混乱。

于是，

$$[1\quad 6\quad 3\quad 5]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8\end{pmatrix}$$

对应置换[1 6 3 5]的有向图是由有向圈

$$1\to 6\to 3\to 5\to 1,\ 2\to 2,\ 4\to 4,\ 7\to 7,\ 8\to 8$$

组成的有向图。如果某些元素以循环的方式被置换且余下元素（如果有的话）保持不变，那么我们称这样的置换为*循环置换*或简称*循环*。如果循环中的元素个数为 k，则称它为 k-循环。因此，[1 6 3 5]是一个 4-循环。在 D_f 的划分中，其他有向圈给出如下循环

$$[2,8,7]和[4]$$

现在我们看到，将 D_f 划分成有向圈对应于将 f 因子分解成循环置换（关于合成运算）：

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}=[1\quad 6\quad 3\quad 5]\circ[2\quad 8\quad 7]\circ[4] \qquad (14\text{-}13)$$

这是因为置换 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环。

关于因子分解应注意两点。首先，与书写循环的顺序无关㊀，这是因为每个元素恰好在一个循环中出现。其次，1-循环[4]恰好是恒等置换㊁，于是，在式（14-13）中可将它略去而不影响其正确性。但是，我们还是选择将它留下，因为包括所有的 1－循环对我们的计数问题是有用的。 □

设 f 是集合 X 的任意置换，则推广上例，看到关于合成运算 f 有一个化成循环的因子分解

$$f=[i_1\quad i_2\quad \cdots\quad i_p]\circ[j_1\quad j_2\quad \cdots\quad j_q]\circ\cdots\circ[l_1\quad l_2\quad \cdots\quad l_r] \qquad (14\text{-}14)$$

其中，X 的各整数只出现在某一个循环中，我们称式（14-14）为 f 的*循环因子分解*。除循环出现的次序可以任意变化外，f 的循环因子分解是唯一的。在集合 X 的一个置换的循环因子分解中，X 的每个元素恰好出现一次。

例 求 8 阶二面体群 D_4（正方形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_4 中的各置换已在 13.1 节中计算过。每个置换的循环因子分解在下表中给出：

D_4	循环因子分解
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]
ρ_4	[1 2 3 4]
ρ_4^2	[1 3]∘[2 4]
ρ_4^3	[1 4 3 2]
τ_1	[1]∘[2 4]∘[3]

㊀ 即“不相交的循环”满足交换律。

㊁ 回忆此处 [4] 意味着：4 变到 4 而其他整数不动。这就是说，所有的整数包括 4 都是固定不变的，因此，我们得到的是恒等置换；如果该例中的置换是恒等置换，那么，就写成 $f=[1]\circ[2]\circ\cdots\circ[8]$。

（续）

D_4	循环因子分解
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4]
τ_3	[1 2]∘[3 4]
τ_4	[1 4]∘[2 3]

注意，在恒等置换 ι 的循环因子分解中，所有的循环是 1-循环，这与恒等置换保持所有的元素不变这一事实相吻合。在反射 τ_1 与 τ_2 的循环因子分解中，出现两个 1 阶循环，因为这些反射的每一个是关于连接正方形两个相对顶点的连线，所以，保持这些顶点不变。关于 τ_3 与 τ_4 的循环因子分解，我们有两个 2-循环，因为它们是连接对边中点连线的反射。在一个正 n 角形（n 为偶数）的顶点对称群中，反射有类似的性质，其中一半有两个 1-循环和（$(n/2)-1$）个 2-循环，另一半有 $n/2$ 个 2-循环。 □

例 求 10 阶两面体群 D_5（一个正 5 角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

我们已在 13.1 节中求出了 D_5 中的置换，将各置换的循环因子分解列表如下：

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]∘[5]
ρ_5	[1 2 3 4 5]
ρ_5^2	[1 3 5 2 4]
ρ_5^3	[1 4 2 5 3]
ρ_5^4	[1 5 4 3 2]
τ_1	[1]∘[2 5]∘[3 4]
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4 5]
τ_3	[1 5]∘[3]∘[2 4]
τ_4	[1 2]∘[3 5]∘[4]
τ_5	[1 4]∘[2 3]∘[5]

注意，在反射 τ_i 的循环因子分解中，恰有一个 1-循环出现，因为每一个这样的反射是关于顶点与其对边中点的连线，所以只有一个顶点保持不动。当 n 为奇数时，一个正 n 角形的顶点对称群中的反射有类似的性质，各反射有一个 1-循环和（$n-1$）/2 个 2-循环。 □

下面举例说明循环因子分解在计算不等价着色问题中的重要性。

例 设 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的置换 f 为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&1&7&6&5&3&8&2\end{pmatrix}$$

那么 f 的循环因子分解为

$$f=[1\quad 4\quad 7\quad 3]\circ[2\quad 9]\circ[5\quad 6]\circ[8]$$

假设我们用红色、白色和蓝色对 X 的元素进行着色，C 是由所有这样的着色构成的集合。

问 f 保持$\mathcal{C}$中着色不变的$|\mathcal{C}(f)|$是多少?

设 c 是使得 $f * \mathbf{c}=\mathbf{c}$ 的一种着色。首先，考虑 4-循环[1 4 7 3]，该 4-循环将 1 的颜色变到 4，4 的颜色变到 7，7 的颜色变到 3，3 的颜色变到 1。因为 f 保持着色 c 不变，于是，通过这个循环后得到

$$1\text{ 的颜色}=4\text{ 的颜色}=7\text{ 的颜色}=3\text{ 的颜色}=1\text{ 的颜色}$$

这意味着 1、4、7、3 具有相同的颜色。同理 2-循环[2 9]的元素 2 和 9 具有相同的颜色，2-循环[5 6]的元素 5 和 6 具有相同的颜色。因[8]是 1-循环，所以对 8 的着色没有任何限制。因此，f 保持着色不变，即满足 $f * \mathbf{c}=\mathbf{c}$ 存在多少种着色 c? 答案是很清楚的。我们对{1,4,7,3}任意指定红、白、蓝三种颜色中的一种（三种选择），对{2,9}任意指定红、白、蓝三种颜色中的一种（三种选择），对{5,6}任意指定红、白、蓝三种颜色中的一种（三种选择），对{8}任意指定红、白、蓝三种颜色中的一种（三种选择），总计有 $3^4=81$ 种着色。注意答案中的指数 4 是 f 的循环因子分解中循环的个数，且答案与循环的阶数无关。 □

上例的分析是相当一般化的。不管所用的颜色数是多少，该方法可用于确定任意置换保持着色不变的着色数。我们在下面的定理中将给出这个结论。置换 f 的循环因子分解中的循环个数记为

$$\#(f)$$

定理 14.3.1 设 f 是集合 X 的一个置换，假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色，令$\mathcal{C}$是 X 的所有着色的集合，则 f 保持$\mathcal{C}$中着色不变的着色数为

$$|\mathcal{C}(f)|=k^{\#(f)}$$

例 用红色、白色、蓝色对一个正方形的顶点进行着色，问共有多少种不等价的着色方法?

令$\mathcal{C}$是用红色、白色、蓝色对一个正方形的顶点所进行的 $3^4=81$ 种着色的集合。正方形的顶点对称群是二面体群 D_4，它的各元素的循环因子分解已被求出。对 D_4 中的各置换 f，用表示$\#(f)$和 f 保持着色不变的着色数$|\mathcal{C}(f)|$的附加列重复结论如下：

D_4 中的 f	循环因子分解	$\#(f)$	$\lvert\mathcal{C}(f)\rvert$
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	$3^4=81$
ρ_4	$[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$	1	$3^1=3$
ρ_4^2	$[1\ \ 3]\circ[2\ \ 4]$	2	$3^2=9$
ρ_4^3	$[1\ \ 4\ \ 3\ \ 2]$	1	$3^1=3$
τ_1	$[1]\circ[2\ \ 4]\circ[3]$	3	$3^3=27$
τ_2	$[1\ \ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	$3^3=27$
τ_3	$[1\ \ 2]\circ[3\ \ 4]$	2	$3^2=9$
τ_4	$[1\ \ 4]\circ[2\ \ 3]$	2	$3^2=9$

根据定理 14.2.3，则得不等价的着色方法数为

$$N(D_4,\mathcal{C})=\frac{81+3+9+3+27+27+9+9}{8}=21$$ □

定理 14.2.3 和定理 14.3.1 为我们提供了一种计算集合（在集合 X 的一个置换群 G 的作用下）$\mathcal{C}$ 中不等价的着色数的方法，其中，$\mathcal{C}$ 是用给定颜色集对 X 的所有着色的集合。该方法需要对 G 中的各置换能够计算出循环因子分解（或至少知道循环因子分解中的循环个数）。为了对更一般的着色集 $\mathcal{C}$ 求出不等价的着色数，我们对 G 中的置换个数引进一个生成函数，其中，在置换的循环因子分解中各阶循环都具有相同的循环数。

令 f 是含有 n 个元素的集合 X 的一个置换。假设 f 的循环因子分解有 e_1 个 1-循环，e_2 个 2-循环，$\cdots$，e_n 个 $n-$循环。因 X 的各元素在 f 的循环因子分解中恰好出现在一个循环中，所以，e_1，e_2，$\cdots$，e_n 是非负整数且满足

$$1e_1+2e_2+\cdots+ne_n=n \tag{14-15}$$

我们称 n 元组 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是置换 f 的型，记为

$$type(f)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

注意，在 f 的循环因子分解中，循环数为

$$\#(f)=e_1+e_2+\cdots+e_n$$

因为置换的型仅取决于循环因子分解中循环的阶数，并不取决于元素在哪个循环中，所以，不同的置换可以有相同的型。既然现在仅按型区分置换，那么我们引进 n 个不定元

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$$

其中，z_k 对应一个 k 阶循环（$k=1,2,\cdots,n$）。对于具有 $type(f)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的每个置换 f，定义 f 的单项式为

$$mon(f)=z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$$

注意，f 的单项式的总次数等于 f 的循环因子分解中的循环个数 $\#(f)$。

设 G 是 X 的一个置换群。对 G 中每个置换 f 的单项式求和，得到关于 G 中的置换按照型的生成函数

$$\sum_{f\in G}mon(f)=\sum_{f\in G}z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n} \tag{14-16}$$

如果合并式（14-16）中的同类项，$z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$ 的系数等于型为 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的 G 中的置换个数。G 的循环指数定义为该生成函数除以 G 中的置换个数 $|G|$，即

$$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$$

例 求二面体群 D_4 的循环指数。

在定理 14.3.1 之后的例子中，给出了包含 D_4 中各置换循环因子分解的一张表。利用那些因子分解，我们在下表中给出各置换的型和相关的单项式。

D_4	循环因子分解	型	单项式
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	(4, 0, 0, 0)	$z_1^4z_2^0z_3^0z_4^0=z_1^4$
ρ_4	$[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$	(0,0,0,1)	$z_1^0z_2^0z_3^0z_4^1=z_4$
ρ_4^2	$[1\ \ 3]\circ[2\ \ 4]$	(0,2,0,0)	$z_1^0z_2^2z_3^0z_4^0=z_2^2$
ρ_4^3	$[1\ \ 4\ \ 3\ \ 2]$	(0,0,0,1)	$z_1^0z_2^0z_3^0z_4^1=z_4$
τ_1	$[1]\circ[2\ \ 4]\circ[3]$	(2,1,0,0)	$z_1^2z_2^1z_3^0z_4^0=z_1^2z_2$
τ_2	$[1\ \ 3]\circ[2]\circ[4]$	(2,1,0,0)	$z_1^2z_2^1z_3^0z_4^0=z_1^2z_2$
τ_3	$[1\ \ 2]\circ[3\ \ 4]$	(0,2,0,0)	$z_1^0z_2^2z_3^0z_4^0=z_2^2$
τ_4	$[1\ \ 4]\circ[2\ \ 3]$	(0,2,0,0)	$z_1^0z_2^2z_3^0z_4^0=z_2^2$

D_4 的循环指数是

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$$ □

现在假如我们知道了集合 X 的置换群 G 的循环指数，那么就能用指定的颜色集，在 X 的所有着色集中求出不等价的着色数。

定理 14.3.2 设 X 是有 n 个元素的一个集合，假设有 k 种可用的颜色集可用来对 X 的元素进行着色。令 $\mathcal{C}$ 是 X 的所有 k^n 种着色的集合，G 是 X 的一个置换群。则不等价的着色数是用 $z_i=k(i=1,2,\cdots,n)$ 代入 G 的循环指数中而得到的数，即

$$N(G,\mathcal{C})=P_G(k,k,\cdots,k)$$

证明： 该定理是定理 14.2.3 与定理 14.3.1 的一个推论。G 的循环指数是 G 中置换 f 的单项式求和的平均值，即

$$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$$

由定理 14.3.1 知 f 保持 $\mathcal{C}$ 中着色不变的着色数是

$$k^{\#(f)}=k^{e_1+e_2+\cdots+e_n}=k^{e_1}k^{e_2}\cdots k^{e_n}$$

其中 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 f 的型。由定理 14.2.3 知不等价的着色数是

$$N(G,\mathcal{C})=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}k^{e_1}k^{e_2}\cdots k^{e_n}=P_G(k,k,\cdots,k)$$ □

例 已知一个有 k 种颜色的色集合，问对一个正方形的顶点进行着色，不等价的着色数是多少？

我们已经求出二面体群 D_4 的循环次数是

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$$

因此，根据定理 14.3.2，不等价的着色数是

$$P_{D_4}(k,k,k,k)=\frac{k^4+2k+3k^2+2k^2k}{8}=\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k}{8}$$

如果颜色数为 $k=6$，那么不等价的着色数是

$$P_{D_4}(6,6,6,6)=\frac{6^4+2\times6^3+3\times6^2+2\times6}{8}=231$$ □

假如$\mathcal{C}$是可能有 k 种已知颜色的所有着色构成的集合，那么定理 14.3.2 给出了一种令人满意的计数$\mathcal{C}$中不等价着色数的方法。但该定理中的公式需要知道置换群 G 中各种类型的置换个数，因此可能很难应用。然而，我们所希望的是尽可能地简便实用，例如，假设 G 可能是已着色对象集合 X 的任意置换群，我们最终关心的是使用更一般的着色集$\mathcal{C}$。回顾定理 14.2.3，对$\mathcal{C}$的唯一限制是 G 可作为$\mathcal{C}$上的一个置换群，也就是说，G 中的各置换 f 将$\mathcal{C}$中的着色 $\mathbf{c}$ 对应到$\mathcal{C}$中的另一个着色 $f*\mathbf{c}$。在更一般的情况下，人们最希望的是有某种有效的方法用来求不等价的着色数。现在我们来说明怎样用 G 的循环指数，求出当使用的各颜色次数为指定时不等价的着色数。

设 X 中各颜色的元素个数是指定的，$\mathcal{C}$是由 X 的所有着色构成的集合。对 X 中的每一个置换 f 与$\mathcal{C}$中的每一种着色 $\mathbf{c}$，一种特定的颜色出现在 $\mathbf{c}$ 中的次数与该颜色出现在 $f*\mathbf{c}$ 中的次数相同。换句话说，对 X 中的对象与其颜色一起进行置换并不改变各种颜色的数目。这意味着 X 的任意置换群都可作为着色集合$\mathcal{C}$上的一个置换群。

例　对一个正五角形的三个顶点着红色，对其余两个顶点着蓝色，问有多少种不等价的着色?

令$\mathcal{C}$是使得正五角形的三个顶点为红色，其余两个顶点为蓝色的所有着色构成的集合。因为选三个顶点着红色有 10 种方式，于是，另两个顶点就着蓝色，所以$\mathcal{C}$中的着色数为 10。顶点对称群 D_5 可作为$\mathcal{C}$上的一个置换群。我们在前面已获得 G 中各置换的循环因子分解，在下表中，我们再次列出这些因子分解以及在 D_5 中各置换的作用下保持$\mathcal{C}$中着色不变的着色数。

D_5	循环因子分解	不变的着色数
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$	10
ρ_5	$[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$	0
ρ_5^2	$[1\ 3\ 5\ 2\ 4]$	0
ρ_5^3	$[1\ 4\ 2\ 5\ 3]$	0
ρ_5^4	$[1\ 5\ 4\ 3\ 2]$	0
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$	2
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$	2
τ_3	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$	2
τ_4	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$	2
τ_5	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$	2

除单位元外没有任何旋转使任意着色都保持不变的原因在于：若这样的旋转使一种着色不变，那么着色中所有的颜色必须相同（从而不能如指定的那样具有三个红色顶点与两个蓝色顶点）。每个反射保持$\mathcal{C}$中的两种着色不变，这是因为五角形中的每一种反射都有型（1，2，0，0，0）。为了在固定着色中有两个蓝色顶点，我们必须对因子分解中的两个 2 阶循环之一的顶点着蓝色。应用定理 14.2.3，计数该型的不等价的着色数是

$$\frac{10+0+0+0+0+2+2+2+2+2}{10}=2$$

该答案易直接得到，两种不等价的着色一种为两个连续的蓝色顶点，另一种为两个不连续的蓝色顶点。 □

为了用 Burnside 定理来求各颜色出现的次数被指定时的不等价的着色数，我们必须能够求出置换保持着色不变的着色数。设 f 是集合 X 的一个置换，并假设

$$type(f)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

和

$$mon(f)=z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$$

那么，在 f 的循环因子分解中有 e_1 个 1 阶循环，e_2 个 2 阶循环，…，e_n 个 n 阶循环。为讨论简单起见，假设仅有红色与蓝色两种颜色。令

$$\mathcal{C}_{p,q}$$

表示所有的 p 个元素着红色且 $q=n-p$ 个元素着蓝色的 X 的着色集合。$\mathcal{C}_{p,q}$中的一种着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中各循环中的所有元素的颜色相同。因此，为求$\mathcal{C}_{p,q}$中的着色在 f 的作用下保持不变的着色数，我们可认为是对循环指定红色元素的个数为 p（从而指定为蓝色的个数为 $q=n-p$）。假设指定为红色的 1-循环有 t_1 个，指定为红色的 2-循环有 t_2 个，…，指定为红色的 n-循环有 t_n 个。欲使指定为红色的元素个数是 p，必须有

$$p=t_1 1+t_2 2+\cdots+t_n n \tag{14-17}$$

于是，在 f 的作用下使$\mathcal{C}_{p,q}$中着色保持不变的着色数$|\mathcal{C}_{p,q}(f)|$可以这样得到：首先在式（14-17）中选一个解，其中整数 t_1，t_2，…，t_n 满足

$$0\leqslant t_1\leqslant e_1,0\leqslant t_2\leqslant e_2,\cdots,0\leqslant t_n\leqslant e_n \tag{14-18}$$

（确定指定为红色的每一个长度循环有多少个），然后把该解乘以

$$\binom{e_1}{t_1}\binom{e_2}{t_2}\cdots\binom{e_n}{t_n}$$

（确定长度为 1，2，…，n 的哪些循环被指定为红色）。

现将红颜色考虑为变量 r，蓝颜色为变量 b，我们对此以通常的方式进行代数处理，则满足式（14-18）的式（14-17）的解的个数是对 f 的单项式做代换

$$z_1=r+b,\quad z_2=r^2+b^2,\quad \cdots,\quad z_n=r^n+b^n \tag{14-19}$$

而得到的表达式

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\cdots(r^n+b^n)^{e_n}$$

中 r^pb^q 的系数。一个置换群 G 的循环指数是 G 中置换 f 的单项式的平均值。因此，根据定理 14.2.3，$\mathcal{C}_{p,q}$中不等价的着色数等于对 G 的循环指数作代换式（14-19）而得到的表达式

$$P_G(r+b,r^2+b^2,\cdots,r^n+b^n) \tag{14-20}$$

中 r^pb^q 的系数。这意味着式（14-20）是当$\mathcal{C}_{p,q}$中用各种颜色着色的元素个数为指定时关于

不等价着色数的一个二元变量生成函数[⊖]。

在上面的讨论中我们使用了任意种颜色，并且给出了关于各种颜色数为指定时，不等价着色数的一个生成函数。这为我们提供了本书的最后定理[⊖]，该定理就是通常所称的 Pólya 定理，并且它的动机、推导与应用已成为本章的主要目的。

至于两种颜色的情形，我们需要将颜色看成变量 u_1，u_2，…，u_k 进行代数处理。在以上论证中唯一的变化是由两种颜色变为 k 种颜色。

定理 14.3.3 设 X 是一个元素集合，G 是 X 的一个置换群，$\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$是 k 种颜色的一个集合，$\mathcal{C}$是 X 的任意着色集并且 G 为$\mathcal{C}$上的一个置换群，那么根据各颜色的数目，$\mathcal{C}$的不等价着色数的生成函数是由循环指数$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_n)$通过做变量代换

$$z_j=u_1^j+\cdots+u_k^j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

而得到的表达式

$$P_G(u_1+\cdots+u_k,u_1^2+\cdots+u_k^2,\cdots,u_1^n+\cdots+u_k^n) \tag{14-21}$$

换言之，式（14-21）中

$$u_1^{p_1}u_2^{p_2}\cdots u_k^{p_k}$$

的系数等于 X 中的p_1 个元素着颜色 u_1，p_2 个元素着颜色 u_2，…，p_k 个元素着颜色u_k 的$\mathcal{C}$中不等价的着色数。

将 $u_i=1$（$i=1$，2，…，k）代入式（14-21），得其系数和，从而得到 X 用k 种颜色着色的不等价着色总数。由这样的代换产生

$$P_G(k,k,\cdots,k)$$

所以，定理 14.3.3 是定理 14.3.2 的一个更精细的改进，它比定理 14.3.2 包含更详尽的信息，后者因用 1 代替每个 u_i 而丢失这些信息。

例 用 2 种颜色及 3 种颜色对一个正方形的顶点着色，求它们的不等价着色的生成函数。

由前面的计算可知正方形的顶点对称群 D_4 的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$$

设两种颜色为 r 与b，则生成函数为

⊖ 生成函数中的这两个变量是 r 和b。我们可以通过令 $b=1$ 而得到单变量生成函数。这样做不会失去什么，因为我们已经说过，一旦红色的数目被指定，剩下的就是蓝色的数目了。然而，由于我们要写下任意颜色数目的生成函数而又不能将其化成单变量函数，因此，这里最好使用两个变量。

⊖ 如果你从第一页开始到现在做了大部分的练习，那么祝贺你；你知道了组合数学和图论的许多知识。但是，还有许多的知识需要知道，而且知识量每天都在增长。在各种杂志中组合数学和图论的研究论文的数量看起来也在逐年增加。然而这还不足为怪。我希望你已经发现，这方面的内容是令人兴奋和着迷的，而在现实世界中的应用我们已经给出某些提示性的线索。在本章的练习之后，为进一步研究，我们列出了一些参考书。

$$p_{D_4}(r+b, r^2+b^2, r^3+b^3, r^4+b^4)$$
$$=\frac{1}{8}((r+b)^4+2(r^4+b^4)+3(r^2+b^2)^2+2(r+b)^2(r^2+b^2))$$
$$=\frac{1}{8}(8r^4+8r^3b+16r^2b^2+8rb^3+8b^4)$$

因此得

$$P_{D_4}(r+b, r^2+b^2, r^3+b^3, r^4+b^4)=r^4+r^3b+2r^2b^2+rb^3+b^4 \tag{14-22}$$

于是，不等价的着色总数是 6，即式（14-22）中系数的和。其中，全部顶点着红色的有一种，全部顶点着蓝色的有一种，三个顶点着红色与一个顶点着蓝色的有一种，一个顶点着红色与三个顶点着蓝色的有一种，最后，两个顶点着红色与两个顶点着蓝色的有两种。

现在，假设有三种颜色 r、b 与 g，则不等价着色的生成函数为

$$P_{D_4}(r+b+g, r^2+b^2+g^2, r^3+b^3+g^3, r^4+b^4+g^4)$$
$$=\frac{1}{8}((r+b+g)^4+2(r^4+b^4+g^4)+3(r^2+b^2+g^2)^2+2(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2))$$

利用第 5 章中的多项式定理，可以计算出该表达式。如，$r^1b^2g^1$ 的系数为

$$\frac{1}{8}(12+0+0+4)=2$$

于是，存在一个顶点为红色、两个顶点为蓝色、一个顶点为绿色的两种不等价的着色。不等价的着色总数为

$$P_{D_4}(3,3,3)=21$$ □

例 用 2 种颜色及 3 种颜色分别对一个正五角形的顶点着色，求它们各自不等价着色的生成函数。

由我们前面的计算知 D_5 的循环指数为

$$P_{D_5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)=\frac{1}{10}(z_1^5+4z_5+5z_1z_2^2)$$

注意，循环指数中既不出现 z_3 也不出现 z_4，这是因为 D_5 中的置换在其循环因子分解中均无 3-循环及 4-循环。假设有 2 种颜色 r 与 b，则关于不等价着色的生成函数为

$$P_{D_5}(r+b, r^2+b^2, r^3+b^3, r^4+b^4, r^5+b^5)$$
$$=\frac{1}{10}((r+b)^5+4(r^5+b^5)+5(r+b)(r^2+b^2)^2)$$
$$=r^5+r^4b+2r^3b^2+2r^2b^3+rb^4+b^5$$

不等价的着色总数为

$$1+1+2+2+1+1=8$$

关于 3 种颜色，不等价着色的生成函数为

$$\frac{1}{10}((r+b+g)^5+4(r^5+b^5+g^5)+5(r+b+g)(r^2+b^2+g^2)^2)$$

不等价着色总数为

$$\frac{1}{10}(3^5+4\times3+5\times3\times3^2)=39$$ □

例（一个立方体的顶点与面的着色） 用指定的颜色对一个立方体的顶点与面进行着色，试求立方体的对称群及不等价的着色数。

一个立方体的对称有 24 个，它们属于四种不同类型的旋转：

ⅰ）恒等旋转 ι（1 个）

ⅱ）绕三对对立面的中心旋转

a）90°（3 个）

b）180°（3 个）

c）270°（3 个）

ⅲ）绕对边中点连线的旋转 180°（6 个）

ⅳ）绕对角点的旋转

a）120°（4 个）

b）240°（4 个）

一个立方体对称的总个数是 24。

在下表中，我们把每类对称看成是 8 个顶点的置换（作为立方体顶点对称群的元素）和 6 个面的置换（作为立方体面对称群的元素）。在该表中我们参考了以上给出的对称的分类。

对称种类	个数	顶点类	面类
ⅰ)	1	(8,0,0,0,0,0,0,0)	(6,0,0,0,0,0)
ⅱ)a)	3	(0,0,0,2,0,0,0,0)	(2,0,0,1,0,0)
ⅱ)b)	3	(0,4,0,0,0,0,0,0)	(2,2,0,0,0,0)
ⅱ)c)	3	(0,0,0,2,0,0,0,0)	(2,0,0,1,0,0)
ⅲ)	6	(0,4,0,0,0,0,0,0)	(0,3,0,0,0,0)
ⅳ)a)	4	(2,0,2,0,0,0,0,0)	(0,0,2,0,0,0)
ⅳ)b)	4	(2,0,2,0,0,0,0,0)	(0,0,2,0,0,0)

由上表我们看到立方体的顶点对称群 G_C 的循环指数为

$$P_{G_C}(z_1,z_2,\cdots,z_8)=\frac{1}{24}(z_1^8+6z_4^2+9z_2^4+8z_1^2z_3^2)$$

及立方体的面对称群 G_F 的循环指数为

$$P_{G_F}(z_1,z_2,\cdots,z_6)=\frac{1}{24}(z_1^6+6z_1^2z_4+3z_1^2z_2^2+6z_2^3+8z_3^2)$$

用红色与蓝色对一个立方体的顶点着色，不等价着色的生成函数为

$$P_{G_C}(r+b,r^2+b^2,\cdots,r^8+b^8)$$

$$=\frac{1}{24}((r+b)^8+6(r^4+b^4)^2+9(r^2+b^2)^4+8(r+b)^2(r^3+b^3)^2)$$

关于立方体面的生成函数为

$$P_{G_F}(r+b,r^2+b^2,\cdots,r^6+b^6)$$

$$=\frac{1}{24}((r+b)^6+6(r+b)^2(r^4+b^4)+3(r+b)^2(r^2+b^2)^2+6(r^2+b^2)^3+8(r^3+b^3)^2)$$

现在进行某种代数计算得到顶点的不等价着色的生成函数为

$$r^8+r^7b+3r^6b^2+3r^5b^3+7r^4b^4+3r^3b^5+3r^2b^6+rb^7+b^8$$

以及关于面的不等价着色的生成函数为

$$r^6+r^5b+2r^4b^2+2r^3b^3+2r^2b^4+rb^5+b^6$$

关于顶点的以及面的不等价着色总数分别是 23 与 10。

如果我们有 k 种颜色，则不等价的顶点着色数是

$$\frac{1}{24}(k^8+6k^2+9k^4+8k^2k^2)=\frac{1}{24}(k^8+17k^4+6k^2)$$

不等价的面着色数是

$$\frac{1}{24}(k^6+6k^2k+3k^2k^2+6k^3+8k^2)=\frac{1}{24}(k^6+3k^4+12k^3+8k^2) \qquad \square$$

在最后的例子中，我们说明如何应用定理 14.3.3 来求具有指定边数的 n 阶非同构图的个数。

例 求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

例中数 4 确实很小，以至于我们不需借助定理 14.3.3 便可解该问题，但是，在本例中我们的目的是说明如何将定理 14.3.3 用于图的计数。

设$\mathcal{G}_4$是顶点集为$V=\{1,2,3,4\}$的所有的 4 阶图的集合，我们寻求$\mathcal{G}_4$中具有指定边数的非同构图个数的生成函数。$\mathcal{G}_4$中图$H_1=(V,E_1)$的边集合 E_1 是

$$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

的一个子集。我们可将 H_1 看成是集合 X 中的边有两种颜色“是”（或 y）与“否”（或 n）的着色，其中，E_1 中的边有颜色 y，非 E_1 中的边有颜色 n。设$\mathcal{C}$是有 y 与 n 两种颜色的 X 的所有着色集合。因此，$\mathcal{G}_4$中的图恰好是$\mathcal{C}$中的着色！为获得问题的解，这是第一个重要的发现。

设$H_2=(V,E_2)$是$\mathcal{G}_4$中的另一个图，则 H_1 与 H_2 是同构的当且仅当存在$V=\{1,2,3,4\}$的一个置换 f（S_4 的置换），使得 $\{i, j\}$ 是 E_1 中的边当且仅当$\{f(i),f(j)\}$是 E_2 中的边。S_4 中的 24 种置换中每一种置换 f 都利用规则

$$\{i,j\}\to\{f(i),f(j)\}(\{i,j\}\in X)$$

置换 X 中的边。例如，设

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$

则 f 置换 X 中的边如下：

$$\begin{pmatrix}\{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \\ \{2,3\} & \{3,4\} & \{1,3\} & \{2,4\} & \{1,2\} & \{1,4\}\end{pmatrix}$$

令 $S_4^{(2)}$ 是通过这种方式从 S_4 得到的 X 的置换群[⊖]。我们的第二个重要发现是：$\mathcal{G}_4$ 中的两个图是同构的当且仅当作为 X 的着色它们是等价的。这一发现是同构图与等价着色定义的一个直接结果。

因此，根据颜色 y 和 n 的数目，我们可将问题化为计数关于置换群 $S_4^{(2)}$ 的 $\mathcal{C}$ 中不等价着色数的问题。但这恰好是定理 14.3.3 所提出的，唯一余下的是计算 $S_4^{(2)}$ 的循环指数。为此，我们必须计数 $S_4^{(2)}$ 中 24 种置换中每种置换的型，计算结果总结于下表中。

型	单项式	$S_4^{(2)}$ 中的置换数
(6,0,0,0,0,0)	z_1^6	1
(2,2,0,0,0,0)	$z_1^2z_2^2$	9
(0,0,2,0,0,0)	z_3^2	8
(0,1,0,1,0,0)	z_2z_4	6

$S_4^{(2)}$ 的循环指数为

$$P_{S_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\frac{1}{24}(z_1^6+9z_1^2z_2^2+8z_3^2+6z_2z_4) \tag{14-23}$$

根据定理 14.3.3，$\mathcal{C}$ 中不等价着色数的生成函数可通过对式（14-23）作代换

$$z_j=y^j+n^j(j=1,2,3,4,5,6)$$

而获得。通过少量的计算可得该结果为：

$$y^6+y^5n+2y^4n^2+3y^3n^3+2y^2n^4+yn^5+n^6$$

注意，颜色 y 的数目等于边数，于是，根据边数我们看到 4 阶非同构图的个数可由下表给出：

边数	非同构图的个数
6	1
5	1
4	2
3	3
2	2
1	1
0	1

⊖ 由于 S_4 是一个置换群，则容易推出，$S_4^{(2)}$ 也是一个置换群。作为抽象群而不是作为置换群，S_4 和 $S_4^{(2)}$ 是同构的。

特别地，4 阶非同构图的总个数等于 11。

14.4 练习题

1. 设

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&2&1&5&3\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&2&4&1\end{pmatrix}$$

求

ⅰ）$f\circ g$，$g\circ f$；ⅱ）f^{-1}，g^{-1}；ⅲ）f^2，f^5；ⅳ）$f\circ g\circ f$；ⅴ）g^3，$f\circ g^3\circ f^{-1}$。

2. 证明置换的合成满足结合律：$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$。
3. 求一个等边三角形的对称群与顶点对称群。
4. 求一个等腰但不等边的三角形的对称群与顶点对称群。
5. 求一个既不等腰也不等边的三角形的对称群与顶点对称群。
6. 求一个正四面体的对称群（提示：有 12 个对称)。
7. 求一个正四面体的顶点对称群。
8. 求一个正四面体的边对称群。
9. 求一个正四面体的面对称群。
10. 求一个非正方形矩形的对称群与顶点对称群。
11. 求一个正六边形的顶点对称群（12 阶二面体群 D_6)。
12. 求一个正方形的边对称群中的全部置换。
13. 设 f 与 g 为习题 1 中的置换，$\mathbf{c}=(R, B, B, R, R, R)$ 是用颜色 R 与 B 对 1、2、3、4、5、6 进行的一种着色。求以下对 $\mathbf{c}$ 的作用：
    ⅰ）$f*\mathbf{c}$　ⅱ）$f^{-1}*\mathbf{c}$　ⅲ）$g*\mathbf{c}$　ⅳ）$(g\circ f)*\mathbf{c}$ 与 $(f\circ g)*\mathbf{c}$
    ⅴ）$(g^2\circ f)*\mathbf{c}$
14. 用红色与蓝色（用红色、白色与蓝色）对一个等边三角形的顶点进行着色，试通过检验所有可能出现的情况，求出不等价的着色数。
15. 用红色与蓝色（用红色、白色与蓝色）对一个正四面体的顶点进行着色，试通过检验所有可能出现的情况，求出不等价的着色数。
16. 刻画 S_n 中置换 f 的循环因子分解的特征，其中 f 满足 $f^{-1}=f$（即 $f^2=\iota$)。
17. 用红色与蓝色对一个正六边形的顶点进行着色，在 14.2 节中已得到有 8 种不等价的着色。请详细给出这 8 种不等价的着色。
18. 用 p 种颜色对一个正方形的顶点进行着色，利用定理 14.2.3，求不等价的着色数。
19. 用红色与蓝色对一个等边三角形的顶点进行着色，利用定理 14.2.3，求不等价的着色数。用 p 种颜色（参考练习题 3）如何？
20. 用红色与蓝色对一个等腰但不等边的三角形的顶点进行着色，利用定理 14.2.3，求不等价的着色数。用 p 种颜色（参考练习题 4）如何？
21. 用红色与蓝色对一个既不等腰也不等边的三角形的顶点进行着色，利用定理 14.2.3，求不等价的着色数。用 p 种颜色（参考练习题 5）如何？
22. 用红色与蓝色对一个非正方形矩形的顶点进行着色，利用定理 14.2.3 求不等价的着色

数。用 p 种颜色（参考练习题 10）如何？

23. 一副有标号的多米诺牌是由两个正方形沿一条边连接构成的，其中，每个正方形在一个面上刻有 0、1、2、3、4、5 或 6 个点。牌的两个正方形可以有相同的点数。
    i ）利用定理 14.2.3 求不同的有标号的多米诺牌数。
    ii ）如果用 0、1、…、$p-1$ 或 p 个点刻于正方形的面上，问有多少种不同的有标号的多米诺牌？
24. 一副双面标号的多米诺牌是由两个正方形沿一条边连接构成的，其中每个正方形在两个面上刻有 0、1、2、3、4、5 或 6 个点。
    i ）利用定理 14.2.3 求不同的双面标号的多米诺牌数。
    ii ）如果用 0、1、…、$p-1$ 或 p 个点刻于正方形的面上，问有多少种不同的双面标号的多米诺牌？
25. 用 3 个红色珠子与 2 个蓝色珠子镶成项链，问有多少种不同的项链？
26. 用 4 个红色珠子与 3 个蓝色珠子镶成项链，问有多少种不同的项链？
27. 求习题 1 中置换 f 与 g 的循环因子分解。
28. 设 f 是集合 X 的一个置换，试给出由 f 的循环因子分解求 f^{-1} 的循环因子分解的一种简单算法。
29. 求二面体群 D_6 中每个置换的循环因子分解（参考练习题 11）。
30. 求同一集合 X 上的置换 f 与 g，使得 f 与 g 在各自的循环因子分解中均有 2 个循环，但 $f\circ g$ 仅有一个。
31. 用 k 种颜色对一个正五角形的顶点进行着色，求不等价的着色数。
32. 用红色、白色与蓝色对一个正六边形的顶点进行着色，求不等价的着色数（参考练习题 29）。
33. 证明：任意置换与它的逆置换具有同样的型（参考练习题 28）。
34. 设 e_1、e_2、…、e_n 是满足 $1e_1+2e_2+\cdots+ne_n=n$ 的非负整数，试说明如何构造集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换 f，使得 $\text{type}(f)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$。
35. 用 k 种颜色对一个正六角形的顶点进行着色，求不等价的着色数（参考练习题 29）。
36. 用红色、白色与蓝色对一个正五角形的顶点进行着色，求使得两顶点为红色、两顶点为白色及一顶点为蓝色的不等价的着色数。
37. 求二面体群 D_6 的循环指数（参考练习题 29）。
38. 分别用 2 种及 3 种颜色对一个正六边形的顶点进行着色，求不等价着色的生成函数（参考练习题 37）。
39. 求一个正方形边对称群的循环指数。
40. 用红色与蓝色对一个正方形的边进行着色，求不等价着色的生成函数。用 k 种颜色时有多少种不等价的着色？（参考练习题 39）。
41. 设 n 是一个素数，证明 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的各置换 ρ_n、ρ_n^2、…、ρ_n^{n-1} 皆是一个 n 阶循环（回想置换 ρ_n 将 1 变到 2、将 2 变到 3、…、将 $n-1$ 变到 n、将 n 变到 1）。
42. 设 n 是一个素数，用 k 种不同颜色的 n 个珠子做成项链，求不同的项链数。
43. 将一个 3 行 3 列棋盘中的 9 个正方形着红色与蓝色，棋盘是可自由旋转的，但不能做翻转运动。求不等价着色的生成函数及其着色总数。

44. 一个 3 行 3 列棋盘形式的着色玻璃窗有 9 个正方形，其中，各正方形着红色或蓝色（颜色是透明的，且可从两面观看窗户）。求不同的着色玻璃窗的生成函数及着色玻璃窗的总数。
45. 有 16 个正方形的 4 行 4 列棋盘形式的着色玻璃窗，重复习题 44。
46. 如果 p 是一个素数，求由 p 个红色珠子与 p 个蓝色珠子组成的不同项链的生成函数 (参考练习题 42)。
47. 求二面体群 D_{2p}的循环指数，其中 p 是一个素数。
48. 求由 $2p$ 个红色或蓝色珠子组成的不同项链的生成函数，其中 p 是一个素数。
49. 用 10 个球垒成一个三角阵，使得 1 个球在 2 个球之上，2 个球在 3 个球之上，3 个球在 4 个球之上（联想到弹子戏）。这个三角阵是可自由旋转的。用红色与蓝色对该阵着色，求不等价着色数的生成函数。如果允许翻转该阵，求出相应的生成函数。
50. 利用定理 14.3.3，求 5 阶非同构图的生成函数（提示：本练习需要一定的工作量，是难度适中的最后一个习题。需求出集合 X 的置换群 $S_5^{(2)}$ 的循环指数，其中，X 是由$\{1,2,3,4,5\}$中 10 个无序的不同整数对（一个 5 阶图中可能的边）所构成的。首先计算每类 S_5 中各型置换 f 的个数，然后利用如下事实：作为 X 上的一个置换f 的型只依赖于作为$\{1,2,3,4,5\}$上的一个置换 f 的型)。

练习题的答案与提示

我们只给出部分练习题解答与提示。

第 1 章的练习题

3. 不能。
4. $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$；$f(12)=233$。
5. 11。
10. 使用 5×6 棋盘并用 2×3 的牌片。
16. 不能。
21. 由于 3 个国家 1，2 和 10 中的每两个都有一条公共边，因此 3 种颜色是必须的。使用红、蓝、白着色共有 12 种不同的着色方法。
22. 否。公共线的和是（$1+2+\cdots+7$）/3，但这个数不是一个整数。
27. 简单的实验通常是会成功的。
30. 是平衡的。游戏人Ⅱ应该从大小为 22 的堆中取走 14 枚硬币。
32. 提示：考虑单位数字（units digit）。
35. 第二游戏人。考虑 5。
36. 第一游戏人。
37. 105。
39. 提示：考虑一种配对方法，使 n 条线段的总长度尽可能地小。
40. 提示：n 必须是偶数。把方格涂成黑色和白色，第 1，3，…，$n-1$ 列所有方格都涂成黑色，而第 2，4，…，n 列所有方格都涂成白色。棋盘上以 1-四格拼板有两种类型：或者它们覆盖 3 个黑方格和 1 个白方格，或者它们覆盖 3 个白方格和 1 个黑方格。

第 2 章的练习题

2. 见 D.O.Shklarsky，N.N.Chentzov 和 I.M.Yaglom：*The USSR Olympiad Problem Book*，Freeman，San Francisco，1962，169－171。
4. 把整数$\{1,2,\cdots,2n\}$化分成数对$\{1,2\},\{3,4\},\cdots,\{2n-1,2n\}$。
7. 见 D.O.Shklarsky，N.N.Chentzov 和 I.M.Yaglom：*The USSR Olympiad Problem Book*，Freeman，San Francisco，1962，169－171。
8. 当一个整数被 n 去除，可能的余数是什么？
9. 用 10 个数所能形成的和数是 $2^{10}-1$。没有和数能够超过 600。
14. 45 分钟。
15. 提示：考虑一个整数被 n 所除的余数。
18. 把这个正方形分成边长为 1 的 4 个正方形。
19. ⅰ）将该三角形分成边长为 1/2 的 4 个等边三角形。

20. 考虑一点和到其他 16 个点的线段。至少其中的 6 条线段有相同的颜色。
24. q_3。
27. 一个集合及它的补能够同在该子集的集合中吗?
28. 提示:首先证明存在一种选择跳舞表的方法,它以 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=1620(=20+80\times20)$ 种方式工作。然后通过使用一种平均的论点（对于 $i=1, 2, \cdots, 20$，令 b_i 为包含第 i 位女士的表的数目并将这些数平均）证明不存在和为 1619 的能够工作的排列。

第 3 章的练习题

1. {ⅰ,ⅱ}: 48。
2. $4!\ (13!)^4$。
3. $52\times51\times50\times49\times48$; $\binom{52}{5}$。
4. ⅰ) $5\times3\times7\times2$; ⅲ) 121。
5. ⅰ) 12。
6. 把这些整数按照它们包含的数字位数划分。
8. $6!\ 5!$。
10. $\binom{12}{2}\times\binom{10}{3}+\binom{12}{3}\times\binom{10}{2}+\binom{12}{4}\times\binom{10}{1}+\binom{12}{5}$。
11. $\binom{20}{3}-2\times17-17\times16-18$。
13. ⅰ) $\binom{100}{25}\binom{75}{35}$。
15. ⅰ) $20!\ /5!$; ⅱ) $\binom{15}{10}\binom{20}{10}10!$。
17. $6!$; $6!\ \binom{6}{2}$。
27. $\binom{7}{4}^2 4!\ +7^2\binom{6}{3}^2 3!$。
30. $2(5!)^2$。
32. $11!\ \left(\frac{1}{2!4!5!}+\frac{1}{3!3!5!}+\frac{1}{3!4!4!}\right)$。
36. $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$。
39. 如果移走 6 根不连续的棍，就得到方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=14$ 的整数解，其中，x_1，$x_7\geqslant0$ 而 $x_i>0$（$i=2, \cdots, 6$）。
41. $3\times\binom{12}{2}$。
43. $\binom{r+k-2}{k-2}+\binom{r+k-3}{k-2}$。
47. 提示：使用减法原理。首先，对将书放到书架上的方法总数进行计数。然后，对一个书架放书多于另外两个书架的方法数（使得书架至少有 $n+1$ 本书）计数。

54. 3^n。

第 4 章的练习题

1. 35124。
2. $\{3,7,8\}$。
4. 提示：1 不动。
6. ⅰ) 2，4，0，4，0，0，1，0。
7. ⅱ) 48165723。
11. ⅰ) 00111000；ⅱ) 0010101；ⅲ) 01000000。
15. ⅰ) $\{x_4,x_2\}$；ⅱ) $\{x_7,x_5,x_3,x_0\}$。
16. ⅰ) $\{x_4,x_1\}$；ⅱ) $\{x_7,x_5,x_2,x_1,x_0\}$。
17. 第 150 是 $\{x_7,\ x_4,\ x_2,\ x_1\}$。
23. ⅰ) 010100111。
24. ⅰ) 010100010。
28. 2，3，4，7，8，9 直接跟在 2，3，4，6，9，10 之后；2，3，4，6，8，10 直接位于 2，3，4，6，9，10 之前。
34. ⅰ) $12\cdots r,12\cdots(r-1)(r+1),\cdots,12\cdots(r-1)n$ 。
36. X 上的关系的数目是 2^{n^2}；反射关系数为 $2^{n(n-1)}$。
41. 提示：考虑传递性。
48. 提示：某种非常熟悉的东西。
50. 42。

第 5 章的练习题

6. $-3^5 2^{13}\binom{18}{5}$；0。
7. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k=(1+r)^n$ 。
8. 提示：$2=3-1$。
9. $(-1)^n 9^n$。
13. $\binom{n+3}{k}$。
15. 微分二项式公式，然后用 -1 代替 x。
17. 积分二项式公式，但要注意积分常数。
20. 为求 a、b 和 c，乘开并比较系数。
23. ⅰ) $\frac{24!}{10!14!}$；ⅱ) $\frac{15!}{4!5!6!}$；ⅲ) $\frac{(9!)^2}{4!5!(3!)^3}$。
24. $\frac{45!}{10!15!20!}$。
29. 提示：考虑 n 个男孩和 n 个女孩，并形成大小为 n 的委员会，委员会的领导是一个男孩。

30. $\binom{m_1+m_2+m_3}{n}$。

31. 首先证明大小为 6 的杂置不可能含有 3－组合。

35. 提示：只有一个组合的链的个数为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}-\binom{n}{\lceil (n+1)/2 \rceil}$。

38. 用 1 代替所有的 x_i。

40. $\frac{10!}{3!4!2!}$。

第 6 章的练习题

1. 5 334。

3. 10 000－（100＋21）＋4＝9 883。

4. 34。

7. 456。

9. ⅰ）使用变量变换 $y_1=x_1-1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3-4$，$y_4=x_4-2$。

11. $8!-4\times 7!+6\times 6!-4\times 5!+4!$ 。

12. $\binom{8}{4}D_4$。

15. ⅰ）D_7；ⅱ）$7!-D_7$；ⅲ）$7!-D_7-7\times D_6$。

16. 提示：按照在其自然位置上的整数的个数划分这些排列。

17. $\frac{9!}{3!4!2!}-(\frac{7!}{4!2!}+\frac{6!}{3!2!}+\frac{8!}{3!4!})+(\frac{4!}{2!}+\frac{6!}{4!}+\frac{5!}{3!})-3!$ 。

21. $D_1=0$ 和 $D_2=1$。再使用归纳法和 D_n 的一个递归关系。

24. ⅱ）$6!-12\times 5!+54\times 4!-112\times 3!+108\times 2!-48+8$。

28. $8!-32\times 6!+288\times 4!-768\times 2!+384$（数 32 如下产生。原坐法将男孩们配成对。使得恰有一对男孩互相面对的座位安排方法数可如下得到：可以用 4 种方法选出一对，选择他们以 4 种方式占据的两个座位，然后让他们以两种方式坐下。得到 $4\times 4\times 2=32$）。

30. $\frac{9!}{3!4!2!}-(\frac{7!}{4!2!}+\frac{6!}{3!2!}+\frac{8!}{3!4!})+(\frac{4!}{2!}+\frac{6!}{4!}+\frac{5!}{3!})-3!$ 。

31. 提示：令 A_i 为在 1 和 n 之间能够被 p_i 整除的整数的集合。

35. 答案是 6。不过这是做这道题的一种困难的方法，实际上把所有的答案列出更容易。

第 7 章的练习题

1. ⅰ）f_{2n}，ⅱ）$f_{2n+1}-1$。

2. 提示：证明$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}^n}{2}\right)$的绝对值小于$\frac{1}{2}$。

3. ⅰ）$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}=2f_{n-2}+f_{n-3}$，再用归纳法。
   ⅱ）$f_n=3f_{n-3}+2f_{n-4}$，再用归纳法。

6. 首先对 m 用归纳法证明 $f_{a+b}=f_{a-1}f_b+f_af_{b+1}$，再令 $m=nk$，并根据对 k 的归纳法证明 f_m 可以被 f_n 整除。

7. 令 $m = qn + r$。然后，通过练习 4 给出的部分解，$f_m = f_{qn-1}f_r + f_{qn}f_{r+1}$。根据练习 4，由于 f_{qn} 能被 f_n 整除，因此 f_m 和 f_n 的 GCD 等于 $f_{qn-1}f_r$ 和 f_n 的 GCD。此时，再用计算 GCD 的标准算法（见 10.1 节）。
8. $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$。
9. $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$。
12. $2^{n-2} - (-2)^{n-2}$。
13. $(n+2)!$。
16. $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}(-2)^n$。
19. ⅰ）3^n；ⅲ）$\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$。
20. $h_n = h_{n-1} + h_{n-3}$。
22. 见第 8 章练习 1。
23. $4^{n+1} - 3\times 2^n$。
25. $3\times 2^n - n - 2$。
28. ⅰ）$\frac{1}{1-cx}$；ⅳ）e^x。
29. ⅰ）$\frac{x^4}{(1-x^2)^4}$；ⅲ）$\frac{1+x}{(1-x)^2}$。
30. ⅰ）如果 n 是偶数，则 $h_n = 0$，如果 n 是奇数，则 $h_n = 4^{(n-1)/2}$；ⅲ）$h_n = \frac{1}{12}(-3 + 4\times 3^n - (-3)^n)$；ⅴ）$h_n = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}(-2)^n$。
32. 从级数 $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ 开始并微分，乘以 x 并微分，再乘以 x 并微分。
33. 提示：用 $n = (n-1) + 1$。
36. $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x)(1-x^7)}$。
37. 提示：$h_n = \frac{1}{2}(n^2 - n)$。
38. 把 h_n 写成 n 的 3 次多项式。
40. $1/(1-x)$。
42. ⅰ）$(x + x^3/3! + x^5/5! + \cdots)^k$；ⅱ）$(e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6)^k$；
ⅳ）$(1+x)(1+x+x^2/2!)\cdots(1+x+\cdots+x^k/k!)$。
43. 如果 $n \geqslant 1$ 且 $h_0 = 0$，则 $h_n = 4^{n-1}$。
45. 提示：其指数生成函数是 $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right)^2 e^{3x}$。

第 8 章的练习题

1. 设对于 $2n$ 个点的方法数是 a_n。选取一个点并称之为 P。则 P 必然被连到一点 Q 上，使得在直线 PQ 的两侧存在偶数个点。这就导致递归关系 $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0$，$a_0 = 1$。令 $b_n = a_{n-1}$（$n \geqslant 1$）。则 $b_n = b_1b_{n-1} + b_2b_{n-2} + \cdots + b_{n-1}b_1$（$b_1 = 1$）。因此，$b_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ 和 $a_n = b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$。

2. 提示：考虑 +1 和 −1 的序列 a_1，a_2，⋯，a_{2n}，如果 j 在矩阵的第一行取 a_j 为 +1，如果 j 在矩阵的第二行则取 a_j 为 −1。
5. 推广定理 8.1.1 的证明。
6. $\sum_{k=0}^{n} h_k = 3\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + 4\binom{n+1}{3}$。
9. 对 k 用归纳法。
10. 用到 $\binom{n}{k}$ 是 n 的 k 次多项式的事实。因此，c_m 必须选得使在 h_n 中 $c_m/m!$ 是 n^m 的系数。
12. ⅱ）$S(n,2)$ 是将 $n \geqslant 2$ 个元素的集合分成两个可辨别的盒子，使得没有盒子是空盒的划分的个数。存在 2^n-2 个分成非空可辨别盒子的划分。
13. 提示：一个映上函数的逆像给出分成 k 个非空可辨别盒子的一个划分。
15. 划分那些按照非空盒子的数目得到的划分。
19. ⅰ）$s(n,1)$ 与 n 元素集的循环置换的个数相同。
26. ⅰ）$12=4+3+2+2+1$。

第 9 章的练习题

4. 至少存在一个顶点与多于 4 条边关联的任何二分图。
5. 提示：将这些多米诺牌逐列垂直摆放，但有一张多米诺牌要水平放置。
7. 提示：边的总数是与 X 的一个顶点关联的边的数目，它也等于与 Y 的一个顶点关联的边的条数。
9. 应用定理 9.2.5。
10. 对于右边的二分图，匹配中的最大边数是 6，6 条边的一个匹配是

$$\{\{x_1,y_7\},\{x_2,y_5\},\{x_3,y_3\},\{x_5,y_2\},\{x_6,y_6\},\{x_7,y_8\}\}$$

覆盖该二分图的所有的边的一个顶点集为 $\{x_1,x_2,x_5,x_6,x_7,y_3\}$。
12. 最大数为 5。
13. （对于所有的 n）不同的 SDR 的个数是 2。
15. 从 A_2，⋯，A_n 的每一个中删去 x（如果有的话），并证明结果的 $n-1$ 个集合满足配对条件。
17. 提示：设黑方格的数目等于白方格的数目，证明在同一行或在同一列有两个相邻的方格，使得将它们拿走则得到练习中的类型的棋盘，再用归纳法完成证明。
20. 提示：一位女士的第 k 个选择是一位男士，该男士的第 $(n+1-k)$ 个选择即为该女士。如果 $p<k$，那么 $n+1-p>n+1-k$。
22. 在两种情形下，我们都得到稳定的完备婚姻 $A\leftrightarrow c$，$B\leftrightarrow d$，$C\leftrightarrow a$，$D\leftrightarrow b$。
23. 由于 $(n^2-n)/n=n-1$，因此，在 n^2-n+1 次提议后，某位女士已经被拒绝了 $n-1$ 次，而每位男士至少接收到一次求婚。
24. 提示：为了能有相等数目的男士和女士，引入一些假想的女士，每个男士把假想的女士放在他的列表的最后。
27. 提示：构造二分图 $G=(X, \Delta, Y)$，其中 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，在图的 x_i 和 y_j 之间存在一条边当且仅当 $a_{ij}\neq 0$。然后证明它的覆盖数是 n。

第10章的练习题

6. 用到练习题5和$a-b=a+(-b)$的事实。
9. $-3=17$，$-7=13$，$-8=12$，$-19=1$。
10. $1^{-1}=1$，$5^{-1}=5$，$7^{-1}=7$，$11^{-1}=11$。
11. 4，9，和15没有乘法逆元。$11^{-1}=11$，$17^{-1}=17$，$23^{-1}=23$。
12. $n-1$和n的GCD是1。
14. ⅰ) GCD=1。
15. 在Z_{31}中，12的乘法逆元是13。
17. ⅰ) i^2；ⅲ) $1+i^2$；ⅴ) i。
19. 不存在：要是存在这样一个设计，那就有$\lambda=r(k-1)/(k-1)=80/17$。
21. 其参数为$b'=v'=7$，$k'=r'=4$和$\lambda'=2$。
23. 每一个都由另一个通过用0代替1和用1代替0而得到。
27. $\lambda=v$。
29. 不是。
33. 存在3变元的指数为1的Steiner系统，再应用$t-1$次定理10.3.2。
37. 互换行和列不改变行和列是置换的事实。
40. 取$n=6$，$r=1$和$r'=5$。
43. 应用定理10.4.3。
44. 为了构造9阶2 MOLS，可以使用定理10.4.6的证明中的构造，或可以使用从2个3阶MOLS开始验证定理10.4.7所引入的乘积结构。为了构造3个9阶MOLS，应该首先从其系数在Z_3中但在Z_3中没有根的一个多项式（如x^2+x+2）开始构造一个9阶域，然后应用用于验证定理10.4.4的结构。
45. 取两个3阶MOLS A_1和A_2和两个5阶MOLS B_1和B_2，则$A_1 \otimes B_1$和$A_2 \otimes B_2$是两个15阶的MOLS。
47. 在B中被1所占据的A中的n个位置就是n个非攻击型车的位置。
55. 一个完备化为

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

57. 取一个完备化，另外一个通过交换最后两行得到。
60. 在最后$n-1$行和列中的0与整数1，2，⋯，$n-1$配对，因此$n-1$是偶数。

第11章的练习题

1. 分别为1个、2个和4个。

3. 否。
4. 否；可以。
5. 见第 2 章的练习题 16，对多重图不真。
6. 提示：尝试环。
7. 提示：插入尽可能多的环。
8. 提示：对于 k 个顶点的任意集合 U，有多少边至少在 U 中有它们的一个顶点？
11. 只有第一个图和第三个图是同构的。
14. 否。
15. 否。
19. 连通性和平面性都不依赖于环或连接一对顶点的多于一条的边存在。
21. 如果 G 是连通的，那么肯定 G^* 也是。顶点 x 和 y 必然在 G 的相同的连通分支上（为什么？），因此，如果 G^* 是连通的，那么 G 已然连通。
29. 第二个有一条欧拉迹，但第一个没有。
32. 5。
39. 提示：首先构造一个 5 阶图，它有四个顶点的度是 3 而剩下的顶点的度为 2。再用该图的 3 个拷贝构造所要的图。
48. 不是，但如果我们删除环则是。
49. ⅰ）为使 $\{a, b\}$ 是一条边，或 a 和 b 都是偶数，或它们都是奇数。由此得到结论为 a）不是；b）不是；c）否；d）否。
50. 4（为得到 $K_{2,3}$，需要有 6 条边）。
54. 唯有其边被排在一个路径中的树。
55. 还是唯有其边被排在一个路径中的树。
56. 有 11 个。
57. 提示：对 n 用归纳法。至少一个 d_i 等于 1。
59. 要是有多于两棵的树，那么把这条边放回去就不可能构成连通图。
64. 提示：试一试“扫帚”。
66. 恰好一个。
68. 图 11-49 分别给出正方游戏、反方游戏和先方游戏。
71. 提示：否则该边割能是极小吗？
75. ⅲ）一个 BFS-树是其边被排在一条路径中的树，而根“在中间”。
76. ⅲ）一个 DFS-树是一个 $K_{1,n-1}$，度为 1 的顶点作为根。
78. 提示：考虑一个悬挂顶点并对 n 用归纳法。
86. 提示：考虑两棵最小权生成树，使得一棵树有一条权为 p 的边而另一棵树则没有权 p 的边的最小数 p。

第 12 章的练习题

5. 提示：在没有任何有向圈的有向图中，必然存在一个顶点，没有弧进入该顶点。
7. 提示：存在一条 Hamilton 路。
9. 提示：一个强连通的竞赛图至少有一个有向圈。证明，有向圈的长度可以增加直到包含

所有的顶点。

11. 提示：开迹。

16. 如果不然，则 t_1 从分配中分离，从而该分配就不是核心分配。

18. 验证 6 个可能的分配。有该算法产生的核心分配是每个交易商得到他排位在最先的物品的分配。

19. 否则，他将脱离这个分配。

第 13 章的练习题

4. C_n 不是二分图，而且容易找出一个 3-着色。

5. 分别为 2，3 和 4。

8. ⅰ）通过应用求色多项式的算法得到的所有零图至少有一个顶点，从而他们的色多项式形如 k^p，其中 $p\geqslant 1$。ⅱ）G 是连通的，当且仅当所得到的零图中的一个是 1 阶的。ⅲ）为得到 $n-1$ 阶的零图，必须收缩一条边而其余的边必须被删除。

9. 使用练习 7 的结果。

10. $n-1$。

12. $n-1$。

13. $n-2$。

15. 提示：拿走一条边并得到一个二分图。

21. 提示：将这些线一次放入一条，再用归纳法。

23. 提示：考察不等式（12-5）的证明。

26. 提示：定理 12.2.2。

27. 提示：考察定理 12.2.2 的证明。

29. 提示：选择一条最长的链 x_0，x_1，…，x_k，x_0 可以邻接到哪些顶点上？

33. 提示：树是二分图。

37. 2。

38. $\lceil n/3 \rceil$。

42. 提示：如果 G 是一个区间图，则任何导出图都是某些区间的图。

44. 提示：一个弦二分图不能有圈。

51. $\min\{m, n\}$。

52. 提示：设 G 是不连通的。关于 G 的度序列意味着什么？

53. ⅰ）$\lceil (n-1)/2 \rceil$。

第 14 章的练习题

1. $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&5&3&4&1&6\end{pmatrix}$；$f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&6&2&5&1\end{pmatrix}$。

5. 对称群仅包含恒等运动，顶点对称群仅包含三个顶点的恒等置换。

10. 一个非正方形矩形的对称群包括四个运动：恒等运动，饶矩形中心的 180°旋转，关于对边的两个反射。

13. ⅰ）(R,B,R,B,R,R)；ⅱ）(R,R,B,R,R,B)。

14. 4（10）。

16. 如果 $f(i)=j$，则 $f(j)=i$，f 的循环因子分解仅包含 1-循环与 2-循环。

18. $\frac{p^4+2p^3+3p^2+2p}{8}$。

22. $\frac{p^4+3p^2}{4}$。

23. ⅰ）将两个正方形标以 A 与 B，用颜色 0、1、2、3、4、5、6 对 $\{A,B\}$ 进行着色，则有标号的多米诺骨牌数等于在 $\{A,B\}$ 的两种可能的置换群 G 的作用下 $\{A,B\}$ 的不等价的着色数。根据定理 13.2.3，则得不同标记的多米诺骨牌数为 $\frac{7^2+7}{2}=28$。

24. ⅰ）现在的置换群包含已标号的 4 个正方形的 4 个置换，答案为

$$\frac{7^4+3\times7^2}{4}=637$$

25. 一个正五角形的三个顶点为红色两个顶点为蓝色的着色方式共有 10 种，在二面体群 D_5 的作用下，不等价的着色数为 $\frac{10+5\times2+4\times0}{10}=2$。

26. $\frac{35+7\times3+6\times0}{14}=4$。

27. $f=[1\quad6\quad3\quad2\quad4]\circ[5]$。

28. 对 f 的循环因子分解中的每一个循环中的元素反序。

31. $\frac{k^5+5\times k^3+4\times k}{10}$。

33. 参考练习题 28。

36. $\frac{30+5\times2+4\times0}{10}=4$。

41. 如果 ρ_n^k（$k=1,2,\cdots,n-1$）包含一个 t-循环，那么由对称性，ρ_n^k 的循环因子分解仅包含 t-循环，这意味着 t 是 n 的一个因子，由于 n 是一个素数，因此 $t=1$ 或 $t=n$。因 $t=1$ 隐含 ρ_n^k 是恒等置换，所以 $t=n$ 即 ρ_n^k 是一个 n 阶循环。

42. 利用练习题 41，得 $\frac{k^n+n\times k^{(n+1)/2}+(n-1)k}{2n}$。

43. 置换群的循环指数为

$$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_{10})=\frac{z_1^{10}+2z_1z_4^2+z_1z_2^4}{4}$$

因此，不等价的着色数为

$$P_G(2,2,\cdots,2)=\frac{2^9+2^4+2^5}{4}=2^7+2^2+2^3$$

49. 三个旋转的群 G 的循环指数为

$$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_9)=\frac{z_1^9+2z_1z_3^3}{3}$$

不等价着色的生成函数为

$$P_G(r+b,r^2+b^2,\cdots,r^{10}+b^{10})=\frac{(r+b)^{10}+2(r+b)(r^3+b^3)^3}{3}$$

参 考 文 献

在本书的的脚注中，我们引用了许多参考文献，为方便读者进一步阅读本书中讨论的主题，以下我们再列出一些参考书。

Ian Anderson: *Combinatorics of Finite Sets.* Oxford, England: Oxford, 1987.

Béla Bollobás: *Modern Graph Theory.* New York: Springer-Verlag, 1998.

Claude Berge: *Graphs and Hypergraphs.* New York: Elsevier, 1973.

Richard A. Brualdi and Herbert J. Ryser: *Combinatorial Matrix Theory.* New York: Cambridge, 1991.

Louis Comtet: *Advanced Combinatorics.* Boston: Reidel, 1974.

Shimon Even: *Graph Algorithms.* Potomac, Maryland: Computer Science Press, 1979.

L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson: *Flows in Networks.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1962.

Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel L. Spencer: *Ramsey Theory*, second edition. New York: Wiley, 1990.

Frank Harary: *Graph Theory.* New York: Addison-Wesley, 1969.

Frank Harary and Edgar Palmer: *Graphical Enumeration.* New York: Academic Press, 1973.

D.R. Hughes and F.C. Piper: *Design Theory.* New York: Cambridge, 1985.

Tommy R. Jensen and Bjarne Toft: *Graph Coloring Problems.* New York: Wiley-Interscience, 1995.

C.L. Liu: *Topics in Combinatorial Mathematics.* Washington: Mathematical Association of America, 1972.

L. Lovász and M. D. Plummer: *Matching Theory.* New York: Elsevier, 1986.

L. Mirsky: *Transversal Theory.* New York: Academic, 1971.

C.A. Pickover: *The Zen of Magic Squares, Cicles, and Stars*, Princeton: Princeton University Press, 2002.

Herbert J. Ryser: *Combinatorial Mathematics.* Carus Mathematical Monograph No. 14. Washington: Mathematical Association of America, 1963.

Thomas L. Saaty and Paul C. Kainen: *The Four-Color Problem.* New

York: Dover, 1986.

Richard P. Stanley: *Enumerative Combinatorics*, Volume I (1997) and Volume 2 (1999), Cambridge.

N. Vilenkin: *Combinatorics.* New York: Academic, 1971.

Douglas West: *Introduction to Graph Theory* (2nd edition). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

索　引

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

X

Y

Z